

# Levinson 微梁谐振器热弹性阻尼的广义热弹耦合分析

张志超<sup>1</sup>, 曹 静<sup>1</sup>, 高配峰<sup>2</sup>

(1. 扬州大学建筑科学与工程学院, 江苏 扬州 225127; 2. 兰州大学土木工程与力学学院, 甘肃 兰州 730000)

**摘要:** 本文基于 Levinson 梁理论和单向耦合的非傅里叶热传导理论, 在不同边界条件下研究了均匀微梁的热弹性阻尼 (thermoelastic damping, TED)。忽略温度的轴向梯度引起的热流, 给出了 Levinson 微梁横向自由振动的热弹性耦合微分方程, 与微梁不考虑热弹性阻尼时的自由振动方程进行比较, 从方程形式的相似性上得到了复频率的解析解, 进而求得了代表微梁结构热弹性阻尼的逆品质因子。在此基础上, 采用有限元方法计算了微梁结构考虑非傅里叶热传导时的逆品质因子, 并将有限元结果和理论分析结果进行了对比验证。通过数值计算结果定量分析了微梁的几何尺寸、边界条件以及频率阶数对微梁热弹性阻尼的影响规律。计算结果表明: 在不同频率阶数时, 微梁的热弹性阻尼最大值不变, 临界厚度均随着频率阶数的增大而减小; 不同边界条件下微梁热弹性阻尼最大值对应的临界厚度随着支座约束刚度的增大而减小; 忽略轴向的温度梯度引起的热流, 在梁尺寸较小时会带来一定误差。

**关键词:** 自由振动; 微梁; 热弹性阻尼; 非傅里叶热传导

**中图分类号:** O326 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2023)01-0076-10

**DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2023.01.009

## 引 言

随着集成电路技术的发展, 机电系统的微型化受到了广泛的关注。微(纳)机电系统 (Micro/Nano-Electro-Mechanical System, MEMS/NEMS) 由于其微型化、智能化、多功能、耗能少、集成度高等技术优势, 在医学仪器、航空航天、机械自动化、信息技术以及军事科技等众多领域, 有着十分广泛的应用前景<sup>[1-7]</sup>。微(纳)机电系统中主要的工作系统是谐振器, 而谐振器的力学模型一般可以简化成微(纳)尺度的梁<sup>[8-9]</sup>、板<sup>[10-12]</sup>或环<sup>[13-14]</sup>, 但谐振器的尺寸在微(纳)米量级时, 宏观上可以忽略的微弱效应, 如结构的热弹性阻尼, 会显现出来并对结构的力学性能产生重要影响。

热弹性阻尼 (TED) 是由谐振器在振动过程中拉伸和压缩产生的不可逆热流而引起的内摩擦。Zener<sup>[15-16]</sup>首次提出热弹性阻尼这个概念, 并系统研究了各向同性的热弹性矩形截面梁沿着厚度方向的弯曲振动, 通过解析的方法给出了热弹性阻尼的近似解。材料在受拉区域温度升高, 在受压

区域温度降低, 出现的温度差使热量从高温一侧流向低温一侧, 随着热传导过程的进行, 机械能转化为内能。这种能量转换过程造成系统整体熵的增大, 导致微梁振动周期内的机械能损失, 使得振动幅度逐渐衰减。当谐振器的尺寸达到微纳尺度时, 这种热弹性耦合的能量耗散会更加显著, 这将使得系统的效能显著降低。因此, TED 是决定谐振器热品质的重要因素, 对微结构的热弹性阻尼进行定量研究和评估, 了解热弹性阻尼的变化规律, 具有重要的现实指导作用。Lifshitz 等<sup>[17]</sup>在 Zener<sup>[15-16]</sup>模型的基础上建立了更合理的 Euler-Bernoulli 微梁热弹性阻尼分析模型, 通过复频率法给出了均匀材料微梁横向振动时频散关系解析式与精确的逆品质因子解。随后, 大量的学者采用不同解析方法和数值方法对微梁热弹性阻尼进行了深入研究<sup>[17-22]</sup>。

需指出的是, 由于微梁尺寸较小时自由振动的频率较大, 导致梁不同区域冷、热转变较快, 采用传统傅里叶热传导模型可能会带来误差。Guo 等<sup>[23-24]</sup>推导出微梁基于广义热弹性单相迟滞理论的热弹性阻尼解析解, 研究表明当梁的纵横比增加, 单相迟滞 TED 模型与经典模型之间的

收稿日期: 2021-05-23; 修订日期: 2021-11-12

基金项目: 江苏省基础研究计划青年项目(BK20180894); 国家自然科学基金青年项目(12102380)。

误差变大。Deng 等<sup>[25]</sup>对石墨烯纳米梁的热弹性阻尼进行了分析,考虑了热传导延滞效应和尺度效应,研究了长细比、松弛时间、热传导系数对热弹性阻尼的影响。文献[26-27]研究了广义热弹性理论下微梁谐振器的热弹性阻尼,分别考虑弛豫时间参数、梁厚对 TED 的影响。同时,经典的 Euler-Bemoulli 梁理论(EBT)适用于细长梁,描述长厚比较小的梁的自由振动时会带来一定的误差<sup>[28]</sup>。

本文针对 Levinson 微梁谐振器的热弹性阻尼特性,以广义热力耦合热传导理论研究厚度、边界条件以及特征频率阶数对微梁谐振器 TED 的影响规律。本文给出了基于广义热弹性理论的 Levinson 微梁谐振器的运动方程和热传导方程,在忽略梁沿轴线方向的热流的条件下得到了微梁的特征频率解析解;说明了采用有限元方法对这一热力耦合问题的求解过程;给出了金属镍(Ni)组成的微梁热弹性阻尼的解析解和有限元结果,分析比较了不同厚度、模态、边界条件对热弹性阻尼的影响并给出了部分结论。

## 1 基于非傅里叶热传导定理的 Levinson 梁热弹性阻尼解析解

### 1.1 运动方程

现有研究微梁的广义热弹性理论模型大都基于经典梁理论模型,较少考虑高阶剪切变形的影响,在梁长厚比较小时有必要考虑梁内部剪切变形对结构热弹性阻尼的影响。本文研究长度为  $l$  ( $0 \leq x \leq l$ ),截面高度为  $h$  ( $-h/2 \leq z \leq h/2$ ),宽度为  $b$  ( $-b/2 \leq y \leq b/2$ ) 的矩形截面弹性各向同性微梁的振动;由于各物理量在厚度方向上无变化,因此  $b$  可取为任意宽度,如图 1 所示。

