

# 确定性周期与随机激励联合作用下非线性系统 非平稳响应的统计线性化方法

孔 凡<sup>1,2</sup>, 韩仁杰<sup>1</sup>, 张远进<sup>3</sup>

(1. 武汉理工大学土木工程与建筑学院, 湖北 武汉 430070; 2. 合肥工业大学土木与水利工程学院, 安徽 合肥 230009;  
3. 武汉理工大学安全科学与应急管理学院, 湖北 武汉 430070)

**摘要:** 提出一种用于求解确定性周期与非平稳随机激励联合作用下, 单自由度非线性系统非平稳响应的统计线性化方法。将系统响应分解为确定性周期和零均值随机分量之和, 则原非线性运动方程可等效地化为一组耦合的、分别以确定性和随机动力响应为未知量的非线性微分方程。利用统计线性化方法将非平稳随机激励作用下的非线性随机动力方程化为等效线性方程, 得到关于线性随机响应二阶矩的李雅普诺夫方程。联立李雅普诺夫方程与谐波激励作用下的确定性微分方程, 并利用数值算法对其进行求解。以蒙特卡洛模拟验证了此方法的适用性和精度。

**关键词:** 非平稳响应; 非线性系统; 统计线性化; 联合激励; 龙格-库塔法; 蒙特卡洛模拟

**中图分类号:** O324; O322 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2022)03-0625-10

**DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2022.03.012

## 引 言

工程动力作用具有强烈的随机性, 通常利用非平稳随机过程描述<sup>[1]</sup>。以完全非平稳地震动为例: 它不仅在强度上具有明显的上升和衰减过程, 而且在不同时间段上能量的频率分布也不同<sup>[2]</sup>。因此, 地震动非平稳性体现为幅值非平稳和频率非平稳。学者们提出了各种模型以全面反映地震动的非平稳特性<sup>[3-6]</sup>。近年来, 小波变换以其时-频联合分辨特性在地震动建模方面得到了广泛发展, 详见文献[7-10]。

复杂非线性系统在随机激励下的随机动力响应是随机振动研究的重要课题。具体而言, 利用 Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) 方程<sup>[11]</sup>、随机平均法<sup>[12]</sup>、统计线性化(或非线性化)<sup>[13]</sup>、矩截断<sup>[14]</sup>、信息理论(熵)方法<sup>[15]</sup>以及最近发展的概率密度演化方法<sup>[16]</sup>等, 人们已解析或数值地得到了很多非线性随机动力系统的精确解或近似解。然而, 高效地计算非平稳激励下复杂非线性系统的非平稳响应仍然是工程随机振动理论发展面临的巨大挑战<sup>[17]</sup>, 具有重要的实际意义。统计线性化方法是随机振动理论中具有广泛适用性的非线性方法之一。它可以用于不同的无记忆非线性<sup>[18]</sup>, 甚至滞回非线性系统<sup>[19]</sup>、平稳或非平稳随机激励<sup>[17]</sup>、多自由度<sup>[20]</sup>或连续系统<sup>[21]</sup>, 最

近的综合综述详见文献[22]。

上述研究仅考虑激励为随机过程的情况。然而, 工程实际中, 结构往往会同时受到确定性周期和随机激励的联合作用。例如, 旋转式飞机<sup>[23]</sup>经常受到色噪声和谐波激励联合作用; 俘能系统的非线性响应<sup>[24]</sup>; 近断层脉冲地震作用下的结构等。为此, 人们发展了联合激励下非线性系统随机动力响应的系列方法: Chang<sup>[25]</sup>使用高斯与非高斯线性化求得了 Duffing 系统在谐波与高斯白噪声激励联合作用下的平稳响应; Chen 等<sup>[26]</sup>给出了分数阶 Duffing 系统在确定性激励与平稳白噪声联合作用下平稳响应的随机平均法; Zhu 等<sup>[27]</sup>利用谐波平衡和矩截断方法研究了 Duffing 系统在谐波与随机激励联合作用下的平稳响应; Zhang 等<sup>[28]</sup>给出了周期与随机激励联合作用下多自由度齿轮结构平稳响应的统计线性化方法。然而, 考察联合激励下非平稳随机作用带来的响应非平稳性, 尚未引起人们足够的重视。这种随机响应的非平稳性主要来自于三个方面: 突加激励非平稳、与谐波响应耦合的非平稳、随机激励自身的变慢非平稳。

注意到统计线性化方法的广泛适用性, 本文提出了一种用于求解确定性周期与非平稳随机激励联合作用下、单自由度非线性系统非平稳响应的统计线性化方法, 可视为作者发展的平稳方法的非平稳推广<sup>[29-30]</sup>。该方法将系统响应分解为确定性谐波和

零均值随机分量之和,将原非线性运动方程等效地化为一组耦合的、分别以确定性和随机动力响应为未知量的非线性微分方程。然后,利用统计线性化方法将非平稳随机激励作用下的非线性随机动力方程化为等效线性方程,得到关于线性随机响应二阶矩的李雅普诺夫微分方程。最后,联立李雅普诺夫微分方程与谐波激励作用下的确定性微分方程,通过数值算法(如龙格-库塔法)对这组耦合非线性常微分方程进行求解。数值算例中,利用蒙特卡洛模拟验证此方法的适用性和精度。

## 1 动力学方程

单自由度非线性系统在确定性周期和非平稳随机激励联合作用下的运动方程为:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) + g[x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)] = Q(t) + F(t) \quad (1)$$

式中  $m, c$  和  $k$  分别为质量、阻尼和刚度系数;  $x, \dot{x}$  和  $\ddot{x}$  分别为响应的位移、速度和加速度;  $g[x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)]$  为  $x(t), \dot{x}(t)$  和  $\ddot{x}(t)$  的非线性函数;  $Q(t)$  为零均值均匀调制非平稳随机激励,可写为:

$$Q(t) = a(t)Q_s(t) \quad (2)$$

式中  $a(t)$  为调制函数;  $Q_s(t)$  为零均值平稳随机过程;  $F(t)$  为确定性周期激励,写为 Fourier 展开形式为:

$$F(t) = \sum_{l=1}^N F_l \sin(\omega_l t + \theta_l) \quad (3)$$

式中  $F_l$  为第  $l$  次谐波幅值。

激励的非平稳性导致响应的非平稳性。这里,响应的非平稳性主要来自于:突加激励、谐波激励谱和变化以及随机激励幅值慢变非平稳。假设响应  $x(t)$  可分解为均值  $\mu_x(t)$  和方差为  $\sigma_x^2(t)$  的零均值非平稳随机过程  $\hat{x}(t)$  之和,即:

$$x(t) = \mu_x(t) + \hat{x}(t) \quad (4)$$

同时,

$$D[\hat{x}(t)] = D[x(t)] \quad (5)$$

式中  $D[\cdot]$  表示方差。将式(4)代入式(1)中得:

$$m(\ddot{\mu}_x + \ddot{\hat{x}}) + c(\dot{\mu}_x + \dot{\hat{x}}) + k(\mu_x + \hat{x}) + g(\mu_x + \hat{x}, \dot{\mu}_x + \dot{\hat{x}}, \ddot{\mu}_x + \ddot{\hat{x}}) = Q(t) + F(t) \quad (6)$$

