

两自由度碰撞振动系统的两参数非光滑分岔

吕小红^{1,2}, 张开成¹, 朱喜锋¹, 罗冠炜²

(1. 兰州交通大学机电工程学院, 甘肃 兰州 730070;

2. 甘肃省轨道交通装备系统动力学与可靠性重点实验室, 甘肃 兰州 730070)

摘要: 考虑塑性碰撞工况的两自由度振动系统, 分析系统非光滑分岔的条件, 辨识系统在两参数平面的周期运动模式及存在域, 研究相邻周期运动的分岔特征及存在于(1, 0, 0)运动与(1, 1, 0)运动之间的迟滞域和亚谐包含域的动力学, 揭示碰撞振动系统的余维一穿越、切换和多滑动分岔及余维二滑动分岔行为。塑性碰撞工况下, 非黏滞型和黏滞型单冲击周期运动经穿越滑动分岔相互转迁。在亚谐包含域的边界线上存在一个窄迟滞域群, 相邻迟滞域的连接点为二重擦边分岔点和倍化-鞍结分岔点。碰撞振动系统的切换滑动分岔和多滑动分岔都表现为隆起分岔, 但是隆起在黏滞相的发生位置不同。两参数平面内, 两条不同类型滑动分岔线的横截相交点为余维二滑动分岔点。

关键词: 碰撞振动; 两参数分岔; 滑动分岔; 黏滞; 擦边

中图分类号: O322; TH113.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2023)01-0107-09

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2023.01.012

引言

机械动力系统中的间隙常导致零部件之间或零部件与约束之间在运行中发生碰撞振动。碰撞使含间隙机械系统成为一类典型的非光滑动力系统, 并表现出丰富的动力学行为, 如亚谐碰撞运动^[1-2]、基本碰撞运动^[3]、周期黏滞运动^[4]、混沌激变^[5]和共存吸引子^[6-7]以及擦边分岔^[8-9]和 Neimark-Saker 分岔^[10]等。碰撞振动系统的倍化分岔序列通常因擦边周期运动的存在而中断, 并引发 Poincaré 映射的奇异性^[11-12]。Ma 等^[13]研究了擦边碰撞引起的 Jacobian 矩阵的行列式和迹的变化特点。擦边分岔依据擦边点是否出现跳跃和可逆性分为连续分岔和不连续分岔两种形式。Luo 等^[14-15]基于两参数分岔分析方法研究了碰撞振动系统基本运动的连续和不连续擦边分岔特征。Jiang 等^[16]研究了刚性和弹性碰撞振动系统的两参数倍化型和鞍结型擦边分岔。

工程应用领域存在很多塑性冲击机械和装置, 如冲击振动成型机、振动冲击打桩机和铸造落砂机。塑性碰撞工况下, 冲击振动系统的周期运动有黏滞和非黏滞两种类型。黏滞运动的存在改变了原振动系统的结构, 减少了振动系统的自由度, 增加了理论分析的难度。因此, 对塑性碰撞振动系统的

动力学研究目前开展较少, 研究的方法仅限于数值仿真分析。黏滞型碰撞振动与摩擦振动系统的黏滑振动有相似之处。近年来国内外学者对摩擦振动系统黏滑周期运动的类型和四种滑动分岔作了深入研究^[17-18], 但是对碰撞振动系统滑动分岔的研究尚在起步阶段。Luo 等^[19]研究了两自由度塑性碰撞振动系统非黏滞型周期运动的穿越滑动分岔。Wagg^[20]运用数值仿真的方法揭示了多约束碰撞振动系统完整颤碰运动的多滑动分岔。吕小红等^[21]研究了一类冲击渐进振动系统黏滞型基本碰撞运动的多滑动分岔。迄今为止关于碰撞振动系统的切换滑动和擦边滑动分岔以及余维二滑动分岔等问题的研究还未见报道。本文基于两参数分岔分析方法, 研究塑性碰撞工况下两自由度振动系统在两参数平面的黏滞型和非黏滞型周期运动模式及存在域, 着重分析周期运动的擦边和滑动分岔, 揭示碰撞振动系统的切换滑动、多滑动和余维二滑动分岔等非光滑分岔行为。

1 力学模型

图 1 所示为两自由度含间隙碰撞振动系统的力学模型, 质块 $M_i (i=1, 2)$ 通过阻尼系数为 C_i 的线性阻尼器和刚度为 K_i 的线性弹簧与支承相连, 两个质块之间通过阻尼系数为 C_3 的线性阻尼器和刚度为

收稿日期: 2021-05-22; 修订日期: 2021-09-11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(12062008, 11862011); 甘肃省科技计划资助项目(20YF8WA043, 20JR5RA424); 中共引导地方科技发展基金资助项目(22ZY1QA005)。

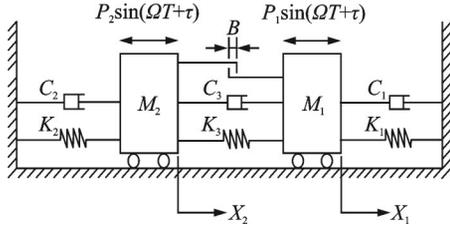


图1 力学模型

Fig. 1 Mechanical model

K_3 的线性弹簧相连。质块 M_i 上作用有简谐激振力 $P_i \sin(\Omega T + \tau)$ 。两质块只在水平方向运动,其位移分别用 X_1 和 X_2 表示,当满足关系 $X_1 - X_2 = B$ 时,质块 M_1 和质块 M_2 发生碰撞。引入无量纲参数:

$$m = \frac{M_1}{M_1 + M_2}, k_i = \frac{K_i}{K_i + K_3} \quad (i=1, 2), c_i = \frac{C_i}{C_i + C_3},$$

$$\omega = \Omega \sqrt{\frac{M_2}{K_3}}, \zeta = \frac{C_3}{2\sqrt{K_3 M_2}}, \delta = \frac{BK_3}{P_1 + P_2},$$

$$f = \frac{P_1}{P_1 + P_2}, t = T \sqrt{\frac{K_3}{M_2}}, x_i = \frac{X_i K_3}{P_1 + P_2} \quad (1)$$

为了书写公式的方便,令 $\mu_m = \frac{1}{1-m}, \mu_{ki} = \frac{1}{1-k_i}, \mu_{ci} = \frac{1}{1-c_i}, \bar{\mu}_m = \frac{m}{1-m}, \bar{\mu}_{ki} = \frac{k_i}{1-k_i}, \bar{\mu}_{ci} = \frac{c_i}{1-c_i}$ 。