在平衡状态下,梁没有应力、变形,并保持在均匀的参考温度  $T_0$ 。根据 Levinson<sup>[29]</sup>剪切变形理论,梁内部位移可以写为:

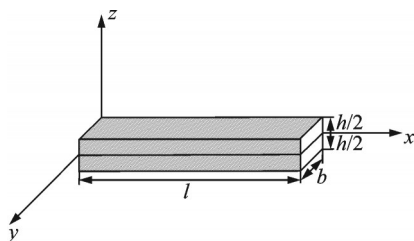


图 1 均匀材料梁的几何尺寸和直角坐标系

Fig. 1 Geometric dimensions and rectangular coordinate system of the homogeneous beam

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) + z\varphi(x, t) - \beta z^3 \left[ \frac{\partial w_0(x, t)}{\partial x} + \varphi(x, t) \right],$$

$$w(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (1)$$

式中  $t$  为时间;  $\varphi$  为横截面转角;  $u_0$  和  $w_0$  分别为梁几何中面  $x$  方向和  $z$  方向的位移;  $\beta = 4/(3h^2)$ 。

根据上述位移假设,可以得到应变为:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \beta z^3 \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (2a)$$

$$\gamma_{xz} = (1 - 3\beta z^2) \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi \right) \quad (2b)$$

式中  $\epsilon_x$  表示梁内任一点沿着  $x$  方向的正应变;  $\gamma_{xz}$  为切应变。

材料为线弹性,忽略温度和应力之间的弛豫时间,则考虑温度时梁横截面上正应力  $\sigma_x$  和切应力  $\tau_{xz}$  分别为:

$$\sigma_x = E(\epsilon_x - \alpha\theta), \quad \tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} \quad (3)$$

式中  $E$  和  $\nu$  分别为弹性模量和泊松比;  $\alpha$  为热膨胀系数;  $\theta = T - T_0$  表示温度的变化值,其中  $T$  表示瞬态温度场。

由平面应力问题的平衡方程在梁横截面上积分,可得合力形式的自由振动方程:

$$\frac{\partial F_N}{\partial x} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \quad (4a)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - F_s = I_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \alpha I_4 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi \right) \quad (4b)$$

$$\frac{\partial F_s}{\partial x} = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (4c)$$

式中  $F_N$  为轴力;  $F_s$  为剪力;  $M$  为等效力矩;  $I_0, I_2, I_4$  为惯性系数。这些物理量的定义分别为:

$$(F_N, M) = \int_A \sigma_x(1, z) dA, \quad F_s = \int_A \tau_{xz} dA, \quad I_0 = \int_A \rho dA, I_2 = \int_A \rho z^2 dA, I_4 = \int_A \rho z^4 dA, \text{ 其中, } \rho \text{ 为材料的质量密度。}$$

将式(3)和(4)代入内力计算公式之后,可以得到位移表示的轴力、弯矩、剪力分别为:

$$F_N = S_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} - F_{NT} \quad (5a)$$

$$M = S_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \beta S_4 \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - M_T \quad (5b)$$

$$F_s = S_{xz} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi \right) \quad (5c)$$

式中  $S_i = E \int_{-h/2}^{h/2} z^i dz$  ( $i=0, 2, 4$ ),  $S_{xz} =$

$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{2(1+\nu)}(1-3\beta z^2)dz$  为刚度系数。

热轴力  $F_{NT}$  和热弯矩  $M_T$  的定义为:

$$(F_{NT}, M_T) = \int_A E\alpha\theta(1, z) dA \quad (6)$$

将式(5)代入式(4)中,运动方程可以简化为位移形式的微分方程:

$$S_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{\partial F_{NT}}{\partial x} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \quad (7a)$$

$$S_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \beta S_4 \left( \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) - S_{xz} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi \right) - \frac{\partial M_T}{\partial x} = I_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \beta I_4 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi \right) \quad (7b)$$

$$S_{xz} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (7c)$$

利用式(7c)对方程(7b)进行消元整理,得到关于中面挠度  $w_0$  的微分方程:

$$S_2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \Phi_1 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} + \Phi_2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial t^4} + I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = 0 \quad (8)$$

式中  $\Phi_1 = \beta S_4 \frac{I_0}{S_{xz}} - \frac{S_2}{S_{xz}} I_0 - I_2$ ,  $\Phi_2 = \frac{I_0}{S_{xz}} (I_2 - \beta I_4)$ 。

## 1.2 热传导方程

经典的傅里叶热传导理论表明热流和温度梯度在同一时刻形成,两者之间没有时间差。非傅里叶热传导理论中的单相迟滞热传导模型考虑了热流的相位迟滞时间,而双相位迟滞热传导模型不仅考虑热流的相位迟滞时间,还考虑温度梯度的相位迟滞时间,因此双相位迟滞理论更具有普遍性。本文采用 Tzou 等<sup>[30]</sup>所提出的双相位迟滞非傅里叶热传导模型如下:

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t + \tau_q) = -\kappa \nabla T(\mathbf{r}, t + \tau_T) \quad (9)$$

式中  $T(\mathbf{r}, t + \tau_T)$  为瞬时温度场函数;  $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t + \tau_q)$  为热流矢量;  $t$  为时间;  $\mathbf{r}$  为位置矢量;  $\kappa$  为材料的热传导系数;  $\tau_q$  为热流的相位迟滞时间;  $\tau_T$  为温度梯度的相位迟滞时间。

Zhang 等<sup>[31]</sup>通过对  $\tau_T$  和  $\tau_q$  的数值拟合,发现二者的比值近似为 0.55,因此本文中取  $\tau_T = 0.55\tau_q$ , 其中,  $\tau_q = \frac{3\kappa}{v^2 \rho C_v}$ ,  $v$  表示声子速度,  $C_v$  为材料的恒压热容。为了计算方便,只取式(9)的一阶泰勒展开式,上式可改写为:

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) + \tau_q \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\kappa \left[ \nabla T(\mathbf{r}, t) + \tau_T \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] \quad (10)$$

根据熵变方程,热弹性各向同性物体的热流密度、温度和体积应变具有以下关系:

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} = \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{T_0 E \alpha}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (11)$$

式中  $e$  表示体积应变,  $e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z + 2(1+\nu)\alpha\theta$ 。