为方便计,省略了响应量的时间参数。对式(6)两边求数学期望得:

$$m\ddot{\mu}_x + c\dot{\mu}_x + k\mu_x + E[g(\mu_x + \hat{x}, \dot{\mu}_x + \dot{\hat{x}}, \ddot{\mu}_x + \ddot{\hat{x}})] = F(t) \quad (7)$$

式中  $E[\cdot]$  表示数学期望,用式(6)减式(7)得:

$$m\ddot{\hat{x}} + c\dot{\hat{x}} + k\hat{x} + h = Q(t) \quad (8)$$

式中

$$h = g(\mu_x + \hat{x}, \dot{\mu}_x + \dot{\hat{x}}, \ddot{\mu}_x + \ddot{\hat{x}}) - E[g(\mu_x + \hat{x}, \dot{\mu}_x + \dot{\hat{x}}, \ddot{\mu}_x + \ddot{\hat{x}})] \quad (9)$$

依赖响应  $(x, \dot{x}, \ddot{x})$  及其联合概率密度函数  $p_{xxx}(x, \dot{x}, \ddot{x})$ 。可见,式(7)和(8)分别为关于响应均值分量和随机分量的、相互耦合的非线性微分方程组,需联立求解才能得到非平稳响应。为此,可利用统计线性化方法将式(8)化为关于响应随机分量的等效线性方程,并利用对应的李雅普诺夫方程求得随机分量的统计特征值;同时,联立确定性分量的运动方程(式(7)),利用微分方程的数值方法(如龙格-库塔法)同时求解确定性响应分量  $\mu_x$  和随机响应分量的统计特征值。

## 2 统计线性化方法

利用统计线性化方法将式(8)化为线性方程:

$$m\ddot{\hat{x}} + [c + c_e(t)]\dot{\hat{x}} + [k + k_e(t)]\hat{x} = Q(t) \quad (10)$$

式中  $c_e(t), k_e(t)$  为等效线性参数。当随机激励  $Q(t)$  为高斯过程时,响应  $\hat{x}(t)$  也为高斯过程;即使  $Q(t)$  为非高斯过程,当系统阻尼较小时,响应  $\hat{x}(t)$  也可近似为高斯过程。因此,  $c_e(t), k_e(t)$  均为时间  $t$  的函数,且有:

$$c_e(t) = E\left[\frac{\partial h}{\partial \dot{\hat{x}}}\right], \quad k_e(t) = E\left[\frac{\partial h}{\partial \hat{x}}\right] \quad (11)$$

以下考虑  $Q_s(t)$  为白噪声和色噪声两种情况。

### 2.1 $Q_s(t)$ 为白噪声

此时,  $Q(t)$  为均匀调制白噪声,即:

$$Q(t) = a(t)\omega(t) \quad (12)$$

式中  $\omega(t)$  为零均值高斯白噪声,功率谱密度为  $S_0$ 。将式(10)化为状态方程的形式:

$$\dot{q} = G(t)q + Q(t) \quad (13)$$

式中  $q = [\hat{x}, \dot{\hat{x}}]^T, Q(t) = [0, Q(t)/m]^T$ , 且

$$G(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(k + k_e(t))/m & -(c + c_e(t))/m \end{bmatrix}$$

与式(13)对应的李雅普诺夫方程为:

$$\dot{v} = G(t)v^T + vG^T(t) + \Theta(t) \quad (14)$$

式中  $v$  为响应的协方差矩阵,即:

$$v = \begin{bmatrix} v_{11}(t) & v_{12}(t) \\ v_{21}(t) & v_{22}(t) \end{bmatrix}$$

$v_{ij}(t)$  为响应  $(q_i, q_j)$ ,  $i, j = 1, 2$  的方差/协方差,且  $v_{ij}(t) = v_{ji}(t)$ ;  $\Theta(t)$  为激励  $Q(t)$  的协方差矩阵,即:

$$\Theta(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\pi a^2(t)S_0/m^2 \end{bmatrix}$$

结合响应的高斯性可知,期望:

$$E[g(\mu_x + \hat{x}, \dot{\mu}_x + \dot{\hat{x}}, \ddot{\mu}_x + \ddot{\hat{x}})] = f(\mu_x, \dot{\mu}_x, v_{11}, v_{12}, v_{22}) \quad (15)$$

可写成确定性响应 $\mu_x, \dot{\mu}_x$ 与随机响应二阶矩 $v_{11}, v_{12}, v_{22}$ 的函数。进而,考虑式(9)和式(11),则等效线性参数 $c_e(t)$ 和 $k_e(t)$ 也为确定性响应 $\mu_x, \dot{\mu}_x$ 与随机响应二阶矩 $v_{11}, v_{12}, v_{22}$ 的函数。由式(14)可见,随机响应协方差矩阵依赖于确定性响应分量。因此,为同时求解 $\mu_x$ 和 $v$ ,需联立式(7)与式(14)。此时,令:

$y = [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5]^T = [\mu_x, \dot{\mu}_x, v_{11}, v_{12}, v_{22}]^T$  可得

$$\dot{y}_1 = y_2 \quad (16)$$

$$\dot{y}_2 = \frac{F(t) - cy_2 - ky_1}{m} - \frac{E[g(x, \dot{x}, \ddot{x})]}{m} \quad (17)$$

$$\dot{y}_3 = 2y_4 \quad (18)$$

$$\dot{y}_4 = y_5 - \frac{(k + k_e)y_3}{m} - \frac{(c + c_e)y_4}{m} \quad (19)$$

$$\dot{y}_5 = -\frac{2(k + k_e)y_4}{m} - \frac{2(c + c_e)y_5}{m} + \frac{2\pi a^2(t)S_0}{m^2} \quad (20)$$