当 $x_1(t) - x_2(t) = \delta$ 时,两质块发生碰撞。文献[22-23]研究了系统在刚性碰撞工况下的两参数动力学,本文考虑塑性碰撞,冲击方程为:

$$\bar{\mu}_m \dot{x}_{1-} + \dot{x}_{2-} = \mu_m \dot{x}_+ \quad (2)$$

式中 \dot{x}_{1-} 和 \dot{x}_{2-} 表示碰撞前两质块的瞬时速度。碰撞后的瞬时速度为 $\dot{x}_+ = \dot{x}_{1+} = \dot{x}_{2+}$,若两质块的加速度也相同,则质块 M_1 和 M_2 黏滞在一起同步运动,即黏滞运动。黏滞运动时,两质块之间存在相互作用力 f_N 。用 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 分别表示碰撞后瞬时作用于质块 M_1 和 M_2 的合力,则:

$$\begin{cases} f_1(t) = f \sin(\omega t + \tau) - \delta - \bar{\mu}_{k1} x_1 - 2\zeta \bar{\mu}_{c1} \dot{x}_1 - f_N \\ f_2(t) = (1-f) \sin(\omega t + \tau) + \delta - \bar{\mu}_{k2} x_2 - 2\zeta \bar{\mu}_{c2} \dot{x}_2 + f_N \end{cases} \quad (3)$$

由 $f_1/\bar{\mu}_m = f_2$ 得:

$$f_N(t) = (f - m) \sin(\omega t + \tau) - (1 + m\bar{\mu}_{k2}) \delta - [(\bar{\mu}_{k1} - \bar{\mu}_m \bar{\mu}_{k2}) x_1 + 2\zeta(\bar{\mu}_{c1} - \bar{\mu}_m \bar{\mu}_{c2}) \dot{x}_1] \cdot (1 - m) \quad (4)$$

若 $f_N > 0$,则两质块黏滞运动,否则立即分离做自由运动,直至下次碰撞发生。黏滞运动时的无量纲运动微分方程为:

$$\mu_m \ddot{x}_1 + 2\zeta(\bar{\mu}_{c1} + \bar{\mu}_{c2}) \dot{x}_1 + (\bar{\mu}_{k1} + \bar{\mu}_{k2}) x_1 - \bar{\mu}_{k2} \delta = \sin(\omega t + \tau) \quad (5)$$

黏滞运动过程中,若 f_N 减小为0,则两质块分离做自由运动。自由运动时的无量纲运动微分方程为:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mu}_m & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\zeta \bar{\mu}_{c1} & -2\zeta \\ -2\zeta & 2\zeta \bar{\mu}_{c2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_{k1} & -1 \\ -1 & \mu_{k2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ 1-f \end{Bmatrix} \sin(\omega t + \tau) \quad (6)$$

2 非光滑分岔分析

定义边界函数:

$$h(x) = x_1 - x_2 - \delta \quad (7)$$

令 $x := (x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \theta)^T \in \mathbf{R}^4 \times \mathbf{S}$,其中 $\theta = \omega t \bmod(2\pi)$, \mathbf{S} 为圆环。将式(6)写成规范形式:

$$\dot{x} = f(x), h(x) < 0 \quad (8)$$

关于向量场(8)的流函数 $\phi(x, t)$ 的解析解见文献[22]。流函数的相对速度和相对加速度可表示为:

$$v(x) = \frac{\partial}{\partial t} h(\phi(x, t)) = h_x(x) f(x) \quad (9)$$

$$a(x) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} h(\phi(x, t)) = (h_x(x) f(x))_x f(x) \quad (10)$$

式中 $h_x(x) = (1, 0, -1, 0, 0)$ 。碰撞面可表示为 $\Sigma_p = \{x : h(x) = 0\}$,且可划分成4个子区域: $\Sigma_1^+ = \{x : h(x) = 0, v(x) > 0\}$, $\Sigma_2^+ = \{x : h(x) = 0, v(x) = 0, a(x) > 0\}$, $\Sigma_2^- = \{x : h(x) = 0, v(x) = 0, a(x) < 0\}$ 和 $\Sigma_2^0 = \{x : h(x) = 0, v(x) = 0, a(x) = 0\}$ 。

设系统周期运动的轨迹到达截面 Σ_p 的点为 $x = x_-$,存在以下四种情况:(I) $x_- \in \Sigma_2^-$,两质块擦边接触,此时的系统参数值为擦边分岔点;(II) $x_- \in \Sigma_2^+$,两质块擦边接触后黏滞运动;(III) $x_- \in \Sigma_2^0$,系统发生擦边滑动分岔;(IV) $x_- \in \Sigma_1^+$,两质块发生碰撞。碰撞恢复函数的表达式为 $R(x) = x_- + \omega(x)v(x_-)$,其中 $\omega(x) = (0, m-1, 0, m, 0)^T$ 。设碰撞后的点为 $x = x_+$,由于考虑塑性碰撞,有 $v(x_+) = 0$ 。若 $x_+ \in \Sigma_2^-$,则碰撞后两质块立即分离。若 $x_+ \in \Sigma_2^+$,则碰撞后两质块黏滞运动一段时间。黏滞运动的向量场由式(5)决定,可写成规范形式:

$$\dot{x} = f_s(x) \quad (11)$$

黏滞域的表达式为 $\Sigma_s = \{x \in \Sigma_p : \dot{x}_1 = \dot{x}_2, f_N \geq 0\}$ 。黏滞域的边界为 $\partial \Sigma_s = \{x \in \Sigma_p : \dot{x}_1 = \dot{x}_2, f_N = 0\}$ 。当黏滞运动的轨迹到达 $\partial \Sigma_s$ 时,黏滞运动过程结束。

系统发生滑动分岔时,临界轨迹在碰撞后存在

与 $\partial\Sigma_s$ 相交的点, 设该点为 $x=x^*$ 。根据滑动分岔理论, 定义碰撞振动系统滑动分岔的通有性条件为:

$$H(x^*)=0, v(x^*)=0, a(x^*)=0 \quad (12)$$

对于多滑动分岔, 临界轨迹完全位于黏滞域中, 且点 x^* 与 $\partial\Sigma_s$ 相切, 因此还包括附加条件:

$$a_x(x^*)f(x)=0 \quad (13)$$

为了方便分析, 用符号 ' (n, p, q) ' 表示周期运动的模式, 其中 n, p 和 q 分别表示一个运动周期内的激振力周期数、两质块的碰撞次数和黏滞运动次数。选定相位面 $\Sigma_n = \{x : \theta = 0\}$ 为 Poincaré 截面, 构造 Poincaré 映射 $P : \Sigma_n \rightarrow \Sigma_n$ 。当系统表现为周期运动时, 可通过 Poincaré 截面的点数及周期运动的轨线到达截面 Σ_p 和 Σ_s 的次数辨别周期运动的模式及其在两参平面的存在域。

3 周期运动模式及存在域

取系统参数 (1): $m=0.5, \zeta=0.05, f=1, k_i=0.5, c_i=0.5 (i=1, 2)$, 在 (ω, δ) -参数平面取一个感兴趣的区域 $H_1 = \{0.1 \leq \omega \leq 8.1, 0 \leq \delta \leq 0.8\}$, 辨识系统在 H_1 内的周期运动模式及其存在域如图 2 所示。图 2 中各模式周期运动的存在域用不同的颜色区分, 并标有符号 ' (n, p, q) '; $CS_i (i=1, 2)$, SS 和 G 分别表示穿越滑动分岔线、切换滑动分岔线和擦边分岔线; '+' 代表余维二分岔点。