由温度改变引起的体积应变为  $2(1+\nu)\alpha\theta$ ,而在梁的振动过程中,体积应变造成的温度改变  $\theta$  要远远小于参考温度  $T_0$ ,温度变化引起的体积应变要远远小于梁机械振动引起的体积变形,因此可以忽略温度改变引起的体积应变,即  $e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ 。热弹耦合热传导可由式(10)和(11)导出:

$$\kappa \left( \nabla^2 \theta + \tau_T \frac{\partial \nabla^2 \theta}{\partial t} \right) = \rho C_v \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + \tau_q \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) + \alpha \frac{E}{1-2\nu} T_0 \left( \frac{\partial e}{\partial t} + \tau_q \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \right) \quad (12)$$

同时,假设沿梁厚度方向的热流要远远大于沿梁轴向的热流,那么,Levinson 梁的热传导方程可以改写为<sup>[15-17]</sup>:

$$\kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \kappa \tau_T \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) = \rho C_v \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + \tau_q \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) + \alpha \frac{E}{1-2\nu} T_0 \left( \frac{\partial e}{\partial t} + \tau_q \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \right) \quad (13)$$

温度边界条件为上下表面的绝热边界:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=\pm \frac{h}{2}} = 0 \quad (14)$$

## 1.3 特征频率的解析解

引入调和振动模式:

$$(u_0, w_0, \varphi, \theta) = (\bar{u}_0, \bar{w}_0, \bar{\varphi}, \bar{\theta}) e^{i\omega t} \quad (15)$$

振动方程和热传导方程可以简化为:

$$S_2 \frac{d^4 \bar{w}_0}{dx^4} - \omega^2 \Phi_1 \frac{d^2 \bar{w}_0}{dx^2} + \omega^2 \Phi_2 \bar{w}_0 + \frac{d^2 M_T}{dx^2} = 0 \quad (16a)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2} + K^2 \bar{\theta} = -K^2 \frac{\Delta_E}{\alpha} \left[ \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} z - \beta z^3 \left( \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial x^2} \right) \right] \quad (16b)$$

式中

$$K = i \sqrt{\frac{\rho C_v (i\omega - \omega^2 \tau_q)}{\kappa (1 + i\omega \tau_T)}}, \Delta_E = \frac{\alpha^2 E T_0}{\rho C_v} \quad (17)$$

对于热传导微分方程(16b),其边界条件亦为齐次的,因此可以由叠加法得到其通解为:

$$\bar{\theta} = A \sin(Kz) + B \cos(Kz) - \frac{\Delta_E}{\alpha} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x} - z \frac{\Delta_E}{\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\Delta_E \beta}{\alpha} \left( \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial x^2} \right) \left( z^3 - \frac{6}{K^2} z \right) \quad (18)$$

式中  $A, B$  为待定常数。 $\bar{\theta}$  应满足式(14)中上下表面的绝热边界条件,解得:

$$A = \frac{\frac{\Delta_E}{\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\Delta_E \beta}{\alpha} \left( \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial x^2} \right) \left( \frac{3}{4} h^2 - \frac{6}{K^2} \right)}{K \cos\left(K \frac{h}{2}\right)}, \quad B = 0 \quad (19)$$

由方程(4a)可知,在自由振动过程中忽略轴向惯性力时,可知轴力为常量。无论是简支边界、自由边界还是夹支边界,梁的轴向约束力均考虑为零。因此,可令  $F_N = 0$ ,由式(5a)得:

$$\frac{d\bar{u}_0}{dx} = E \Delta_E h \left( \eta_2 \frac{d^2 \bar{w}_0}{dx^2} - \frac{d\bar{u}_0}{dx} \right) \quad (20)$$

同时由式(7c)及方程(15)可得:

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dx} = -\omega^2 \frac{I_0}{S_{xz}} \bar{w}_0 - \frac{d^2 \bar{w}_0}{dx^2} \quad (21)$$

可得方程通解为:

$$\bar{\theta} = \frac{\Delta_E}{\alpha} \left\{ -\frac{d\bar{u}_0}{dx} + \omega_0 \left[ \eta_1 \sin(Kz) + \omega^2 \frac{I_0}{S_{xz}} z - \beta \omega^2 \frac{I_0}{S_{xz}} \left( z^3 - \frac{6}{K^2} z \right) \right] + \frac{d^2 \bar{w}_0}{dx^2} (\eta_2 + z) \right\} \quad (22)$$

式中

$$\eta_1 = \frac{\left[ \beta \left( \frac{3}{4} h^2 - \frac{6}{K^2} \right) - 1 \right] \omega^2 \frac{I_0}{S_{xz}}}{K \cos\left(K \frac{h}{2}\right)}, \quad \eta_2 = -\frac{1}{K \cos\left(K \frac{h}{2}\right)}$$

将式(22)代入运动方程(17a),可以得到:

$$\frac{d^4 \bar{w}_0}{dx^4} + \frac{(\psi_2 - \omega^2 \Phi_1)}{S_2} \frac{d^2 \bar{w}_0}{dx^2} + \frac{(\omega^4 \Phi_2 - I_0 \omega^2 + \psi_1)}{S_2} \bar{w}_0 = 0 \quad (23)$$

式中

$$\psi_1(\omega) = E \Delta_E \left[ \frac{\eta_1}{K} \left( \frac{1}{K} \sin\left(\frac{Kh}{2}\right) - \frac{h}{2} \cos\left(\frac{Kh}{2}\right) \right) + \omega^2 \frac{I_0 h^3}{12 S_{xz}} - \omega^2 \beta \frac{I_0}{S_{xz}} \left( \frac{h^5}{80} - \frac{h^3}{2K^2} \right) \right] \quad (24a)$$

$$\psi_2(\omega) = E \Delta_E \frac{h^3}{12} \quad (24b)$$

上述方程可以改写为:

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} - \lambda_1 \right) \left( \frac{d^2}{dx^2} - \lambda_2 \right) \bar{w}_0 = 0 \quad (25)$$

可以解得:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\psi_2 - \omega^2 \Phi_1}{S_2} + \sqrt{\left[ \frac{(\psi_2 - \omega^2 \Phi_1)}{S_2} \right]^2 - 4 \frac{\omega^4 \Phi_2 - I_0 \omega^2 + \psi_1}{S_2}} \right\} \quad (26a)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\psi_2 - \omega^2 \Phi_1}{S_2} - \sqrt{\left[ \frac{(\psi_2 - \omega^2 \Phi_1)}{S_2} \right]^2 - 4 \frac{\omega^4 \Phi_2 - I_0 \omega^2 + \psi_1}{S_2}} \right\} \quad (26b)$$