所有未知量的初始值均为零,可利用龙格-库塔法求解式(16)~(20),得响应的确定性分量时程与随机分量协方差矩阵。

## 2.2 $Q_s(t)$ 为色噪声

此时, $Q(t)$ 为均匀调制色噪声,平稳随机过程 $Q_s(t)$ 的功率谱密度为 $S(\omega)$ 。将式(2)中的 $Q_s(t)$ 表示为白噪声经过成型滤波器的形式,即:

$$\nu_{n-1}\Phi^{(n-1)} + \nu_{n-2}\Phi^{(n-2)} + \dots + \nu_0\Phi^{(0)} = Q_s(t) \quad (21)$$

$$\Phi^{(n)} + \lambda_{n-1}\Phi^{(n-1)} + \dots + \lambda_0\Phi^{(0)} = w(t) \quad (22)$$

式中 $\Phi$ 为滤波器的前置输出, $n$ 为成型滤波器维度; $\Phi^{(i)}$ 表示 $\Phi$ 的第 $i$ 阶导数; $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ 和 $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{n-1}$ 为滤波器参数; $w(t)$ 为零均值高斯白噪声,功率谱密度为 $S_0$ 。令:

$$\Phi = [\Phi^{(0)}, \Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(n-1)}]^T \quad (23)$$

则式(22)可以写为:

$$\dot{\Phi} = \Omega\Phi + w \quad (24)$$

式中

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda_0 & -\lambda_1 & \dots & -\lambda_{n-1} \end{bmatrix}_{n \times n}, w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ w(t) \end{bmatrix}_{n \times n}。$$

令:

$$\nu = [\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{n-1}]^T \quad (25)$$

则式(21)可写为:

$$D\Phi = Q_s(t) \quad (26)$$

式中

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ \nu^T \end{bmatrix}_{l \times n}, Q_s(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ Q_s(t) \end{bmatrix}_{l \times 1}, l \text{ 为状态空间未知}$$

量 $q$ 的维度。

联立式(8)、式(24)和式(26),得:

$$\dot{X} = H(t)X + W \quad (27)$$

式中 $X = [\hat{x} \quad \dot{\hat{x}} \quad \Phi^T]^T$ ,且:

$$H = \begin{bmatrix} G & a(t)D/m \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 0 \\ w(t) \end{bmatrix}。$$

与式(27)对应的李雅普诺夫方程为:

$$\dot{V} = H(t)V^T + VH^T(t) + P \quad (28)$$

式中

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 2\pi S_0 \end{bmatrix}_{(l+n) \times (l+n)}, V = \begin{bmatrix} V_{qq} & V_{q\Phi} \\ V_{\Phi q} & V_{\Phi\Phi} \end{bmatrix}_{(l+n) \times (l+n)},$$

且 $V_{qq} = E\{qq^T\}$ ,  $V_{q\Phi} = V_{\Phi q} = E\{q\Phi^T\}$ ,  $V_{\Phi\Phi} = E\{\Phi\Phi^T\}$ 。

同样地,将式(28)与式(7)联立,可利用数值方法求解得到所有未知量 $\mu_x, \dot{\mu}_x, V_{qq}, V_{q\Phi}, V_{\Phi\Phi}$ 。需要注意的是, $V_{\Phi\Phi}$ 的值仅与色噪声本身有关,可直接确定。具体的计算步骤将在算例中进一步说明。

## 3 数值算例

作为算例,不失一般性地考虑具有立方非线性刚度的Duffing振子,即:

$$g[x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)] = \epsilon kx^3 \quad (29)$$

式中 $\epsilon$ 为表示非线性强度的小量。式(7)中非线性项的数学期望为:

$$E[g(\mu_x + \hat{x}, \dot{\mu}_x + \dot{\hat{x}}, \ddot{\mu}_x + \ddot{\hat{x}})] = \epsilon k[3\mu_x(t)\sigma_x^2(t) + \mu_x^3(t)] \quad (30)$$

从而,式(7)可写为:

$$m\ddot{\mu}_x + c\dot{\mu}_x + k\mu_x + \epsilon k[3\mu_x(t)\sigma_x^2(t) + \mu_x^3(t)] = F(t) \quad (31)$$

同样地,式(8)可化为:

$$m\ddot{\hat{x}} + c\dot{\hat{x}} + k\hat{x} + \epsilon k(\mu_x + \hat{x})^3 - \epsilon k[3\mu_x(t)\sigma_x^2(t) + \mu_x^3(t)] = Q(t) \quad (32)$$

依据式(11),等效线性参数为:

$$c_e(t) = 0 \quad (33)$$

$$k_e(t) = 3\epsilon k[\sigma_x^2(t) + \mu_x^2(t)] \quad (34)$$

式(13)中,系数矩阵:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k + 3\epsilon k[\sigma_x^2(t) + \mu_x^2(t)]}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \quad (35)$$

如果确定性激励为单谐波的形式,即:

$$F(t) = a_0 \sin(\omega_0 t) \quad (36)$$

式中  $a_0$  为确定性激励幅值,  $\omega_0$  为确定性激励频率。

假定调制函数:

$$a(t) = A \exp(-\mu t), t \geq 0 \quad (37)$$

式中  $A$  为调制函数峰值,  $\mu$  标识调制函数下降速度。

### 3.1 $Q_s(t)$ 为白噪声

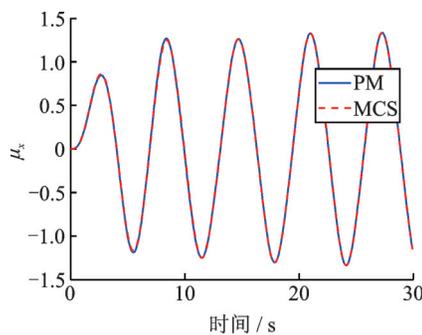
此时,  $Q(t)$  为均匀调制白噪声, 即:

$$Q(t) = A \exp(-\mu t) w(t) \quad (38)$$

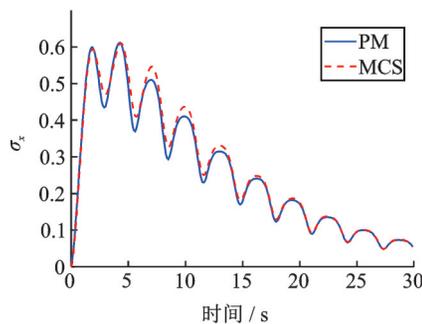
将式(33)~(37)代入式(16)~(20)中, 利用数值方法求得  $y$ , 即所有确定性与随机响应分量 ( $\mu_x, \dot{\mu}_x, v_{11}, v_{12}, v_{22}$ )。