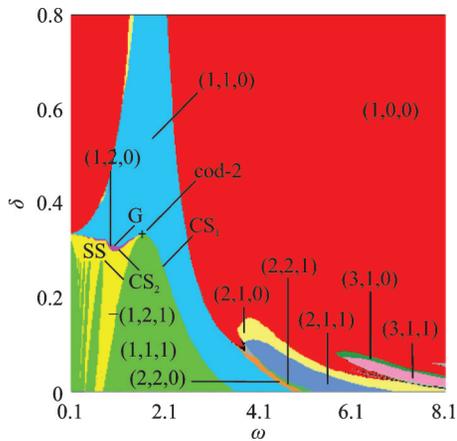


图 2 (ω, δ) -参数平面内的周期运动模式及其存在域

Fig. 2 Periodic motion patterns and existence regions in (ω, δ) -parameter plane

3.1 单冲击周期运动的滑动分岔

由图 2 可见, 塑性碰撞工况下, 图 1 所示系统在两参数 (ω, δ) 平面呈现的单冲击周期运动有两种模式, 即非黏滞型 $(n, 1, 0)$ 和黏滞型 $(n, 1, 1) (n=1, 2, 3, \dots)$ 运动, 其存在域的分布具有规律性。为了详细讨论单冲击周期运动的分岔特点, 图 3 给出了 $\delta=0$

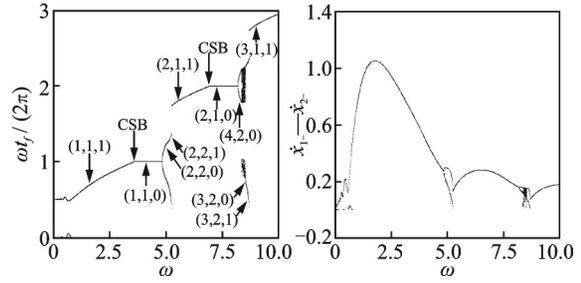


图 3 单冲击周期运动的分岔 ($\delta=0$)

Fig. 3 Bifurcations of single-impact periodic motions ($\delta=0$)

时, $\omega t_f/(2\pi)$ 和冲击速度 $\dot{x}_{1-} - \dot{x}_{2-}$ 随 ω 变化的单参数分岔图, 其中 t_f 表示相邻两次冲击之间的自由运动时间, $\omega t_f/(2\pi)$ 表示 t_f 与激振力周期的比值。 $\omega t_f/(2\pi)$ 分支的平直线窗口 ($\omega t_f/(2\pi) = n (n=1, 2, 3, \dots)$) 对应 $(n, 1, 0)$ 运动, 周期运动过程中不存在黏滞现象, 运动轨迹为“碰撞-自由运动”。斜直线窗口对应 $(n, 1, 1)$ 运动, 周期运动过程中存在黏滞现象, 运动轨迹为“碰撞-黏滞-自由运动”。碰撞振动系统的黏滞与摩擦振动系统的滑动有相似之处。在直线的转折点, 非黏滞型周期运动的轨迹横截相交黏滞域边界转迁为黏滞型, 因此, 系统发生穿越滑动分岔 (CSB)。继续减小 ω , $(n, 1, 1) (n \geq 2)$ 运动发生擦边分岔产生 $(n, 2, 1)$ 运动, 然后经穿越滑动分岔嵌入 $(n, 2, 0)$ 运动。当 ω 增大时, $(n, 1, 0)$ 运动经倍周期分岔产生 $(2n, 2, 0)$ 运动, 然后经穿越滑动分岔转迁为 $(2n, 2, 1)$ 运动。

如图 2 所示, $(1, 1, 0)$ 运动的存在域在下边界与 $(1, 1, 1)$ 和 $(1, 2, 0)$ 运动的存在域相邻。减小 δ , $(1, 1, 0)$ 运动与 $(1, 1, 1)$ 运动的两参数分界线为穿越滑动分岔线 (CS_1), 与 $(1, 2, 0)$ 运动的分界线为擦边分岔线 (G)。两条分岔线的节点用符号 '+' 表示。 $(1, 2, 0)$ 运动的存在域很窄呈波浪状分布, 其下边界经穿越滑动分岔线 (CS_2) 与 $(1, 2, 1)$ 运动相邻。在图 2 所示左下角区域, $(1, 1, 1)$ 运动与 $(1, 2, 1)$ 运动的存在域交替出现。两类周期运动的分岔过程如图 4 和 5 所示。图 4 的 $\omega t_f/(2\pi)$ 分支数和 $\omega t_s/(2\pi)$ (t_s 表示相邻两次冲击之间的黏滞运动时间) 分支数可分

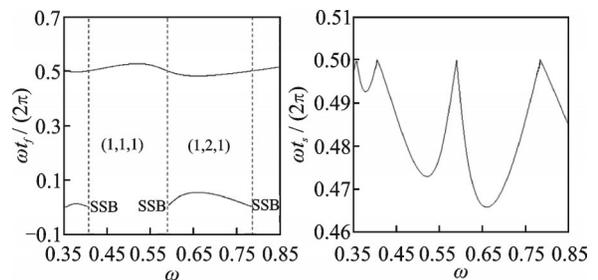


图 4 $(1, 1, 1)$ 与 $(1, 2, 1)$ 运动的分岔 ($\delta=0$)

Fig. 4 Bifurcation between $(1, 1, 1)$ and $(1, 2, 1)$ motions ($\delta=0$)

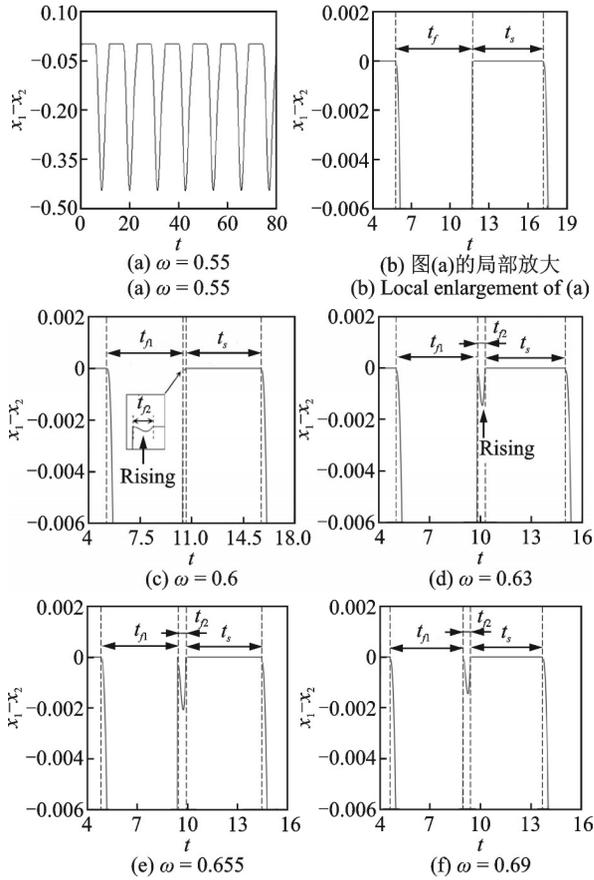


图5 相对运动的时间历程图($\delta=0$)

Fig. 5 Time series of relative motion($\delta=0$)