同时,相同材料的均匀 Euler-Bernoulli 梁的自由振动方程为:

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} - \bar{\omega}_0 \right) \left( \frac{d^2}{dx^2} + \bar{\omega}_0 \right) \bar{w}_0 = 0 \quad (27)$$

对于简支边界的 Levinson 梁,在方程形式类似的条件下,其边界条件的数学形式和 Euler-Bernoulli 梁在简支边界条件下相同。很显然对于两种梁模型能够得到相同的复特征值。实际上,对于简支边界的 Euler-Bernoulli 梁和 Levinson 梁,至少能找到一个相同的特征值。因此,在简支边界条件下方程(27)和(25)的复特征值有如下关系<sup>[32-33]</sup>:

$$\lambda_1 = \bar{\omega}_0 \text{ 或 } \lambda_2 = \bar{\omega}_0 \quad (28)$$

根据方程(28),可以解得唯一结果:

$$\omega = \left[ \frac{I_0 + \Phi_1 \bar{\omega}_0}{2 \Phi_2} \pm \sqrt{\left( \frac{I_0 + \Phi_1 \bar{\omega}_0}{2 \Phi_2} \right)^2 - \frac{\psi_2 \bar{\omega}_0 + \psi_1}{\Phi_2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (29)$$

对于其他边界条件的 Euler-Bernoulli 梁和 Levinson 梁,由于 Levinson 梁考虑了高阶剪切变形,轴向位移、挠度、转角之间相互耦合,除两边简支边界条件,其他边界条件的数学形式无法完全解耦,因此式(28)在其他边界条件下并不完全成立。对式(21)积分可知,均匀 Levinson 梁的转角  $\bar{\varphi}$  与  $\bar{w}'$  相差一个惯性项  $(-\omega^2 \frac{I_0}{S_{xz}} \bar{w}_0)$ ,此惯性项与梁的振动频率和挠度相关<sup>[33]</sup>:当梁振动频率和变形较大时,惯性项的影响更为显著;振动频率较低或变形较小时惯性项的影响可以忽略不计。当梁边界约束较强或振动模态阶数较高,梁自由振动的频率较大,此时如采用式(28)会带来一定的误差。但是对于梁的低阶振



动模态,在平衡位置附近振动时,各位移分量和振动频率均相对较小,此时可忽略截面上惯性力引起的转角增量,在边界上近似认为梁的转角 $\bar{\varphi} \approx \bar{\omega}'$ 。因此,对于梁的低阶模态,可以近似认为Levinson梁边界条件与Euler-Bernoulli梁边界条件形式相同,式(28)近似成立。

方程(29)为关于特征频率 $\omega$ 的隐式方程,在计算过程中可将等号右边隐含的 $\omega$ 以 $\omega_0$ 近似代替以简化计算过程,求解过程中需注意 $\omega$ 实部为正。根据复频率方法,均匀Levinson微梁的逆品质因子解析解可以表示为:

$$Q^{-1} = 2 \frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)} \quad (30)$$

## 2 自由振动微梁热弹性阻尼的有限元求解

本文建立的三维有限元模型,根据G-L广义热弹性理论的本构关系,各向同性材料的应变分量 $\epsilon_{ij}$ 与应力分量 $\sigma_{ij}$ 和温度的增量有关:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}] + \alpha(\theta + \tau\dot{\theta})\delta_{ij} \quad (31a)$$

式中 $\tau$ 为温度和热应变之间的弛豫时间; $\sigma_{kk}$ 表示主应力之和; $\delta_{ij}$ 为Kronecker函数。

考虑到弛豫时间和谐振器的振动周期相比较小,可以将式(31a)简化为:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}] + \alpha\theta\delta_{ij} \quad (31b)$$

式(31b)为本文求解的热力耦合本构关系。现有有限元软件中,均内置有类似的模块解决此类热弹性问题。考虑简谐振动时,温度改变量 $\theta$ 满足:

$$\theta(x, y, z, t) = \bar{\theta}(x, y, z)e^{i\omega t} \quad (32a)$$

此时三维热传导方程可以写为如下特征方程:

$$\kappa(\theta_{,ii} + i\tau\omega\theta_{,ii}) = \rho C_v(i\omega\theta - \tau_q\omega^2\theta) + \alpha \frac{E}{1 - 2\nu} T_0(i\omega e - \omega^2\tau_q e) \quad (32b)$$

式中 $\theta_{,ii}$ 为三个空间坐标方向的三阶导数之和。

由于现有商业软件中没有广义热传导模块,故无法进行有关广义热传导问题的计算。本文拟在商业软件的基础上进行二次开发以实现广义热传导问题的计算。利用Comsol软件建立梁长为 $l$ ,梁厚为 $h$ ,梁宽为 $b$ 的三维微梁模型并定义微梁材料性质参数,采用软件内部内置的固体力学和偏微分方程模块共同实现这一特征值问题的求解。微梁不同的边界条件可通过设置微梁两端的约束和位移条件实现。如简支约束时(simply supported constraint, S),

可通过约束微梁一端截面中性轴的位移为零实现;夹支约束时(clamped supported constraint, C),通过设置微梁两端截面的位移为零实现,自由端(free supported constraint, F)边界受力为零。

微梁非傅里叶热传导热弹性耦合问题通过选取Comsol软件中固体力学模块与系数形式偏微分方程模块,将求解多场问题转化为求解方程组问题。在采用Comsol求解这一方程组的特征频率 $\omega$ 之后,我们可以根据复频率法得到表征结构热弹性阻尼大小的物理量逆品质因子 $Q^{-1}$ 。图2给出了梁长 $l=300 \mu\text{m}$ ,梁厚 $h=20 \mu\text{m}$ ,梁宽 $b=5 \mu\text{m}$ 的均匀材料Ni微梁在两端简支时有限元软件中的网格划分示意图,其中完整网格包含950个域单元,求解的自由度数为39952个。

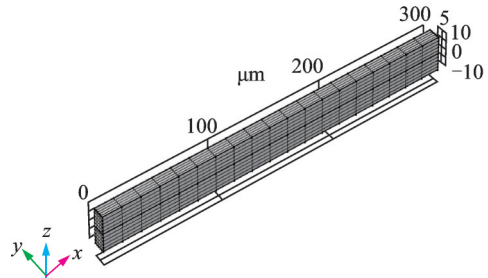


图2 两端简支(S-S)均匀材料镍(Ni)微梁在有限元软件中的网格划分示意图(单位: $\mu\text{m}$ )

