

# 负载不确定振动基机械臂的有限时间鲁棒镇定控制

梅瑞麟<sup>1,2,3</sup>, 郭宇飞<sup>1,2,3</sup>, 王志刚<sup>1</sup>, 郝志强<sup>1</sup>

(1. 冶金装备及其控制教育部重点实验室(武汉科技大学), 湖北 武汉 430081;

2. 武汉科技大学精密制造研究院, 湖北 武汉 430081;

3. 武汉科技大学机器人与智能系统研究院, 湖北 武汉 430081)

**摘要:** 针对存在外部振动激励与负载变化的机械臂在实现位置控制时耗时长、精度低等问题, 提出了一种鲁棒有限时间控制方法。使用第二类 Lagrange 方法建立了含外部扰动的机械臂动力学方程, 将基座所受振动激励处理为系统惯性不确定项, 设计了基于隐式 Lyapunov 函数的有限时间控制器; 结合有限时间稳定性引理, 采用 Lyapunov 理论证明了所提控制算法可以在有限时间内收敛稳定, 给出了控制器计算流程; 以基座存在振动的两连杆机械臂为对象, 搭建试验装置并考虑外部振动与负载变化的情况进行多组对比试验。研究结果表明: 所提出的方法能克服基座振动与负载变化的影响, 使控制对象快速趋近目标位置, 具有较好的抗干扰性与鲁棒性。

**关键词:** 机械臂; 振动激励; 镇定控制; 负载变化; 隐式 Lyapunov 函数

**中图分类号:** O313.7; TP241; TP273.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2023)01-0128-10

**DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2023.01.014

## 引言

振动基机械臂是一类安装在振动基座上的机械系统, 包括弹药传输机械臂<sup>[1-2]</sup>、移动机械臂<sup>[3-4]</sup>、空间机械臂<sup>[5-6]</sup>等, 吸引了许多学者的关注。文献[7]研究了具有弹性基座的空间机械臂鲁棒控制问题, 通过级联控制法同时抑制机构自身弹性振动与基座弹性振动。文献[8]研究了一种在飞行过程中受到剧烈扰动影响的无人机机械臂跟踪控制问题, 设计了鲁棒自适应控制器对外部扰动进行抑制。文献[9]研究了空间柔性机械臂在臂体大范围运动后产生剧烈弹性振动的抑制问题, 设计了模糊自适应控制器来提高机械臂定位控制精度。但是, 这些研究都建立在系统是线性的假设之上, 并且基础振动的频率范围可以提前预测。

坦克弹药传输机械臂可以被视作一类典型的振动基机械臂, 会受到坦克行进时由于路面不平整产生的外部非线性振动激励与坦克开火时火炮的后坐力产生的内部非线性冲击激励的影响, 具有振动激励不可预测的特点。同时, 当弹药传输机械臂执行装弹操作时, 机械系统外部负载的大幅增加会显著

影响控制器的控制时间, 增大控制难度。此外, 将坦克单次装弹时间限制在有限时间内是提升坦克整体作战能力的重要前提之一。然而, 目前大部分控制方法只能在时间趋于无穷大时才能实现渐进稳定, 且难以保证存在外部扰动和负载变化时的稳定性<sup>[10]</sup>。因此, 对于振动基机械臂在变负载工况下的有限时间控制问题的研究势在必行。

目前, 有限时间控制器的设计通常采用终端滑模控制<sup>[11-12]</sup>、自适应控制<sup>[13-14]</sup>、分数阶控制<sup>[15]</sup>等方法, 其具有实现控制目标所耗时间最短的特性, 但是上述有限时间控制的研究, 尚未应用于振动基机械臂中。然而, 底座振动与弹药装载造成的负载增加是作用在坦克弹药传输机械臂上的控制器在实战中实现快速精准装填时面临的重大挑战。

在考虑了外部振动激励的有限时间控制研究中, 文献[16]基于对雅可比转置矩阵的估计, 设计了适用于两自由度机械臂的有限时间控制器, 但没有设置考虑振动情况的对照组并且缺少考虑惯量改变的对照组仿真。文献[17]通过反步法设计了无需考虑模型的抗干扰控制器, 但这种方法难以严格证明其有限时间收敛性质。此外, 上述有限时间控制的研究缺少试验验证, 难以确保其在实际应用中的有