别确定周期运动的碰撞次数 p 和黏滞次数 q 。图5(a)为 $\omega=0.55$ 时,两质块相对运动的时间历程图,系统呈现(1,1,1)运动。图5(b)为图5(a)的局部放大。增大 ω ,当 $\omega > 0.59093$ 时, $\omega t_N / (2\pi) - \omega$ 分岔图出现两条分支线,即碰撞次数增加一次,但 $\omega t_N / (2\pi)$ 分支数保持不变,系统呈现(1,2,1)运动。经计算可知,增大 ω ,对应(1,1,1)运动的力 f_N 逐渐减小。当 $\omega=0.59093$ 时, f_N 减小至近似等于0。继续增大 ω ,当 $\omega=0.6$ 时, $f_N = -0.01634557 < 0$,因此,两质块在碰撞后立即分离,经历很短暂的自由运动后再次碰撞,然后黏滞运动。相对运动的时间历程图在黏滞期的开始出现微小的隆起现象(Rising)(如图5(c)所示), (1,1,1)运动分岔为(1,2,1)运动。在分岔点,运动轨迹在黏滞期的开始发生了额外的切换转换,因此,系统发生切换滑动分岔(SSB)。进一步增大 ω ,隆起的幅值逐渐增大,当 $\omega \approx 0.655$ 时达到最大值,然后逐渐减小直至消失, (1,2,1)运动经切换滑动分岔返回(1,1,1)运动,如图5(d)~(f)所示。

由图4和5可知,在图2所示两参数平面内, (1,1,1)与(1,2,1)运动的分界线为切换滑动分岔线(SS), '+'点是分岔线 G, CS_1, CS_2 和SS的节点,因此, '+'点为(1,1,0)运动的擦边-滑动分岔点和(1,2,1)运动的余维二滑动分岔点。

3.2 (1,0,0)运动与(1,1,0)运动的转迁

在图2所示两参数平面的大间隙区域,系统主要表现为(1,0,0)和(1,1,0)运动。两类运动之间存在两种不同的转迁方式。第一种转迁方式如图6(a)所示,减小 ω 或 δ , (1,0,0)运动在分岔线 $G_{(1,0,0)}$ 经不连续擦边分岔产生(1,1,0)运动。当分岔参数反方向变化时, (1,1,0)运动在分岔线 $SN_{(1,1,0)}$ 经鞍结分岔产生(1,0,0)运动。分岔线 $G_{(1,0,0)}$ 和 $SN_{(1,1,0)}$ 产生一个(1,0,0)和(1,1,0)运动共存的迟滞域,用 HR_1 表示。为了研究系统在 HR_1 内的全局动力学,在状态空间选取一个初值考察区域 $\Omega = \{-0.4 \leq x_1 \leq 0.4, -2 \leq \dot{x}_1 \leq 0, x_2 = 0, \dot{x}_2 = 0\}$, 应用简单胞映射法求解 HR_1 内共存吸引子在 Ω 内的吸引域如图7所示。当 ω 递减穿越 $SN_{(1,1,0)}$ 时,系统在部分初值下的(1,0,0)运动响应发生周期跳跃,出现(1,1,0)运动响应, (1,0,0)运动的吸引域被(1,1,0)运动的吸引域侵蚀,如图7(a)所示。继续减小 ω , (1,1,0)运动的吸引域面积不断增大, (1,0,0)运动的吸引域被进一步侵蚀,如图7(b)所示。由于共存吸引子的吸引域集中分布,因此,初始条件的扰动对系统在 HR_1 内的稳态响应的影响不大。当 ω 递减穿越 $G_{(1,0,0)}$ 时,系统响应退出迟滞域,表现为稳定的(1,1,0)运动。

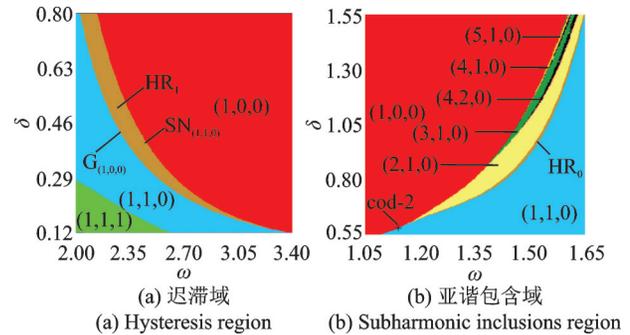


图6 (1,0,0)与(1,1,0)运动的转迁

Fig. 6 Transition between (1,0,0) and (1,1,0) motions

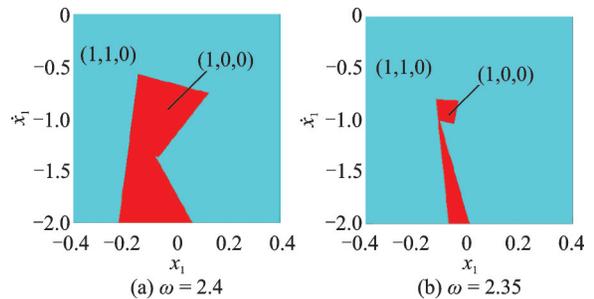


图7 吸引域($\delta=0.4$)

Fig. 7 Basins of attraction($\delta=0.4$)

(1,0,0)与(1,1,0)运动之间还存在另外一种转迁方式。由图2可见,在(1,0,0)和(1,1,0)运动的

存在域临界线上存在若干面积很窄的浅黄色区域。图 6(b)为该参数区域的动力学描述,系统主要表现为非黏滞型单碰亚谐运动 $(n, 1, 0)$ ($n=2, 3, \dots$)。 $(n, 1, 0)$ 运动序列的存在域随 n 的递增自下而上、自右向左依次分布。为了方便分析,文中将这类区域称为亚谐包含域。图 8(a)为 $(1, 0, 0)$ 运动与亚谐包含域内的 $(2, 1, 0)$ 运动随 ω 递增(红色)和递减(蓝色)的单参数分岔图。 $(1, 0, 0)$ 运动的擦边分岔点 G_2 和 $(2, 1, 0)$ 运动的鞍结分岔点 SN_2 形成一个 $(1, 0, 0)$ 与 $(2, 1, 0)$ 运动共存的迟滞窗口。 $(1, 0, 0)$ 运动与亚谐包含域内 $(3, 1, 0)$ 运动的相互转迁如图 8(b)所示。由图 8 可知,在 $(1, 0, 0)$ 运动与亚谐包含域内 $(n, 1, 0)$ 运动的存在域之间,由 $(1, 0, 0)$ 运动的擦边分岔线和 $(n, 1, 0)$ 运动的鞍结分岔线形成一个很窄的迟滞域 HR_n ,从而在亚谐包含域的上边界产生一个窄迟滞域群 HR_n ($n=2, 3, \dots$)。 $(1, 0, 0)$ 运动的擦边分岔只有在相邻两个迟滞域 HR_n 和 HR_{n+1} 的连接点是连续分岔,该连接点是 $(1, 0, 0)$ 运动的二重擦边分岔点。