Fig. 2 Schematic diagram of meshing of homogeneous material nickel (Ni) micro beam with simply supported (S-S) in finite element software (Unit:  $\mu\text{m}$ )

## 3 数值结果分析与讨论

考虑微梁材料为金属镍(Ni),表1给出了镍(Ni)的材料参数。本节将采用解析方法和有限元方法讨论不同约束条件下微梁热弹性阻尼随厚度改变而变化的规律。

表1 金属镍(Ni)的材料参数( $T_0=300 \text{ K}$ )

Tab. 1 Material parameters of metallic nickel (Ni) ( $T_0=300 \text{ K}$ )

$E/\text{GPa}$	$\rho/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	$\kappa/(\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1})$	$C_v/(\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1})$	$\alpha/(10^{-6}\text{K}^{-1})$	$\nu$
210	8900	92	438.2	13.0	0.30

图3给出了均匀材料镍(Ni)微梁在两端夹支(C-C)边界条件下一阶振动模态有限元软件Comsol的计算结果示例。示例中梁长 $l=300 \mu\text{m}$ ,梁厚 $h=20 \mu\text{m}$ ,梁宽 $b=5 \mu\text{m}$ 。通过有限元软件计算得到结

构振动时的一阶模态,从图中色彩深浅可以看出微梁振动时的一阶模态温度变化情况。图中箭头表示热流矢量,可以看出热流矢量不仅有沿梁厚度方向的分量,同时还有沿梁轴向的分量。同时可以看出,在梁拉应变的区域温度下降,梁受到压应变的区域温度升高。由于温度梯度的存在,导致热量从高温区域向低温区域的转移,从而导致梁机械能的耗散。

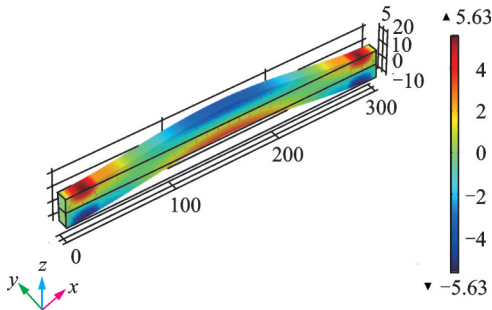


图 3 两端夹支(C-C)均匀材料镍(Ni)微梁在一阶振动模态下有限元模拟结果(单位:μm)

Fig. 3 Finite element simulation results of homogeneous nickel (Ni) micro beam with both ends clamped supported (C-C) in the first-order vibration mode(Unit:μm)

对于均质镍(Ni)微梁的TED,将基于Levinson微梁的广义热弹性理论下TED的解析解与三维非傅里叶热传导模型有限元计算结果进行比较。图4~7分别给出了两端简支(S-S)、两端夹定(C-C)、一端夹定一端简支(C-S)、一端夹定一端自由(C-F)这四种边界条件下微梁在前三阶模态下振动时的逆品质因子 $Q^{-1}$ 随梁厚 $h$ 的变化曲线,在计算时固定梁的长度为300 μm。从图4~7可以看出,解析解模型的计算结果与有限元模型的计算结果吻合较好,这也互相验证了两种求解方法的可靠性。两种理论的计算结果均可以看出,微梁在不同边界和不同振动模态下的TED具有类似的变化规律,即热弹性阻尼随厚度的增大先增加达到最大值后再减小。将TED最大值对应的微梁厚度称为临界厚度,可以看出临界厚度随振动模态阶数的增加而减小,在低阶模态时同样厚度的梁复频率相对较小,此时梁在较大厚度时达到热弹性阻尼最大值;而高阶模态的复频率较大,可以在较小的厚度达到热弹性阻尼的极值。同一边界条件下前三阶模态阶数的热弹性阻尼最大值对应的临界厚度,从大到小依次排序为:一阶、二阶、三阶。

图8~10分别给出了一阶模态、二阶模态和三阶模态下,基于Levinson微梁的广义热弹性模型的解析近似解与有限元计算结果在四种不同边界下微

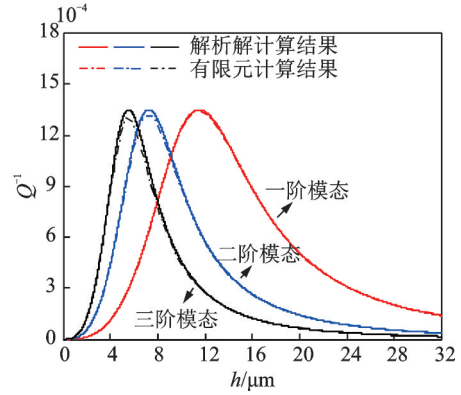


图 4 前三阶模态下均匀材料镍(Ni)微梁热弹性阻尼解析解与有限元解随厚度的变化曲线(S-S)

Fig. 4 Variation curve of thermoelastic damping analytical results and finite element results with thickness of homogeneous nickel (Ni) micro beam in the first three modes (S-S)

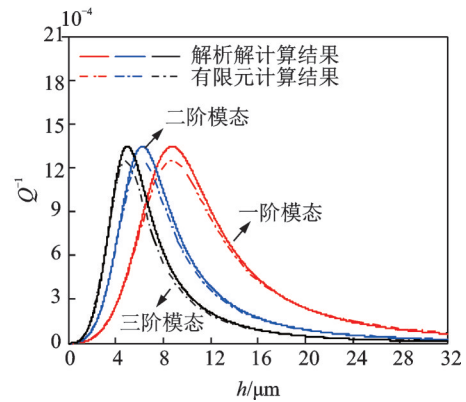


图 5 前三阶模态下均匀材料镍(Ni)微梁热弹性阻尼解析解与有限元解随厚度的变化曲线(C-C)

Fig. 5 Variation curve of thermoelastic damping analytical results and finite element results with thickness of homogeneous nickel (Ni) micro beam in the first three modes (C-C)