#### 3.1.1 典型参数设置的情况

选取系统参数  $m = 1, c = 0.4, k = 1, \varepsilon = 0.5$ ; 确定性激励参数  $a_0 = 1, \omega_0 = 1$  rad/s; 随机激励参数  $A = 1, \mu = 0.1, S_0 = c/(\pi\sqrt{mk})$ 。本文利用蒙特卡洛模拟(Monte Carlo simulation, MCS)验证所建议方法的适用性。其中, 利用谱表现方法生成白噪声样本 10000 条, 乘以调制函数得均匀调制白噪声。利用本文所建议方法与 MCS 得到了位移均值及其标准差, 其对比如图 1(a), (b) 所示。



(a) 均值  
(a) Mean value



(b) 标准差  
(b) Standard deviation

图1 Duffing系统在谐波与调制白噪声联合作用下的位移  
Fig.1 Displacement of the considered Duffing system subjected to combined harmonic and modulated white noise

从图1(a), (b)可以看出, 在考虑的参数设置情况下, 本文建议方法(Proposed Method, PM)与蒙特卡洛模拟的均值几乎完全吻合。在随机响应分量标准差方面, 所建议方法能很好地捕捉由于突加激励(由0上升的过程)、确定性谐和激励分量(下降过程中呈谐和变化)和随机激励分量调制函数带来的非平稳性(慢变的上升-下降过程)。

#### 3.1.2 非线性强度的影响

下面分析此方法在不同非线性强度下的适用性。其他参数与3.1.1节选取相同, 非线性强度系数  $\varepsilon$  取0~1。定义确定性谐和分量平均功率为:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \mu^2(t) dt \quad (39)$$

式中  $T$  为响应持时。定义随机响应分量标准差的时间平均为:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma(t) dt \quad (40)$$

采用所建议方法与蒙特卡洛模拟计算得到的确定性响应分量平均功率对比如图2所示, 标准差时间平均对比如图3所示。

从图2, 3可见, 在其他参数不变的情况下, 确定性响应平均功率随着非线性强度增加而降低; 位移

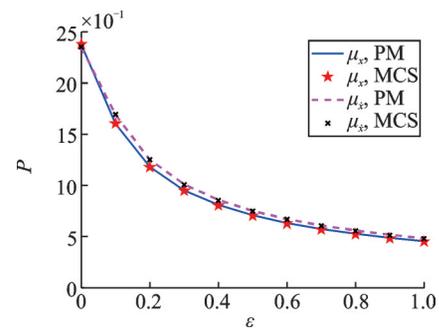


图2 非线性强度对Duffing系统确定性响应平均功率的影响

Fig.2 Averaged power of the deterministic response component of the Duffing system with different degrees of nonlinearity

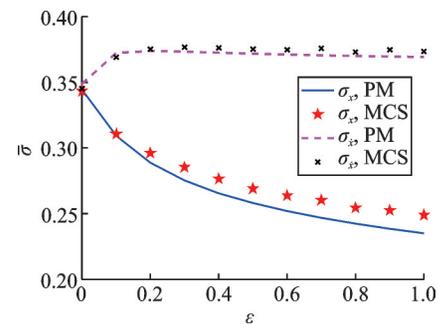


图3 非线性强度对Duffing系统随机响应标准差时间平均的影响

Fig.3 Time-averaged standard deviation of the stochastic response component of the Duffing system with different degrees of nonlinearity

标准差的时间平均随非线性强度增加而降低,速度响应标准差的时间平均随非线性强度增加而略有减小。所有非线性强度情况下,两种方法所得结果均吻合较好。

### 3.1.3 激励幅值的影响

为研究确定性激励幅值对此方法适用性的影响,保持其他参数不变,确定性激励幅值 $a_0$ 取0~2 rad/s。利用本文所建议方法与蒙特卡洛模拟计算得到的确定性响应分量平均功率对比如图4所示;时变标准差的时间平均对比如图5所示。

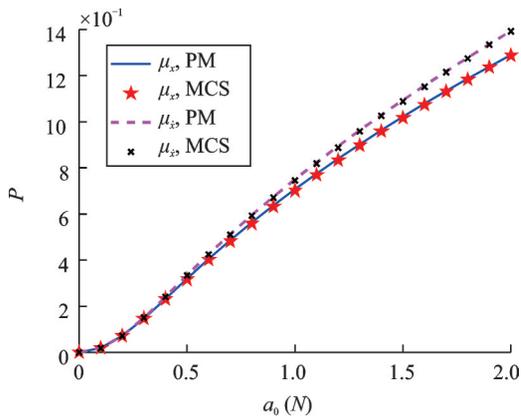


图4 谐波激励幅值对Duffing系统确定性响应平均功率的影响

Fig. 4 Averaged power of the deterministic response component versus the harmonic excitation amplitude

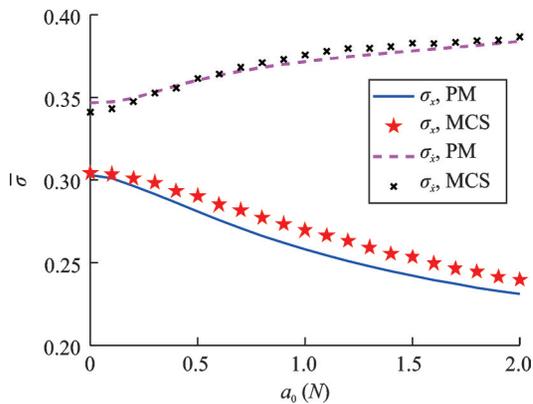


图5 谐波激励幅值对Duffing系统随机响应标准差时间平均的影响

Fig. 5 Influence of the harmonic excitation amplitude on the time-averaged standard deviation of the response

由图4,5可见,在其他参数不变的情况下,确定性响应平均功率随谐波激励幅值增大而增大;位移标准差的时间平均随谐波激励幅值增大而减小,速度标准差的时间平均随谐波激励幅值增大而增大。不同激励幅值下,两种方法所得的结果均吻合较好。