取 $\delta=1.5$, $(1, 0, 0)$ 与 $(1, 1, 0)$ 运动经亚谐包含域的转迁过程如图 9 所示。结合图 6(b)和图 9 可

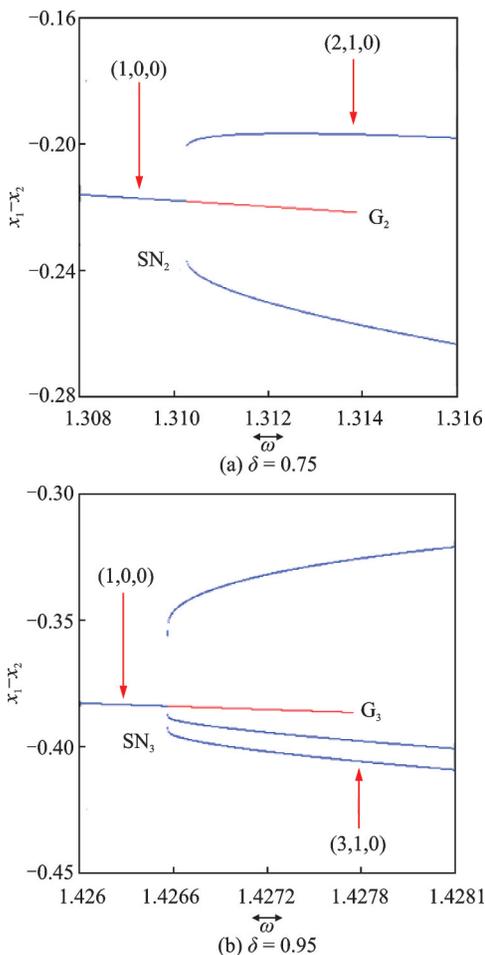


图 8 $(1, 0, 0)$ 与 $(n, 1, 0)$ 运动的转迁

Fig. 8 Transitions between $(1, 0, 0)$ and $(n, 1, 0)$ motions

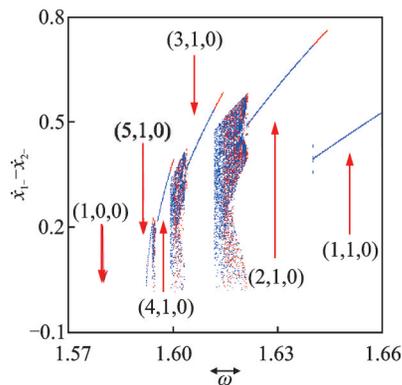


图 9 分岔图

Fig. 9 Bifurcation diagram ($\delta=1.5$)

知,递增 δ 或递减 ω , $(1, 1, 0)$ 运动发生倍周期分岔产生 $(2, 2, 0)$ 运动而使系统响应嵌入亚谐包含域, $(2, 2, 0)$ 运动经鞍结分岔产生 $(2, 1, 0)$ 运动。当 δ 和 ω 反方向变化时, $(2, 1, 0)$ 运动的擦边分岔使系统响应直接退出亚谐包含域,表现为 $(1, 1, 0)$ 运动。 $(2, 1, 0)$ 运动的擦边分岔线和 $(2, 2, 0)$ 运动的鞍结分岔线在亚谐包含域的下边界形成一个迟滞域,如图 6(b)所示 HR_0 。 HR_0 内, $(1, 1, 0)$ 与 $(2, 1, 0)$ 运动或 $(2, 2, 0)$ 与 $(2, 1, 0)$ 运动共存。迟滞域 HR_0, HR_1 和 HR_2 的六条边界线横截相交于‘+’点,因此,该点是 $(1, 0, 0)$ 运动的二重擦边分岔点和 $(1, 1, 0)$ 运动的倍化-鞍结分岔点。当 ω 递增时, $(n, 1, 0)$ ($n=3, 4, 5$)运动经不连续的擦边分岔产生混沌,并形成一个 $(n, 1, 0)$ 运动与混沌共存的迟滞窗口,如图 9 所示。图 10(a)为迟滞窗口内 $(3, 1, 0)$ 运动(红色)与混沌(蓝色)共存的相图。递增 ω , 当 $\omega=0.614374$ 时, $(3, 1, 0)$ 运动的一条非碰撞轨线与碰撞面擦边接触,如图 10(b)所示。穿越擦边分岔点, $(3, 1, 0)$ 运动转迁为混沌。图

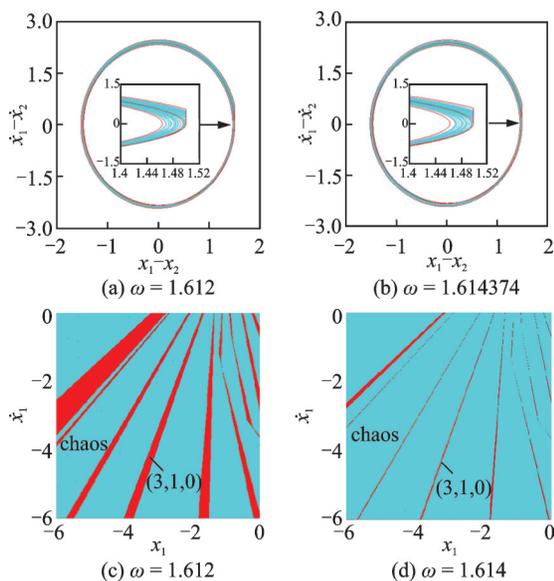


图 10 共存运动的相图和吸引域 ($\delta=1.5$)

Fig. 10 Phase plane portraits and basins of attraction of coexisting motions ($\delta=1.5$)

10(c)和(d)描述了(3,1,0)运动与混沌共存时的吸引域结构及演化。离擦边点越近,(3,1,0)运动的稳定性越弱,其初始条件的微小扰动有可能使系统响应表现为混沌。

4 系统参数对两参数动力学的影响

这一节讨论单参数变化对系统在 (ω, δ) -参数平面的动力学的影响,数值仿真结果如图11所示(图题给出了改变的参数值,其余参数与参数(1)相同)。对比图2和11可见,改变质量参数 m 及刚度参数 k_1 和 k_2 , $(n,1,0)$ 和 $(n,1,1)$ $(n \geq 2)$ 运动的存在域的分布规律基本不变。因此,下面分析单参数变化对 $(1, \rho, q)$ 运动的存在域及分布的影响。由图2,11(a)和(b)可见,减小 m ,单碰周期运动的存在域朝 ω 增加的方向移动,同时向大间隙区域延伸,使得参数区域 H_1 内的周期运动模式减少, $(n,1,0)$ 运动的穿越滑动分岔线明显延长; $(1,1,1)$ 和 $(1,2,1)$ 运动的存在域分布变得更加简单,切换滑动分岔线明显缩短;亚谐包含域向大间隙区域收缩。当 $m=0.3$ 时,亚谐包含域收缩到了 H_1 以外的区域。减小 k_1 , $(1,1,0)$ 运