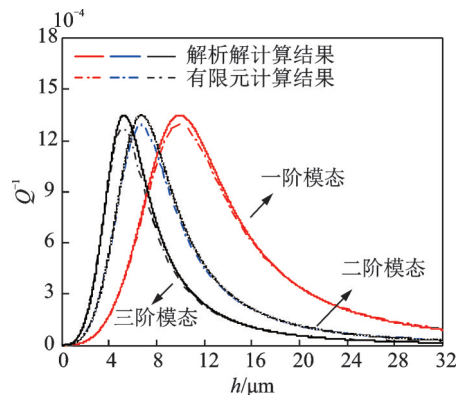


图 6 前三阶模态下均匀材料镍(Ni)微梁热弹性阻尼解析解与有限元解随厚度的变化曲线(C-S)

Fig. 6 Variation curve of thermoelastic damping analytical results and finite element results with thickness of homogeneous nickel (Ni) micro beam in the first three modes (C-S)

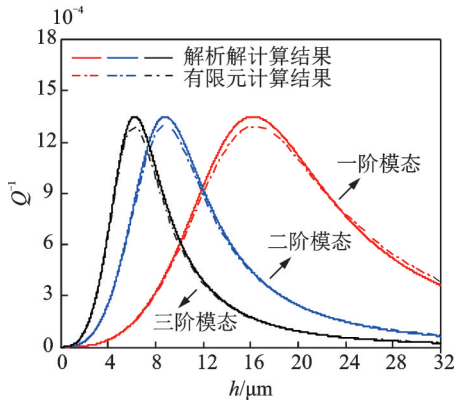


图7 前三阶模态下均匀材料镍(Ni)微梁热弹性阻尼解析解与有限元解随厚度的变化曲线(C-F)

Fig. 7 Variation curve of thermoelastic damping analytical results and finite element results with thickness of homogeneous nickel (Ni) micro beam in the first three modes (C-F)

梁热弹性阻尼随厚度的变化曲线。可以看出,计算结果中热弹性阻尼的最大值不受边界条件和模态阶数的影响。在同阶模态下,不同边界条件所得到的热弹性阻尼最大值所对应的临界厚度均不同,当约束为S-S时热弹性阻尼最大值对应厚度最大,约束为C-C时热弹性阻尼对应临界厚度最小,而C-F和C-S两种边界下临界厚度在两者之间。这四种边界条件下,当研究微梁的几何尺寸相同时,两端夹支(C-C)时微梁受到的边界约束最强,微梁的临界厚度最小;而一端夹支一端自由时(C-F)微梁受到的边界约束仅次于两端夹支的情况,微梁的临界厚度大于两端夹支的情况;当减小边界约束刚度,边界条件依次改为两边简支(S-S)、一端夹支一端简支(C-S)时,热弹性阻尼对应的临界厚度也随之增大。可以看出,微梁临界厚度随边界约束刚度增大而逐渐减小,临界厚度从小到大依次为:C-C, C-S, S-S, C-F。不同边界条件下热弹性阻尼峰值所对应的临界厚度均随着频率阶数的增加而减小,且对应的临界厚度逐渐靠近。

图11给出了两端夹支的金属镍(Ni)微梁在给定长厚比 $l/h=10$ 时,逆品质因子 $Q^{-1}$ 随梁厚 $h$ 的变化曲线。从图中可以看出,当梁厚度大于 $16\mu\text{m}$ 时,两种模型得到的热弹性阻尼结果虽有一定的误差,但仍可接受;当梁厚度小于 $16\mu\text{m}$ 时,有限元模型的计算结果逐渐偏离解析结果,随着梁厚度的进一步降低,误差也随之增大。主要原因是在解析解的推导过程中假设梁轴向的温度梯度很小,忽略了梁沿轴向的热流。本论文给出的是基于准一维热传导方程的广义热传导理论的解析解,而有限元方法求解的方程是三维的热弹性耦合控制方程,并没有引入额外假设。这也说明,忽略轴向的温度梯度引起的热

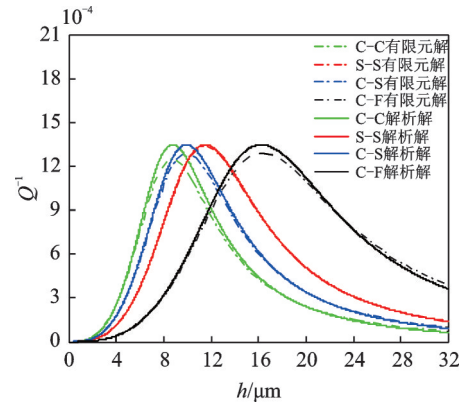


图8 一阶模态时均匀材料镍(Ni)微梁不同边界条件下热弹性阻尼随厚度的变化曲线

Fig. 8 Variation curve of thermoelastic damping with thickness of homogeneous nickel (Ni) micro beam under different boundary conditions in the first mode

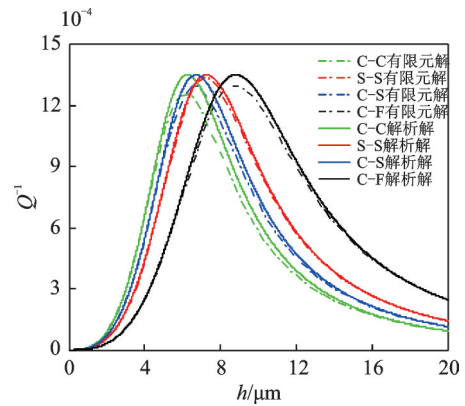


图9 二阶模态时均匀材料镍(Ni)微梁在不同边界条件下热弹性阻尼随厚度的变化曲线

Fig. 9 Variation curve of thermoelastic damping with thickness of homogeneous nickel (Ni) micro beam under different boundary conditions in the second mode

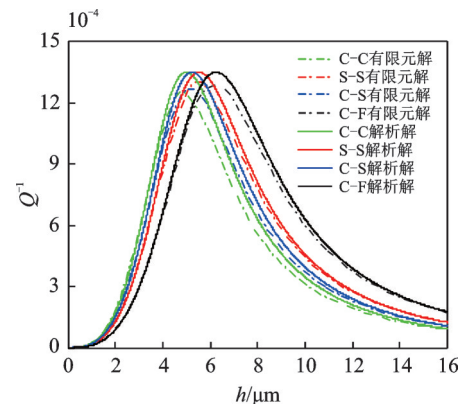


图10 三阶模态时均匀材料镍(Ni)微梁在不同边界条件下热弹性阻尼随厚度的变化曲线

Fig. 10 Variation curve of thermoelastic damping with thickness of homogeneous nickel (Ni) micro beam under different boundary conditions in the third mode