**收稿日期:** 2021-08-23; **修订日期:** 2021-10-27

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(51605344); 武汉市应用基础前沿项目(2019010701011404); 中国博士后科学基金资助项目(2016M592398); 国家留学基金委奖学金资助项目(201908420154)。

效性。

在设置了试验的有限时间控制的相关研究中,文献[18]设计了对跟踪误差和滑模面具有预定义约束切换的有限时间滑模控制器,但在试验部分没有对机械臂施加振动激励。文献[19]结合固定时间干扰观测器,采用终端滑模控制方法研究了弹药传输机械臂定位控制问题,但没有考虑弹药装填时的负载增加的不足。文献[20]设计了不考虑模型的非奇异无抖振终端滑模鲁棒控制器,并采用 Lyapunov 稳定性理论对其有限时间收敛性进行了证明,但只能实现对较小外部振动的被动抑制,难以验证机械臂在实际工作中遭受显著冲击时的稳定性。

为解决上述问题,本文首次同时针对振动基机械臂、变负载工况和有限时间控制问题,设计了一种基于隐式 Lyapunov 函数的有限时间控制器,能够在无需测量或预测基础振动信息的前提下实现机械臂的定位控制,并结合有限时间稳定性引理,采用 Lyapunov 理论证明了所提控制算法可以在有限时间内收敛稳定。搭建了两自由度的振动基机械臂试验装置,通过试验验证了在存在振动激励的工况下,所设计控制器在外加负载增加时仍具有较好的鲁棒性,以及相比于增加了重力补偿的传统固定参数 PD 控制器的有效性与优越性。

## 1 振动基机械臂动力学模型

### 1.1 模型简化

文献[1]提出的一种坦克弹药传输机械臂示意图如图 1 所示,其主要由升降部分、翻转部分与安装架组成。升降部分与翻转部分均由电机驱动,可实现 360° 翻转装填并推送炮弹进入炮尾。

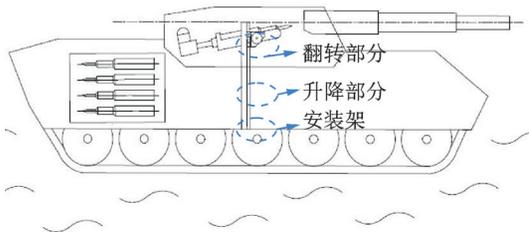


图 1 坦克弹药传输机械臂示意图

Fig. 1 Diagram of tank ammunition transfer manipulator

由于对振动基弹药传输机的控制方法进行研究的核心问题是对电机的控制,因此,为便于通过试验研究本文提出的控制算法应用于电机上的效果,本文针对一种 2-DOF 的振动基机械臂,建立了如图 2 所示的简化模型,该简化模型将用于研究上述针对振动基机械臂的鲁棒镇定控制方法。

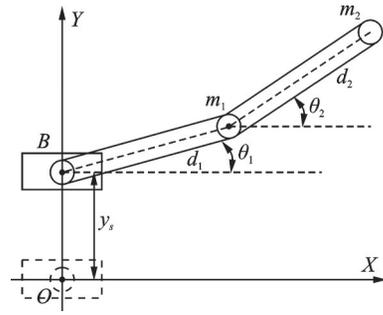


图 2 振动基机械臂简化模型

Fig. 2 Simplified model of vibration-based manipulator

其中,  $XOY$  为简化模型惯性坐标系;  $y_s$  为振动基座振动位移;  $m_i, \theta_i, d_i$  分别为机械臂 1, 2 的质量、角位移、长度,  $i=1, 2$ , 且假定  $m_i$  为连杆末端的点质量;  $B$  为机械臂振动基座。

### 1.2 动力学建模

由于基座的振动运动是由外界施加的不确定性扰动引起的,而机械臂的运动对基座的振动几乎没有影响。因此,基座对机械臂的作用可认为是不确定的外部扰动。上述简化模型可根据第二类 Lagrange 方法建立其动力学方程为:

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \Delta + U \quad (1)$$

式中  $H(q)$  为有效惯量;  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  为系统的向心力与科氏力项;  $G(q)$  为重力项;  $\Delta$  为由于基座振动产生的惯性不确定项;  $U$  为系统的主动控制力向量;  $q$  为机械臂的角位移。

令  $P_1 = m_2 d_1 d_2, P_2 = m_2 d_2^2, P_3 = m_1 + m_2, g$  为重力加速度,各项表达式为:

$$H(q) = \begin{bmatrix} P_3 d_1^2 + P_2 + 2P_1 \cos \theta_2 & P_2 + P_1 \cos \theta_2 \\ P_2 + P_1 \cos \theta_2 & P_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} -P_1 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 - 2P_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ P_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} P_3 g d_1 \sin \theta_1 + m_2 g d_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ m_2 g d_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} -P_3 \ddot{y}_s \\ -m_2 d_2 \ddot{y}_s \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

## 2 控制器设计与收敛性分析

### 2.1 位置控制器设计

在作者之前的研究中<sup>[1-2]</sup>,已经对该控制算法在柔性条件下的稳定性进行了分析,给出了镇定控制与轨迹跟踪控制的数值仿真结果。与之前的研究不同的是,本文首次搭建试验装置研究了该控制算法实现镇定控制的有效性,并首次提出了控制算法的

有限时间收敛特性与控制器计算流程。

一个同时考虑重力、外部扰动与负载变化的 2-DOF 机械臂模型的不确定动力学方程可写为：

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = U + S' \quad (6)$$

式中  $U$  为系统所受广义控制力,  $S'$  表示由基座振动产生的不确定扰动, 包括重力项  $G(q)$  和由于惯量变化等因素产生的不确定扰动项  $\Delta$ 。

$$S' = -G(q) + \Delta \quad (7)$$

假设  $S'$  被有界正实数  $s'_0$  约束：

$$\|S'\| \leq s'_0 \quad (8)$$

由式(6), 设计位置控制器为

$$U = -k_d \dot{q} - k_p q \quad (9)$$

式中

$$k_d = \alpha H, k_p = \beta I \quad (10)$$

式中  $I$  为等效到电机转轴上的转动惯量, 定义  $\alpha, \beta, V$  为：

$$\alpha = \sqrt{\frac{\beta}{M}} \quad (11)$$

$$\beta = \frac{3U_0^2}{8V(q, \dot{q})} \quad (12)$$

$$V(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} (\dot{q}^T H \dot{q} + \beta q^2 + \alpha \dot{q}^T H \dot{q}) \quad (13)$$

式(6)所示的动力学方程有以下几点特性：

**性质 1** 惯量矩阵  $H(q)$  为正定对称矩阵, 且有上界和下界, 对于任意一个向量  $z$ , 有：

$$mz^2 \leq \|H(q)z, z\| \leq Mz^2 \quad (14)$$

式中  $m, M$  为常数, 且  $0 < m \leq M$ ;  $z^2$  表示向量  $z$  欧式范数的平方,  $\|\cdot\|$  表示向量或矩阵的欧式范数。

**性质 2** 矩阵  $N(q, \dot{q})$  为反对称矩阵：

$$N(q, \dot{q}) = \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}) \quad (15)$$

且对于任意一个向量  $z$ , 存在：

$$z^T N(q, \dot{q}) z = 0 \quad (16)$$

**性质 3** 存在常数  $U_0 > 0$ , 使得：

$$\|U\| \leq U_0 \quad (17)$$

**性质 4** 由基座振动和载荷不确定性引起的未知扰动向量  $S$ , 在实际应用中满足如下的条件：

$$\|S\| \leq S_0, \quad S_0 > 0 \quad (18)$$

式中  $S_0$  为任意正常数。

## 2.2 稳定性分析

为便于验证控制器的有限时间收敛性质, 给出非线性系统有限时间稳定的相关引理。

**引理<sup>[10]</sup>**：

考虑非线性系统  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ , 若在复数域内存在一个函数  $V(x) > 0$ , 满足：

$$\dot{V}(x) \leq -cV^\alpha(x), x \in D/\{0\} \quad (19)$$

式中  $c > 0, 0 < \alpha < 1, D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , 则系统是有限时间稳定的。