动的存在域面积逐渐减小,亚谐包含域向小间隙区域延伸;在 $\omega > 1$ 的区域内, $(1,1,0)$ 运动的存在域向下扩展, $(1,1,1)$ 和 $(1,2,1)$ 运动的存在域受到挤压而减小, $(1,1,0)$ 运动的穿越滑动分岔线逐渐缩短;在 $\omega < 1$ 的区域内, $(1,1,1)$ 和 $(1,2,1)$ 运动的存在域分布变得更加复杂,并向大间隙区域延伸,切换滑动分岔线明显延长。减小 k_2 ,在 $\omega > 1.5$ 的区域内, $(1,1,1)$ 运动的存在域向大间隙区域扩展,使得 $(1,1,0)$ 运动的存在域和亚谐包含域向上收缩;在 $\omega < 1.5$ 的区域内, $(1,1,1)$ 和 $(1,2,1)$ 运动的存在域向小间隙区域收缩,切换滑动分岔线明显缩短。

5 周期黏滞运动的滑动分岔

数值结果表明,当 k_2 增加到 $k_2 \approx 0.78$ 时,系统在低频小间隙区域呈现更加丰富的动力学。如图12(a)所示,当 $k_2=0.9$ 时,参数区域 $H_2 = \{0.2 \leq \omega \leq 1, 0 \leq \delta \leq 0.48\}$ 内出现若干囊括 $(1,2,1)$, $(1,2,2)$, $(1,3,1)$ 和 $(1,3,2)$ 等黏滞型周期运动的呈柳叶状有规律分布的参数岛。这些参数岛具有自相似特征。图12(b)描述了边界线的分岔类型,MS和SN分别表示多滑动分岔线和鞍结分岔线,两条不同类型滑动分岔线的横截相交点为余维二滑动分岔点。由于系统在参数区域 H_2 内表现为周期一运动,即运动周期等于激振力周期不变,因此,为了辨识周期运动的碰撞次数和黏滞次数,图13给出了 $\omega t_j / (2\pi)$ 和 $\omega t_j' / (2\pi)$ 随 ω 沿图12(b)所示线段 u 变化的单参数分岔图,虚线表示分岔边界。各模式周期一运动的时间历程如图14(a1)~(e1)所示。图14(a2)~(e2)分别为图14(a1)~(e1)的局部放大。

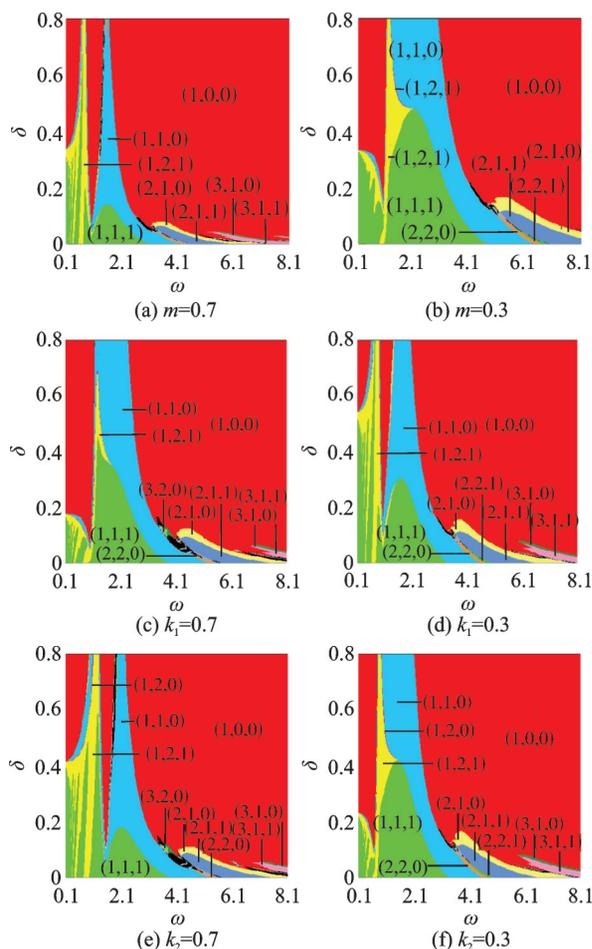


图 11 两参数分岔图

Fig. 11 Two-parameter bifurcation diagrams

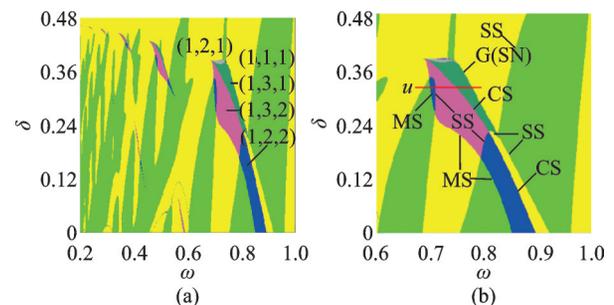


图 12 两参数分岔图, $k_2=0.9$

Fig. 12 Two-parameter bifurcation diagram, $k_2=0.9$

由3.1节的分析可知, $(1,1,1)$ 与 $(1,2,1)$ 运动的两参数分界线为切换滑动分岔线(SS)。增大 ω , $(1,1,1)$ 运动转迁为 $(1,2,2)$ 运动,如图13所示。 $(1,1,1)$ 运动的轨迹如图14(a1)和(a2)所示,每次碰撞后,两质块黏滞运动一段时间,然后自由运动直至下次碰撞。随着 ω 的增大,相对运动的时间历程图在

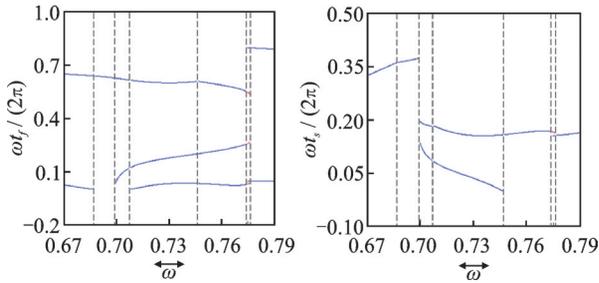
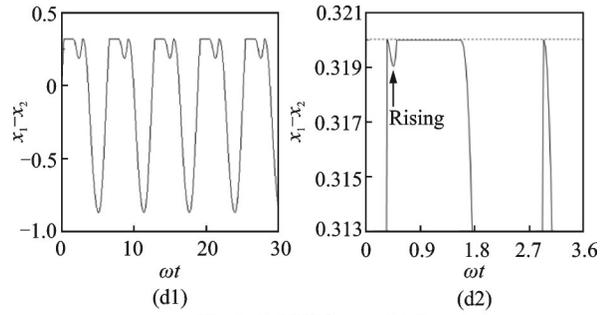
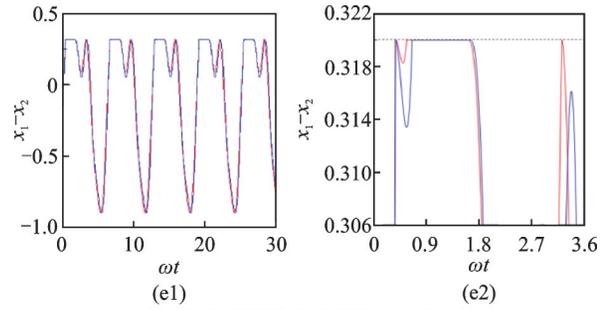