流在梁尺寸较小时会带来一定的误差。

为了进一步明确不同边界条件和模态对逆品质



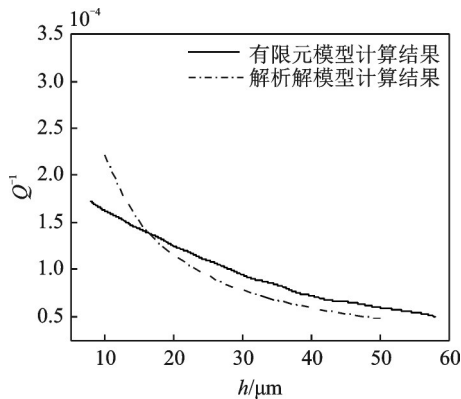


图 11 固定长厚比  $l/h=10$  时金属镍(Ni)在不同情况下热弹性阻尼  $Q^{-1}$  随厚度  $h$  变化(C-C)

Fig. 11 Variation of thermoelastic damping  $Q^{-1}$  with the thickness  $h$  of metallic nickel (Ni) under different conditions when fixed length thickness ratio  $l/h=10$  (C-C)

因子  $Q^{-1}$  最大值的影响规律,表 2 给出了不同情况下

表 2 不同边界条件、模态下  $Q^{-1}(\times 10^3)$  最大值的解析解和有限元结果

Tab. 2 Analytical solutions and finite element results of the maximum value of  $Q^{-1}(\times 10^3)$  under different boundary conditions and vibration modes

边界条件	1st mode			2nd mode			3rd mode		
	解析解	FEM	相对误差/%	解析解	FEM	相对误差/%	解析解	FEM	相对误差/%
S-S	1.3519	1.3423	0.71	1.3483	1.3101	2.91	1.3449	1.3004	3.42
C-C	1.3489	1.2558	7.41	1.3486	1.2592	7.10	1.3485	1.2516	7.74
C-S	1.3500	1.2926	4.44	1.3500	1.2935	4.37	1.3468	1.2870	4.65
C-F	1.3500	1.2894	4.70	1.3500	1.2957	4.20	1.3468	1.2894	4.45

## 4 结 论

本文基于广义热传导理论,推导了采用非傅里叶热传导模型时均质 Levinson 微梁的热弹耦合运动方程和热传导方程,给出了 Levinson 微梁振动时复频率的解析近似计算方法,通过得到的复频率求出热弹性阻尼的逆品质因子。针对金属镍(Ni)构成的均质微梁,在得到运动方程和热传导方程的基础上进行有限元建模分析,通过对比解析解与有限元结果之间的差异,验证了模型的准确性,研究了不同几何尺寸、边界条件和振动模态等因素对微梁热弹性阻尼的影响。研究发现,热弹性阻尼最大值所对应的厚度(临界厚度)随着模态阶数的增大而逐渐减小;相同频率阶数下,微梁临界厚度随边界约束刚度增大而逐渐减小,在 S-S, C-C, C-F 和 C-S 这四种边界条件下,当微梁为 C-F 边界时临界厚度最大,微梁为 C-C 边界时微梁临界厚度最小, C-F 和 C-S 边界得到的微梁临界厚度位于两者之间。本文将解析解与有限元模拟结果对比发现两者相差不大,说明这

$Q^{-1}$  最大值的解析解和有限元方法的结果对比,并给出了两种结果的相对误差。从表 2 中可以看出,均质 Ni 微梁热弹性阻尼最大值的解析方法预测结果在  $1.35 \times 10^{-3}$  附近,其最大值预测结果并不受边界条件以及梁模态阶数的影响,这与现有文献中的结论类似<sup>[28,34]</sup>。解析结果与有限元结果相比,有限元分析得到的  $Q^{-1}$  最大值偏小,最小相对误差为 0.71%,最大相对误差为 7.74%,进一步说明本文所述方法的可行性。在四种不同类型的边界条件中,两边简支梁相对误差最小,两边夹支梁相对误差较大。可以看出,随着边界约束刚度的增加,采用式(28)得到的结果与有限元结果误差逐渐增大。这主要是由于在利用式(28)的关系计算特征频率时,式(28)在两边简支的情况外均为近似成立, Euler-Bernoulli 梁和 Levinson 梁在两边夹支边界条件下的数学表达式差异最大,给计算结果带来了误差。

两种求解方法在一定使用范围内均能够准确预测微梁热弹性阻尼,基于广义热传导模型的解析近似方法中对热传导方程的准一维简化是可行的,但是在梁尺寸较小时可能带来误差。

## 参考文献:

- [1] Zhang H L, Kim T, Choi G, et al. Thermoelastic damping in micro- and nanomechanical beam resonators considering size effects[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2016, 103: 783-790.
- [2] Lin S M. Analytical solutions for thermoelastic vibrations of beam resonators with viscous damping in non-Fourier model[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2014, 87: 26-35.
- [3] Seymour J P, Wu F, Wise K D, et al. State-of-the-art MEMS and microsystem tools for brain research[J]. Microsystems & Nanoengineering, 2017, 3(1): 16066.
- [4] Tai Y P, Li P, Zuo W L. An entropy based analytical model for thermoelastic damping in micromechanical resonators [J]. Applied Mechanics and Materials, 2012, 1706(159): 46-50.