### 3.1.4 确定性谐和激励频率的影响

为研究确定性激励频率对此方法适用性的影响,保持其他参数不变,确定性激励频率 $\omega_0$ 取0.1~

2 rad/s。采用本文所建议方法与蒙特卡洛模拟得到的确定性响应分量的平均功率对比如图6所示;随机响应非平稳标准差的时间平均如图7所示。

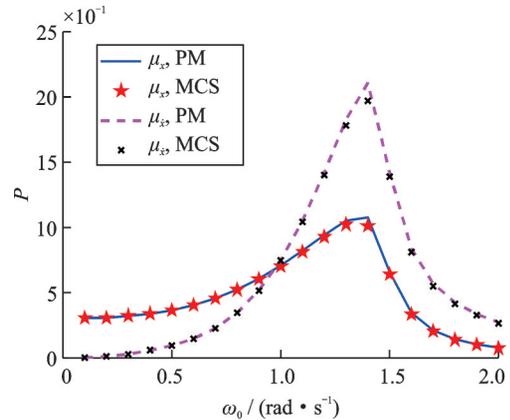


图6 谐波激励频率对Duffing系统确定性响应平均功率的影响

Fig. 6 Influence of the harmonic excitation frequency on the averaged power of the deterministic response component

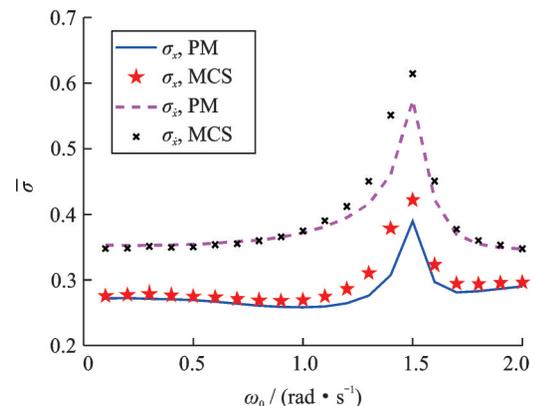


图7 谐波激励频率对Duffing系统随机响应标准差时间平均的影响

Fig. 7 Influence of the harmonic excitation frequency on the time-averaged standard deviation of the response

可见,谐波激励频率对确定性响应平均功率和随机响应标准差平均有较大影响,存在使他们达到极值的谐波激励频率。其中,使确定性响应平均功率达到最大的谐波激励频率约为1.4 rad/s,而使随机响应标准差时间平均值达到最大的谐波激励频率约为1.5 rad/s。此外,不同激励频率下本文所建议的方法与蒙特卡洛模拟所得结果均吻合较好。

### 3.1.5 随机激励强度的影响

为研究随机激励强度对此方法适用性的影响,保持其他参数不变,功率谱强度 $S_0$ 取0~1。采用本文所建议方法与蒙特卡洛模拟得到的确定性响应分量平均功率对比如图8所示;随机响应时变标准差的时间平均对比如图9所示。

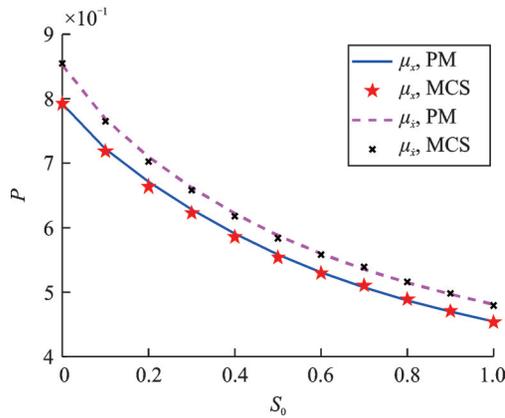


图8 随机激励功率谱强度对 Duffing 系统确定性响应功率的影响

Fig.8 Influence of the stochastic excitation power spectral density on the averaged power of the deterministic response component

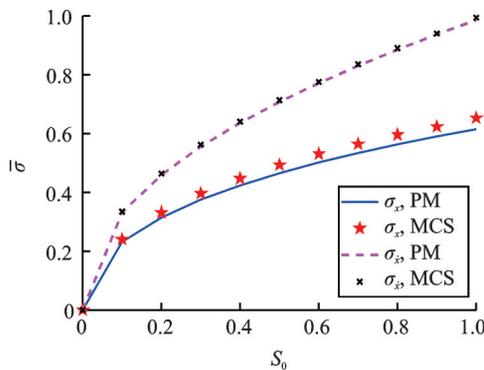


图9 随机激励功率谱强度对 Duffing 系统随机响应标准差时间平均的影响

Fig.9 Influence of the stochastic excitation power spectral density on the time-averaged standard deviation of the response

可见,随机激励功率谱强度对确定性响应平均功率和随机响应标准差平均有较大影响。由图8,9可知随着随机激励功率谱强度的增大,确定性响应平均功率逐渐减小,随机响应标准差的时间平均逐渐增大。所有随机激励强度下两种方法所得结果均吻合较好。

综上,对于 Duffing 系统在确定性谐波与调制白噪声联合作用下的响应,本文所建议的方法在不同参数设置情况下均有良好的适用性。

### 3.2 $Q_s(t)$ 为色噪声

令  $Q(t)$  为均匀调制色噪声,即:

$$Q(t) = A \exp(-\mu t) Q_s(t) \quad (41)$$

式中  $Q_s(t)$  为平稳色噪声。设功率谱密度为金井清谱<sup>[31]</sup>的形式:

$$S(\omega) = \frac{1 + 4\zeta_g^2 \frac{\omega^2}{\omega_g^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_g^2}\right)^2 + 4\zeta_g^2 \frac{\omega^2}{\omega_g^2}} S_0 \quad (42)$$

式中  $\zeta_g$  为场地阻尼比,  $\omega_g$  为特征周期。则成型滤波器的维度  $n=2$ , 式(21)和(22)退化为:

$$\nu_1 \dot{\Phi} + \nu_0 \Phi = Q_s(t) \quad (43)$$

$$\ddot{\Phi} + \lambda_1 \dot{\Phi} + \lambda_0 \Phi = \eta(t) \quad (44)$$

式中

$$\nu_0 = \omega_g^2 \quad (45)$$

$$\nu_1 = 2\zeta_g \omega_g \quad (46)$$

$$\lambda_0 = \omega_g^2 \quad (47)$$

$$\lambda_1 = 2\zeta_g \omega_g \quad (48)$$

则式(24)中

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_0 & -\lambda_1 \end{bmatrix} \quad (49)$$

式(26)中

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \nu_0 & \nu_1 \end{bmatrix} \quad (50)$$