接下来, 验证系统在扰动项  $S'$  的影响下的稳定性。取  $V(q, \dot{q})$  的上下界, 由性质 1、式(11)和(12)以及柯西不等式, 式(14)可改写为：

$$\|\alpha \dot{q}^T H \dot{q}\| \leq |\alpha| \sqrt{(\dot{q}^T H \dot{q})(\dot{q}^T H \dot{q})} \leq \frac{1}{2} \dot{q}^T H \dot{q} + \frac{1}{2} \beta q^2 \quad (20)$$

由式(13)和(20)可得：

$$\frac{1}{4} (\dot{q}^T H \dot{q} + \beta q^2) \leq V \leq \frac{3}{4} (\dot{q}^T H \dot{q} + \beta q^2) \quad (21)$$

由式(6)和(9), 对  $V(q, \dot{q})$  求导, 得：

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \frac{1}{2} \alpha \dot{q}^T \dot{H} \dot{q} + \frac{1}{2} \alpha \ddot{q}^T H \dot{q} + \frac{1}{2} \alpha \dot{q}^T \dot{H} \dot{q} + \\ & \frac{1}{2} \dot{\alpha} \dot{q}^T H \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{H} \dot{q} + \dot{q}^T \dot{H} \dot{q} + \beta q^T \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{\beta} q^2 \end{aligned} \quad (22)$$

其中：

$$\dot{\alpha} = -\frac{\alpha}{2V} \dot{V}, \quad \dot{\beta} = -\frac{\beta}{V} \dot{V} \quad (23)$$

由于  $H(q)$  为可逆矩阵, 由式(6)得：

$$\ddot{q} = H^{-1}(U - C\dot{q} + S') \quad (24)$$

将式(23)和(24)代入式(22), 得：

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\alpha \left( \frac{1}{2} \dot{q}^T H \dot{q} + \frac{1}{2} \alpha q^T H \dot{q} + \frac{1}{2} \beta q^T q \right) + \\ & \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{H} \dot{q} - \dot{q}^T C \dot{q} + \frac{1}{2} \alpha \dot{q}^T \dot{H} \dot{q} - \\ & \frac{1}{2} \alpha q^T C \dot{q} + \dot{q}^T S' + \frac{1}{2} \alpha q^T S' \end{aligned} \quad (25)$$

根据性质 2, 进一步分解上述等式可得：

$$\begin{aligned} \dot{V} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\beta}{V} q^2 + \frac{1}{4} \frac{\alpha}{V} \dot{q}^T H \dot{q} \right) = \\ -\alpha \left( \frac{1}{2} \dot{q}^T H \dot{q} + \frac{1}{2} \alpha q^T H \dot{q} + \frac{1}{2} \beta q^T q \right) + \\ \frac{1}{2} \alpha \dot{q}^T \dot{H} \dot{q} - \frac{1}{2} \alpha q^T C \dot{q} + \dot{q}^T S' + \frac{1}{2} \alpha q^T S' \end{aligned} \quad (26)$$

又因为：

$$C\dot{q} = \dot{H}\dot{q} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial q} (\dot{q}^T H \dot{q}) \right)^T \quad (27)$$

式(26)可以被化解为：

$$\begin{aligned} \dot{V} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\beta}{V} q^2 + \frac{1}{4} \frac{\alpha}{V} \dot{q}^T H \dot{q} \right) = \\ -\alpha \left( \frac{1}{2} \dot{q}^T H \dot{q} + \frac{1}{2} \alpha \dot{q}^T H \dot{q} + \frac{1}{2} \beta q^2 \right) + \\ \frac{1}{4} \alpha \left( \dot{q}^T \left( \frac{\partial}{\partial q} H \right) \dot{q} \right)^T q^T + S^T \left( \dot{q} + \frac{1}{2} \alpha q \right) \end{aligned} \quad (28)$$