图 13 单参数分岔图($\delta=0.32$)
Fig. 13 One-parameter diagrams($\delta=0.32$)

(1, 1, 1)运动的黏滞相出现隆起现象,即两质块在黏滞运动期间出现短暂的分离,如图 14(b1)和(b2)所示。由于该隆起出现在黏滞相的近似中间位置,使得系统在一个运动周期内的黏滞次数增加一次,(1, 1, 1)运动经多滑动分岔转迁为(1, 2, 2)运动。因此,图 12 中(1, 1, 1)与(1, 2, 2)运动的两参数分界线即蓝色区域与绿色区域之间的分界线为多滑动分岔线(MS)。继续增大 ω ,隆起的幅值和分离的时间逐渐增加,第二次(短暂分离后)黏滞期的时间逐渐缩短。同时,相对运动的时间历程图在第一次黏滞的开始

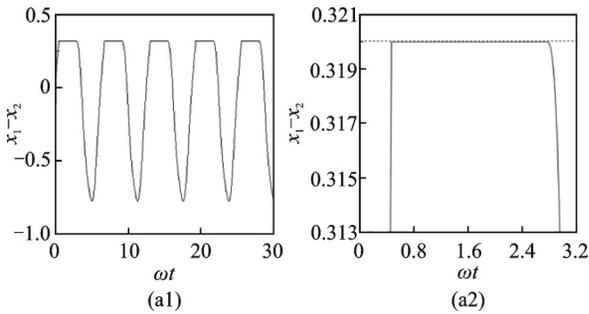


(d) (1, 3, 1)运动, $\omega = 0.76$
(d) (1, 3, 1) motion, $\omega = 0.76$

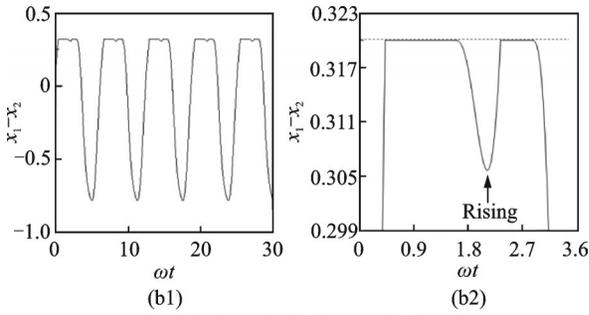


(e) (1, 2, 1)和(1, 3, 1)运动, $\omega = 0.775$
(e) (1, 2, 1)和(1, 3, 1) motions, $\omega = 0.775$

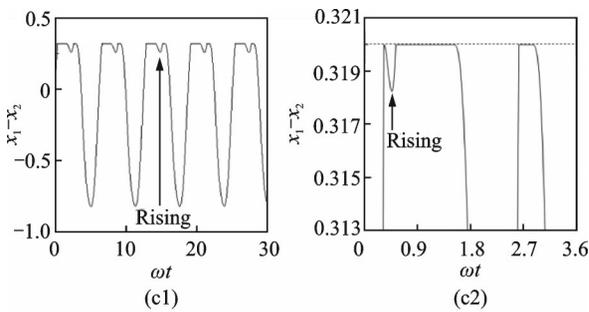
图 14 时间历程图($\delta=0.32$)
Fig. 14 Time series($\delta=0.32$)



(a) (1, 1, 1)运动, $\omega = 0.69$
(a) (1, 1, 1) motion, $\omega = 0.69$



(b) (1, 2, 2)运动, $\omega = 0.708$
(b) (1, 2, 2) motion, $\omega = 0.708$



(c) (1, 3, 2)运动, $\omega = 0.73$
(c) (1, 3, 2) motion, $\omega = 0.73$

出现微小的隆起,如图 14(c1)和(c2)所示,使运动轨迹在黏滞相的开始发生额外的切换转换,系统发生切换滑动分岔产生(1, 3, 2)运动。因此,(1, 2, 2)与(1, 3, 2)运动的两参数分界线为切换滑动分岔线(SS)。进一步增大 ω ,第二次黏滞期的时间减小为 0,此次碰撞后由黏滞型转迁为非黏滞型,(1, 3, 2)运动经穿越滑动分岔产生(1, 3, 1)运动,如图 14(d1)和(d2)所示。因此,(1, 3, 2)与(1, 3, 1)运动的两参数分界线为穿越滑动分岔线(CS)。(1, 2, 1)与(1, 3, 1)运动的两参数分界线为擦边分岔线(G)或鞍结分岔线(SN),两条分岔线产生迟滞域。迟滞域内共存周期运动的时间历程图如图 14(e1)和(e2)所示,其中红色线为(1, 3, 1)运动的轨迹,蓝色线表示(1, 2, 1)运动。在图 12 中,(1, 2, 1)运动与(1, 2, 2)运动的两参数分界线为穿越滑动分岔线(CS),与(1, 3, 2)运动的两参数分界线为多滑动分岔线(MS)。

Wagg^[20]研究了碰撞振动系统颤碰黏滞运动的隆起现象,认为隆起分岔在性质上相似于摩擦振动系统的多滑动分岔。然而本文的研究发现,碰撞振动系统的切换滑动分岔和多滑动分岔都表现为隆起分岔。隆起在黏滞相的发生位置不同,滑动分岔模式不同。切换滑动分岔对应的隆起发生在黏滞相的开始时刻,使系统在一个运动周期内的碰撞次数增加一次,而黏滞运动次数不变,且发生隆起的黏滞相时间 t 在分岔点连续变化,如图 13(b)所示。多滑动分岔对应的隆起发生在黏滞相的近似中间位置,使系统在一个运动周期内的碰撞次数和黏滞运动次数

各增加一次,且黏滞相时间 t_c 在分岔点发生跳跃。

6 结 论

本文考虑塑性碰撞工况的两自由度振动系统,分析系统非光滑分岔的条件,辨识系统在 (ω, δ) -参数平面的周期运动模式及存在域,研究相邻周期运动的分岔特征及系统参数对系统动力学的影响,揭示碰撞振动系统的余维一穿越、切换和多滑动分岔及余维二滑动分岔行为。

(1) 塑性碰撞工况下,系统呈现的单冲击周期运动有两种模式,即非黏滞型 $(n, 1, 0)$ 和黏滞型 $(n, 1, 1)$ $(n=1, 2, 3, \dots)$ 运动。 $(n, 1, 0)$ 和 $(n, 1, 1)$ 运动经穿越滑动分岔相互转迁。

(2) 在 $(1, 0, 0)$ 与 $(1, 1, 0)$ 运动的 (ω, δ) -存在域之间,存在两类转迁域:迟滞域和亚谐包含域。由于擦边分岔的不连续性,亚谐包含域被一个窄迟滞域群包围。相邻迟滞域的连接点为二重擦边分岔点和倍化-鞍结分岔点。

(3) 切换滑动分岔和多滑动分岔都表现为周期黏滞运动的隆起分岔,引起两质块在黏滞运动期内时而黏滞、时而跳动。这种现象类似于机械系统的爬行或颤振,加剧振动机械部件的疲劳,产生刺耳的噪音。因此,在设计和改造图1所示塑性冲击机械和装置时,通过系统动力学的两参数或多参数分岔分析可以确定其优化参数,从而使系统在较宽激励频率范围内避免隆起分岔的发生。