且式(28)中

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{1\Phi} & v_{1\dot{\Phi}} \\ v_{21} & v_{22} & v_{2\Phi} & v_{2\dot{\Phi}} \\ v_{\Phi 1} & v_{\Phi 2} & v_{\Phi\Phi} & v_{\Phi\dot{\Phi}} \\ v_{\dot{\Phi} 1} & v_{\dot{\Phi} 2} & v_{\dot{\Phi}\Phi} & v_{\dot{\Phi}\dot{\Phi}} \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\pi S_0 \end{bmatrix}$$

将式(35),(49)和式(50)代入式(28)中,并与式(31)联立,可得一组微分方程,具体步骤可见文献[18]。

用龙格-库塔法解此非线性常微分方程组可得响应确定性与随机分量。

#### 3.2.1 典型参数设置的情况

选取系统参数  $m=1, c=0.4, k=1, \epsilon=0.5$ ; 确定性激励参数  $a_0=0.5, \omega_0=1.2 \text{ rad/s}$ ; 随机激励参数  $A=1, \mu=0.1, \zeta_g=0.5, \omega_g=1, S_0=c/(\pi\sqrt{mk})$ 。利用谱表现方法生成色噪声样本 10000 条。

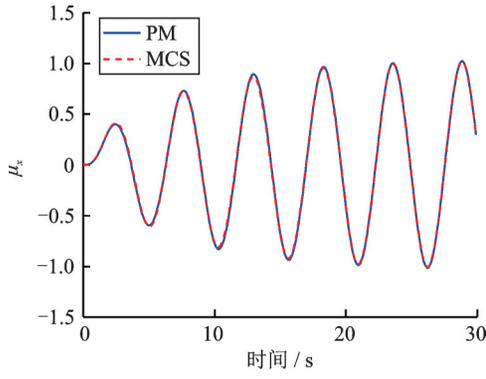
利用本文所建议方法与蒙特卡洛模拟得到了位移的非平稳均值及标准差,其对比如图 10(a),(b)所示。

从图 10(a),(b)可以看出,在考虑的参数设置情况下,本文建议方法与蒙特卡洛模拟的均值较吻合。在随机响应分量标准差方面,所建议方法能很好地捕捉突加激励、确定性激励分量和随机激励分量调制函数带来的非平稳性。

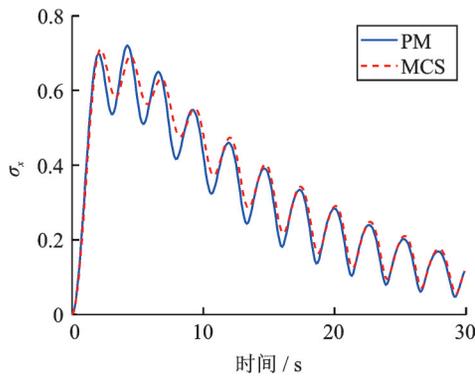
#### 3.2.2 非线性强度的影响

同样地,保持其他参数不变,非线性强度系数  $\epsilon$  取 0~1。采用所建议方法与蒙特卡洛模拟计算得到的确定性响应分量的平均功率对比如图 11 所示;标准差时间平均对比如图 12 所示。

从图 11,12 可以看出,在其他参数不变的情况下,确定性响应平均功率随着非线性强度增加先增大后降低;位移标准差的时间平均随非线性强度增加而降



(a) 均值  
(a) Mean value



(b) 标准差  
(b) Standard deviation

图 10 Duffing 系统在谐波与调制色噪声激励联合作用下的位移  
Fig. 10 Displacement of the considered Duffing system subjected to combined harmonic and modulated colored noise

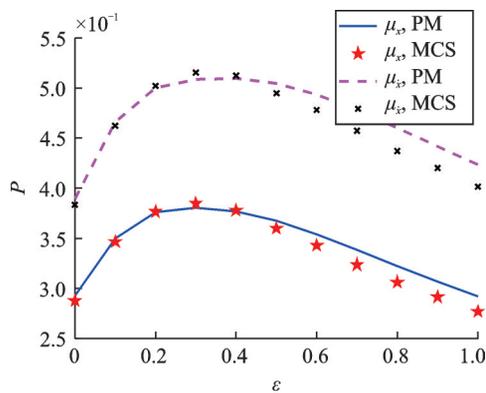


图 11 非线性强度对 Duffing 系统确定性响应平均功率的影响

Fig. 11 Averaged power of the deterministic response component of the Duffing system with different degrees of nonlinearity

低;速度标准差的时间平均在非线程度较小时略有升高,之后随非线性程度增加而减小。在所有非线性强度情况下,两种方法所得结果均吻合较好。

### 3.2.3 激励幅值的影响

为研究确定性激励幅值对此方法适用性的影

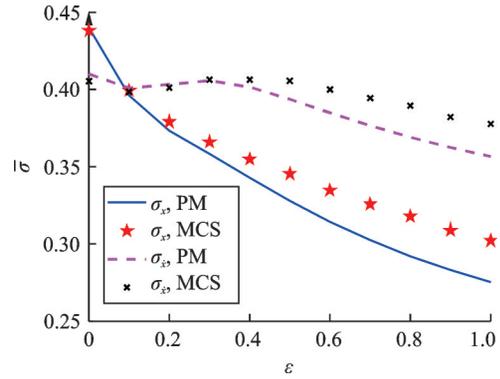


图 12 非线性强度对 Duffing 系统随机响应标准差时间平均的影响

Fig. 12 Time-averaged standard deviation of the stochastic response component of the Duffing system with different degrees of nonlinearity

响,保持其他参数不变,确定性激励幅值  $a_0$  取 0~2。本文所建议方法与蒙特卡洛模拟计算得到的确定性响应分量的平均功率对比如图 13 所示,时变标准差的时间平均值对比如图 14 所示。

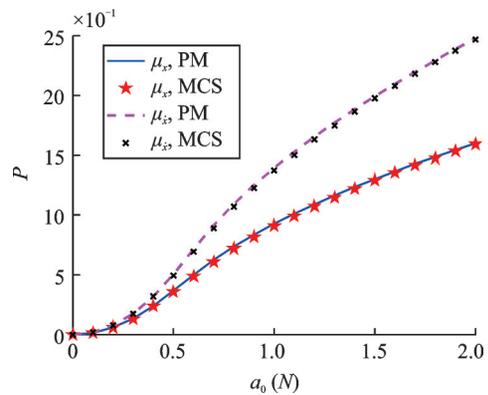


图 13 谐波激励幅值对 Duffing 系统确定性响应平均功率的影响

Fig. 13 Averaged power of the deterministic response component versus the harmonic excitation amplitude of the Duffing system