- [5] Nourmohammadi Z, Prabhakar S, Vengallatore S. Thermoelastic damping in layered microresonators: critical frequencies, peak values, and rule of mixture[J]. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2013, 22(3):747-754.
- [6] Hendou R H, Mohammadi A K. Transient analysis of nonlinear Euler-Bernoulli micro-beam with thermoelastic damping, via nonlinear normal modes[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, 333(23): 6224-6236.
- [7] Fernández L J, Wiegerink R J, Flokstra J, et al. A capacitive RF power sensor based on MEMS technology [J]. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2006, 16(7):1099-1107.
- [8] Guo X, Yi Y B. Suppression of thermoelastic damping in MEMS beam resonators by piezoresistivity[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, 333(3): 1079-1095.
- [9] Li S R, Xu X, Chen S. Analysis of thermoelastic damping of functionally graded material beam resonators[J]. *Composite Structures*, 2017, 182: 728-736.
- [10] Grover D. Damping in thin circular viscothermoelastic plate resonators [J]. *Canadian Journal of Physics*, 2015, 93(12): 1597-1605.
- [11] Fang Y M, Li P, Zhou H Y, et al. Thermoelastic damping in rectangular microplate resonators with three-dimensional heat conduction[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2017, 133: 578-589.
- [12] Zuo W L, Li P, Zhang J R, et al. Analytical modeling of thermoelastic damping in bilayered microplate resonators [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2016, 106: 128-137.
- [13] Youssef H M, El-Bary A A. The reference temperature dependence of Young's modulus of two-temperature thermoelastic damping of gold nano-beam[J]. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 2018, 22(4): 435-445.
- [14] Li S R, Ma H K. Analysis of free vibration of functionally graded material micro-plates with thermoelastic damping[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2020, 90(6): 1285-1304.
- [15] Zener C. Internal friction in solids I: theory of internal friction in reeds [J]. *Physical Review*, 1937, 52(3): 230-235.
- [16] Zener C. Internal friction in solids II: general theory of thermoelastic internal friction [J]. *Physical Review*, 1938, 53(1): 90-99.
- [17] Lifshitz R, Roukes M L. Thermoelastic damping in micro- and nanomechanical systems [J]. *Physical Review B*, 2000, 61(8): 5600-5609.
- [18] Kakhki E K, Hosseini S M, Tahani M. An analytical solution for thermoelastic damping in a micro-beam based on generalized theory of thermoelasticity and modified couple stress theory [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2016, 40(4): 3164-3174.
- [19] Emami A A, Alibeigloo A. Exact solution for thermal damping of functionally graded Timoshenko microbeams [J]. *Journal of Thermal Stresses*, 2016, 39(2): 231-243.
- [20] Li P, Zhou H Y, Yang L F. Effect of boundary conditions on thermoelastic damping in microbeam resonators with exponentially varying thickness [A]. *Proceedings of 5th International Conference on Control, Automation and Robotics (ICCAR) [C]*. Beijing: Thermoelastic Damping, 2019: 8813357.
- [21] Borjalilou V, Asghari M. Size-dependent analysis of thermoelastic damping in electrically actuated microbeams[J]. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2021, 28(9): 952-962.
- [22] Kakhki E K, Hosseini S M, Tahani M. An analytical solution for thermoelastic damping in a micro-beam based on generalized theory of thermoelasticity and modified couple stress theory [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2016, 40(4): 3164-3174.
- [23] Guo F L. Thermo-elastic dissipation of microbeam resonators in the framework of generalized thermo-elasticity theory [J]. *Journal of Thermal Stresses*, 2013, 36(11): 1156-1168.
- [24] Guo F L, Wang G Q, Rogerson G A. Analysis of thermoelastic damping in micro-and nanomechanical resonators based on dual-phase-lagging generalized thermoelasticity theory [J]. *International Journal of Engineering Science*, 2012, 60: 59-65.
- [25] Deng W M, Li L, Hu Y J, et al. Thermoelastic damping of graphene nanobeams by considering the size effects of nanostructure and heat conduction [J]. *Journal of Thermal Stresses*, 2018, 41(9):1182-1200.
- [26] Kumar R, Kumar R. A study of thermoelastic damping in micromechanical resonators under unified generalized thermoelasticity formulation[J]. *Noise & Vibration Worldwide*, 2019, 50(6): 169-175.
- [27] Kumar H, Mukhopadhyay S. Thermoelastic damping in micro and nano-mechanical resonators utilizing entropy generation approach and heat conduction model with a single delay term [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2020, 165: 105211.
- [28] Vengallatore S. Analysis of thermoelastic damping in laminated composite micromechanical beam resonators [J]. *Journal of Micromechanics & Microengineering*, 2005, 15(12): 2398-2404.
- [29] Levinson M. A new rectangular beam theory [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1981, 74(1): 81-87.
- [30] Tzou D Y, Zhang Y S. An analytical study on the fast-transient process in small scales [J]. *International Jour-*

- nal of Engineering Science, 1995, 33(10): 1449-1463.
- [31] Zhang J C, Huang X P, Yue Y N, et al. Dynamic response of graphene to thermal impulse[J]. Physical Review B, 2011, 84: 235416.
- [32] 王瑄, 李世荣. 功能梯度 Levinson 梁自由振动响应的均匀化和经典化表示[J]. 振动与冲击, 2017, 36(18): 70-77.
- Wang X, Li S R. Homogenized and classical expression for the response of free vibration of simply supported FGM Levinson beams [J]. Journal of Vibration and Shock, 2017, 36(18): 70-77.
- [33] 王瑄. Levinson 理论下功能梯度梁板结构的自由振动分析[D]. 扬州: 扬州大学, 2017.
- Wang X. Free vibration analysis of functionally graded material beam and plate structures based on the Levinson theory[D]. Yangzhou: Yangzhou University, 2017.
- [34] Bishop J E, Kinra V K. Elastothermodynamic damping in laminated composites[J]. International Journal of Solids and Structures, 1997, 34(9): 1075-1092.

## Generalized thermoelastic coupling analysis of thermoelastic damping of Levinson micro beam resonator

ZHANG Zhi-chao<sup>1</sup>, CAO Jing<sup>1</sup>, GAO Pei-feng<sup>2</sup>

(1.School of Civil Science and Engineering, Yangzhou University, Yangzhou 225127, China;

2.College of Civil Engineering and Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China)

**Abstract:** Based on Levinson beam theory and unidirectional coupled non-Fourier heat conduction theory, the thermoelastic damping (TED) of uniform micro beams with different boundary conditions was studied. Neglecting the heat flow caused by the axial gradient of temperature, the differential equation of free vibration of Levinson micro-beam was given. According to the similarity of equation forms, the analytical solution of characteristic frequency is obtained, and then the inverse quality factor representing the TED of micro-beam structure was obtained. Then, the inverse quality factor of the micro beam structure considering the non-Fourier heat conduction was calculated by the finite element method, and the finite element results are compared with the theoretical analysis results. Based on the numerical results, the influence of the geometric size, boundary conditions and vibration mode of the micro-beam on the TED were analyzed quantitatively. The results show that: when the micro-beam vibrates at different frequency orders, the maximum value of TED remains unchanged and the critical thickness decrease with the increase of the order of vibration mode; Under different boundary conditions, the critical thickness corresponding to the maximum TED of the micro-beam decreases with the increase of the constraint stiffness of the support; Ignoring the heat flux caused by the axial temperature gradient will bring some errors when the beam size is small.

**Key words:** free vibration; micro beam; thermoelastic damping; non-Fourier heat conduction

作者简介: 张志超(1988—),男,博士,讲师。电话: 18952786493; E-mail: zhangzhch@yzu.edu.cn。