本文的研究为塑性碰撞振动系统动力学行为的预测和控制、以及系统设计参数的优化选择提供理论基础。

参考文献:

- [1] Peterka F, Tondl A. Phenomena of subharmonic motions of oscillator with soft impacts [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2004, 19: 1283-1290.
- [2] 李群宏, 陆启韶. 一类双自由度碰振系统运动分析 [J]. *力学学报*, 2001, 33(6): 776-786.
Li Qunhong, Lu Qishao. Analysis to motions of a two-degree-of-freedom vibro-impact system [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2001, 33(6): 776-786.
- [3] Peterka F, Blazejczyk-Okolewska B. Some aspects of the dynamical behavior of the impact damper [J]. *Journal of Vibration and Control*, 2005, 11: 459-479.
- [4] Wagg D J. Periodic sticking motion in a two-degree-of-freedom impact oscillator [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2005, 40(8): 1076-1087.
- [5] 冯进钤, 徐伟. 碰撞振动系统中周期轨擦边诱导的混沌激变[J]. *力学学报*, 2013, 45(1): 30-36.
Feng Jinqian, Xu Wei. Grazing-induced chaotic crisis for periodic orbits in vibro-impact systems [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2013, 45(1): 30-36.
- [6] Zhang Y X, Luo G W. Multistability of a three-degree-of-freedom vibro-impact system [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2018, 57(4): 331-341.
- [7] Yue Y, Miao P C, Xie J H. Coexistence of strange non-chaotic attractors and a special mixed attractor caused by a new intermittency in a periodically driven vibro-impact system [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 87(2): 1187-1207.
- [8] Yin S, Ji J, Deng S, et al. Degenerate grazing bifurcations in a three-degree-of-freedom impact oscillator [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 97(1): 525-539.
- [9] 张思进, 周利彪, 陆启韶. 线性碰振系统周期解擦边分岔的一类映射分析方法 [J]. *力学学报*, 2007, 37(1): 132-136.
Zhang Sijin, Zhou Libiao, Lu Qishao. A map method for grazing bifurcations in linear vibro-impact system [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2007, 39(1): 132-136.
- [10] 乐源, 谢建华. 两自由度碰撞振动系统的 Poincaré 映射的对称性及分岔 [J]. *振动工程学报*, 2008, 21(4): 376-380.
Yue Yuan, Xie Jianhua. Symmetry of the Poincaré map and bifurcations of a two-degree-of-freedom vibro-impact system [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2008, 21(4): 376-380.
- [11] Whiston G S. Singularities in vibro-impact dynamics [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1992, 152(3): 427-460.
- [12] Kundu S, Banerjee S, Ing J, et al. Singularities in soft-impacting systems [J]. *Physica D*, 2012, 241(5): 553-565.
- [13] Ma Y, Ing J, Banerjee S, et al. The nature of the normal form map for soft impacting systems [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2008, 43(6): 504-513.
- [14] Luo G W, Lü X H, Shi Y Q. Vibro-impact dynamics of a two-degree-of-freedom periodically-forced system with a clearance: diversity and parameter matching of periodic-impact motions [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2014, 65(10): 173-195.
- [15] Luo G W, Zhu X F, Shi Y Q. Dynamics of a two-degree-of-freedom periodically-forced system with a rigid stop: diversity and evolution of periodic-impact motions [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, 334: 338-362.
- [16] Jiang H B, Chong A S E, Ueda Y, et al.

- Grazing-induced bifurcations in impact oscillators with elastic and rigid constraints[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2017, 127(7): 204-214.
- [17] Kowalczyk P, Piiroinen P T. Two-parameter sliding bifurcations of periodic solutions in a dry-friction oscillator [J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2008, 237(8): 1053-1073.
- [18] 李群宏, 闫玉龙, 韦丽梅, 等. 非线性传送带系统的复杂分岔[J]. *物理学报*, 2013, 62(12): 120505.
Li Qunhong, Yan Yulong, Wei Limei, et al. Complex bifurcations in a nonlinear system of moving belt[J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, 62(12): 120505.
- [19] Luo G W, Lv X H, Zhu X F, et al. Diversity and transition characteristics of sticking and non-sticking periodic impact motions of periodically forced impact systems with large dissipation [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 94(2): 1047-1079.
- [20] Wagg D J. Rising phenomena and the multi-sliding bifurcation in a two-degree of freedom impact oscillator [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2004, 22(3): 541-548.
- [21] 吕小红, 罗冠炜. 冲击渐进振动系统相邻基本振动的变迁规律[J]. *力学学报*, 2017, 49(5): 1091-1102.
Lü Xiaohong, Luo Guanwei. Transition law of adjacent fundamental motions in vibro-impact system with progression[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(5): 1091-1102.
- [22] Lyu Xiaohong, Dao Quanfu, Luo Guanwei. Dynamic characteristics of a mechanical impact oscillator with a clearance [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2020, 178(15): 105605.
- [23] 吕小红, 罗冠炜. 含间隙振动系统周期振动的多样性和变迁特征[J]. *振动工程学报*, 2020, 33(4): 688-697.
Lü Xiaohong, Luo Guanwei. Diversity and transition characteristics of periodic vibration of a vibro-impact system with a clearance[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2020, 33(4): 688-697.

Two-parameter non-smooth bifurcations of a 2-DOF impact oscillator

LÜ Xiao-hong^{1,2}, ZHANG Kai-cheng¹, ZHU Xi-feng¹, LUO Guan-wei²

(1.School of Mechatronic Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China; 2.Key Laboratory of System Dynamics and Reliability of Rail Transport Equipment of Gansu Province, Lanzhou 730070, China)

Abstract: A two-degree-of-freedom oscillator system with plastic impact is considered. The existences of non-smooth bifurcations of the system are analyzed, and the periodic motion patterns and existence regions are identified in the (ω, δ) -parameter plane. The bifurcation characteristics between adjacent periodic motions and dynamics in the hysteresis and subharmonic inclusions regions which lie between the (ω, δ) -parameter domains of $(1, 0, 0)$ and $(1, 1, 0)$ motions are analyzed. The bifurcation behaviors such as codimension-1 crossing-sliding, switching-sliding and multi-sliding bifurcations and codimension-2 sliding bifurcation in the impact oscillator are revealed. In the plastic impact case, non-sticking and sticking single-impact periodic motions transit into each other through crossing-sliding bifurcation. There exists a group of narrow hysteresis domains along the boundary of the subharmonic inclusions region, and the connection point of adjacent domains of hysteresis is a double-grazing bifurcation and flip-fold bifurcation point. Switching-sliding and multi-sliding bifurcations of the impact oscillator are manifested as rising bifurcations, but there is a difference in the location of rises occurring in the sticking phase. In two-parameter plane, the intersection point of two types of sliding bifurcation curves is a codimension-2 sliding bifurcation point.

Key words: impact oscillator; two-parameter bifurcation; sliding bifurcation; sticking; grazing

作者简介: 吕小红(1977—),男,教授。电话:13893686119; E-mail: lvxh@mail.lzjtu.cn。