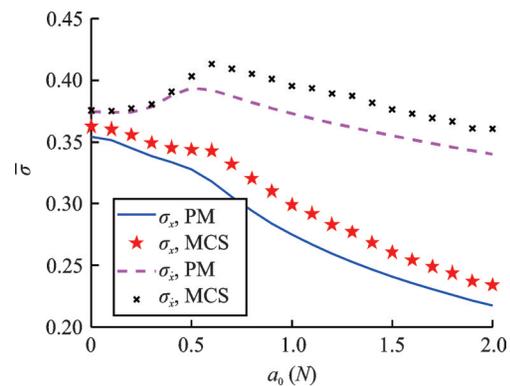


图 14 谐波激励幅值对 Duffing 系统随机响应标准差时间平均的影响

Fig. 14 Influence of the harmonic excitation amplitude on the time-averaged standard deviation of the Duffing system

由图 13, 14 可见, 在其他参数不变的情况下, 确定性响应平均功率随谐波激励幅值增大而增大; 位移标准差的时间平均随谐波激励幅值增大而减小, 速度标准差的时间平均随谐波激励幅值增大先增大后减小, 这一点与图 5 所示的随机激励为白噪声的情况有所不同。在所有确定性激励幅值的情况下, 两种方法所得的结果均吻合较好。

### 3.2.4 确定性谐和激励频率的影响

为研究确定性激励频率对此方法适用性的影响, 保持其他参数不变, 确定性激励频率  $\omega_0$  取 0.1~2 rad/s。本文所建议方法与蒙特卡洛模拟得到的确定性响应分量的平均功率对比如图 15 所示; 随机响应非平稳标准差的时间平均如图 16 所示。

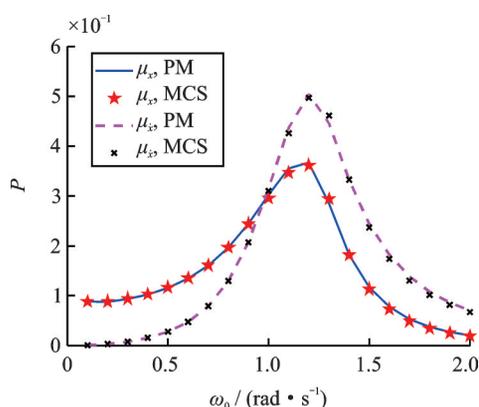


图 15 谐波激励频率对 Duffing 系统确定性响应平均功率的影响

Fig. 15 Influence of the harmonic excitation frequency on the averaged power of the deterministic response component

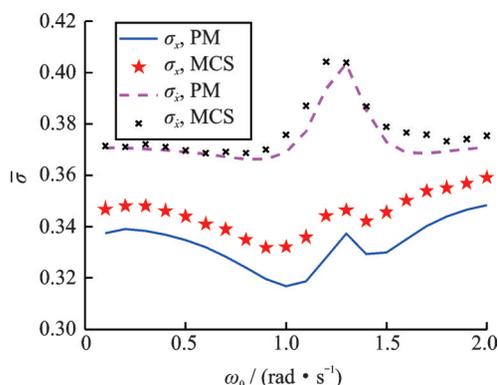


图 16 谐波激励频率对 Duffing 系统随机响应标准差时间平均的影响

Fig. 16 Influence of the harmonic excitation frequency on the time-averaged standard deviation of the response

可见, 谐波激励频率对确定性响应平均功率和随机响应标准差的时间平均有较大影响, 存在使它们达到极值的谐波激励频率。对于前者, 达到极值的频率为 1.2 rad/s; 对于后者, 达到极值的频率为

1.3 rad/s。此外, 不同激励频率下本文所建议方法与蒙特卡洛模拟所得结果均吻合较好。

综上所述, 对于 Duffing 系统在确定性谐波与随机激励联合作用下的响应, 本文所建议方法在不同参数设置的情况下, 均有良好的适用性。所建议方法的计算效率较蒙特卡洛模拟有显著优势。以调制白噪声与确定性激励联合作用下的响应计算为例, 所建议方法仅需 0.01 s, 而 10000 个样本的蒙特卡洛模拟需要 1.62 s, 效率提高 162 倍。

## 4 结论与展望

提出了一种用于求解确定性谐波与非平稳随机激励联合作用下, 单自由度非线性随机动力系统非平稳响应的统计线性化方法。首先, 将系统响应分解为确定性周期和零均值随机分量之和, 得到了与原非线性运动方程等效的、两个耦合的且分别以确定性和随机动力响应为未知量的非线性运动微分方程。随后, 利用非平稳统计线性化方法, 将得到的非线性随机运动方程化为了等效线性方程。最后, 同时考虑与等效线性随机微分方程对应的李雅普诺夫方程和谐波激励下的确定性运动方程, 利用数值方法联立求解了所有确定性未知量与随机未知量。蒙特卡洛模拟验证了此方法的适用性和精度。

数值算例表明, 无论随机噪声为调制白噪声或调制色噪声, 该方法均能准确地求解系统的确定性周期响应; 求解的随机动力响应分量的非平稳二阶矩也具有较好的精度。此外, 该方法适用于不同的参数设置情况。可进一步将该方法拓展应用于(多自由度)滞回非线性系统和分数阶非线性系统、(不可分)完全非平稳激励等情况。

### 参考文献:

- [1] Chen J, Kong F, Peng Y. A stochastic harmonic function representation for non-stationary stochastic processes [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2017, 96: 31-44.
- [2] 曹晖, 林学鹏. 地震动非平稳特性对结构非线性响应影响的分析 [J]. *工程力学*, 2006, 23(12): 30-35.  
Cao H, Lin X. The effect of non-stationary characteristic of earthquake ground motion on the structural nonlinear responses [J]. *Engineering Mechanics*, 2006, 23(12): 30-35.
- [3] Lin Y K, Yong Y. Evolutionary Kanai-Tajimi earth-

- quake models [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1987, 113(8): 1119-1137.
- [4] Priestley M B. Evolutionary spectra and non-stationary processes [J]. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B, Methodological*, 1965, 27(2): 204-229.
- [5] Yeh C H, Wen Y K. Modeling of non-stationary ground motion and analysis of inelastic structural response [J]. *Structural Safety*, 1990, 8(1): 281-298.
- [6] Wang J, Fan L, Qian S, et al. Simulations of non-stationary frequency content and its importance to seismic assessment of structures [J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2002, 31(4): 993-1005.
- [7] Spanos P D, Failla G. Evolutionary spectra estimation using wavelets [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2004, 130(8): 952-960.
- [8] Basu B, Gupta V K. Non-stationary seismic response of MDOF systems by wavelet transform [J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 1997, 26(12): 1243-1258.
- [9] 孔凡,李杰.非平稳随机过程功率谱密度估计的小波方法[J].*振动工程学报*,2013,26(3):418-428.  
Kong Fan, Li Jie. Power spectrum estimation of non-stationary processes via wavelet [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2013, 26(3): 418-428.
- [10] 孔凡,李杰.基于S变换的非平稳随机过程演变功率谱密度估计[J].*计算力学学报*,2014,31(4):438-445.  
Kong Fan, Li Jie. Stockwell transform based power spectrum estimation of non-stationary stochastic process [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2014, 31(4): 438-445.
- [11] Risken H. Fokker-Planck Equation [M]. Springer Berlin Heidelberg, 1996: 63-95.
- [12] 朱位秋,于金寿. Van der pol 振子对高斯白噪声的响应 [J]. *振动工程学报*, 1987, 1(1): 18-29.  
Zhu W, Yu J. The response of Van der pol oscillator to Gaussian white noise [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 1987, 1(1): 18-29.
- [13] 张明.非白噪声激励的非线性系统非平稳响应的一种计算方法[J].*振动工程学报*,1994,7(3):223-229.  
Zhang M. A calculating method for non-stationary response of non-linear systems subjected to non-white excitation [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 1994, 7(3): 223-229.
- [14] Crandall S H. Non-Gaussian closure for random vibration of non-linear oscillator [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1980, 15(4-5): 303-313.
- [15] Sobezyk K, Trebicki J. Maximum entropy principle in stochastic dynamics [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1990, 5(3): 102-110.
- [16] Li J, Chen J, Sun W, et al. Advances of the probability density evolution method for non-linear stochastic systems [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2012, 28(4): 132-142.
- [17] Spanos P D, Sofi A, Paola M D. Nonstationary response envelope probability densities of nonlinear oscillators [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2007, 74(2): 315-324.
- [18] Roberts J B, Spanos P D. *Random Vibration and Statistical Linearization* [M]. Dover Publications, 2003.
- [19] Wen Y K. Equivalent linearization for hysteretic systems under random excitation [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1980, 47(1): 150-154.
- [20] Spanos P T D. Formulation of stochastic linearization for symmetric or asymmetric MDOF nonlinear systems [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1980, 47(1): 209-211.
- [21] Iwan W D, Whirley R G. Nonstationary equivalent linearization of non-linear continuous systems [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1993, 8(3-4): 273-280.
- [22] Elishakoff I, Crandall S H. Sixty years of stochastic linearization technique [J]. *Meccanica*, 2016, 52(1): 299-305.
- [23] Hatchell B K, Mauss F J, Amaya I A, et al. Missile captive carry monitoring and helicopter identification using a capacitive microelectromechanical systems accelerometer [J]. *Structural Health Monitoring: An International Journal*, 2011, 11(2): 213-224.
- [24] Dai Q, Harné R L. Investigation of direct current power delivery from non-linear vibration energy harvesters under combined harmonic and stochastic excitations [J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2018, 29(4): 514-529.
- [25] Chang R J. Extension of nonlinear stochastic solution to include sinusoidal excitation- illustrated by Duffing oscillator [J]. *Journal of Computational & Nonlinear Dynamics*, 2017, 12(5): 51030.
- [26] Chen L C, Zhu W Q. Stochastic averaging of strongly non-linear oscillators with small fractional derivative damping under combined harmonic and white noise excitation [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2009, 56: 231-241.
- [27] Zhu H, Guo S. Periodic response of a duffing oscillator under combined harmonic and random excitations [J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2015, 137(4): 041015.
- [28] Zhang Y, Spanos P D. Efficient response determination of a M-D-O-F gear model subject to combined periodic

- and stochastic excitations [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2019, 120: 103378.
- [29] Spanos Pol D, Zhang Y, Kong F. Formulation of statistical linearization for M-D-O-F systems subject to combined periodic and stochastic excitations [J]. Journal of Applied Mechanics, 2019, 86: 101003.
- [30] 孔凡, 韩仁杰, 张远进, 等. 色噪声与确定性谐波联合激励下 Bouc-Wen 动力系统响应的统计线性化方法 [J]. 振动工程学报, 2022, 35(1): 82-92.
- [31] Li J, Chen J. Stochastic Dynamics of Structures [M]. John Wiley & Sons, 2009.
- Kong F, Han R, Zhang Y, et al. Stochastic response of a hysteresis system subjected to combined periodic and colored noise excitation via the statistical linearization method [J]. Journal of Vibration Engineering, 2022, 35(1): 82-92.

## Non-stationary response of non-linear systems subjected to combined periodic and non-stationary stochastic excitation via the statistical linearization method

KONG Fan<sup>1,2</sup>, HAN Ren-jie<sup>1</sup>, ZHANG Yuan-jin<sup>3</sup>

(1.School of Civil Engineering & Architecture, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China;

2.College of Civil Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China

3.School of Safety Science & Emergency Management, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China)

**Abstract:** A non-stationary statistical linearization method is proposed for determining the stochastic response of non-linear single-degree-of-freedom systems, subjected to the combined periodic and non-stationary stochastic excitation. Specifically, assuming the system response as a sum of a periodic and of a zero-mean stochastic component, leads two equivalent coupled differential equations, governing the deterministic and the stochastic component, respectively. The derived stochastic sub-equation under non-stationary zero-mean stochastic excitation is cast into an equivalent linear equation, by resorting to the non-stationary statistical linearization method. The related Lyapunov equation governing the second moment of the linear stochastic response, and the deterministic sub-equation governing the periodic response, are solved simultaneously using standard numerical algorithms. Pertinent Monte Carlo simulation demonstrates the applicability and accuracy of the proposed semi-analytical method.

**Key words:** non-stationary response; non-linear systems; statistical linearization; combined excitation; Runge-Kutta method; Monte Carlo simulation

**作者简介:** 孔凡(1984—),男,博士,副教授。E-mail: kongfan@hfut.edu.cn。