分别求解方程(28)右边的三项, 由式(11)~(13)可得：

$$\alpha \left( \frac{1}{2} \dot{q}^T H \dot{q} + \frac{1}{2} \alpha \dot{q}^T H q + \frac{1}{2} \beta q^2 \right) = \frac{\sqrt{3} U_0}{2\sqrt{2}M} V^{\frac{1}{2}} \quad (29)$$

根据柯西不等式与  $\left\| \frac{\partial H(q)}{\partial q} \right\| \leq D$ , 得:

$$\frac{1}{4} \alpha \left( \dot{q}^T \left( \frac{\partial H}{\partial q} \right) \dot{q} \right)^T q^T \leq \frac{1}{4} \alpha \sqrt{2} D \dot{q}^2 \|q\| \quad (30)$$

由式(14)和(21)得:

$$q^2 \leq \frac{1}{\beta} (\dot{q}^T H \dot{q} + \beta q^2) \leq \frac{4}{\alpha^2 M} V \quad (31)$$

$$\dot{q}^2 \leq \frac{1}{m} (\dot{q}^T H \dot{q}) \leq \frac{1}{m} (\dot{q}^T H \dot{q} + \beta q^2) \leq \frac{4}{m} V \quad (32)$$

将式(31)和(32)代入式(30), 得:

$$\frac{1}{4} \alpha \left( \dot{q}^T \left( \frac{\partial H}{\partial q} \right) \dot{q} \right)^T q^T \leq \frac{2\sqrt{2} D}{m\sqrt{M}} V^{\frac{3}{2}} \quad (33)$$

由性质 3 和 4, 根据柯西不等式与式(8)得:

$$S^T \left( \dot{q} + \frac{1}{2} \alpha q \right) \leq S_0 \sqrt{\left| \dot{q} + \frac{1}{2} \alpha q \right|^2} = S_0 \sqrt{\dot{q}^2 + \frac{1}{4} \alpha^2 q^2 + \alpha q^T \dot{q}} \leq S_0 \sqrt{\frac{5}{m}} V \quad (34)$$

定义:

$$B(q, \dot{q}) = 1 + \frac{1}{2} \frac{\beta}{V} q^2 + \frac{1}{4} \frac{\alpha}{V} \dot{q}^T H q \quad (35)$$

将式(29), (33)~(35)代入式(28), 得:

$$B \dot{V} \leq -\frac{\sqrt{3} U_0}{2\sqrt{2}M} V^{\frac{1}{2}} + \frac{2\sqrt{2} D}{m\sqrt{M}} V^{\frac{3}{2}} + S_0 \sqrt{\frac{5}{m}} V^{\frac{1}{2}} \quad (36)$$

证明  $B$  恒大于 0, 根据方程(35), 得:

$$B(q, \dot{q}) = \frac{1}{V} \left( \frac{1}{2} \dot{q}^T H \dot{q} + \frac{3}{4} \alpha \dot{q}^T H q + \beta q^2 \right) \quad (37)$$

由式(20)可知:

$$\alpha \dot{q}^T H q \geq -\frac{1}{2} \dot{q}^T H \dot{q} - \frac{1}{2} \beta q^2 \quad (38)$$

将式(38)代入式(37)可得:

$$B \geq \frac{1}{V} \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^T H \dot{q} + \beta q^2 + \frac{3}{4} \left( -\frac{1}{2} \dot{q}^T H \dot{q} - \frac{1}{2} \beta q^2 \right) \right] = \frac{1}{V} \left( \frac{1}{8} \dot{q}^T H \dot{q} + \frac{5}{8} \beta q^2 \right) \geq 0 \quad (39)$$

由式(39)可知, 对于任意的非零系统状态,  $B$  总是大于零。将式(36)中的  $B$  移到不等号的右边, 可得:

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{1}{B(t)} \delta(t) V^{\frac{1}{2}}(T) \quad (40)$$

其中,

$$\delta(t) \leq -\frac{\sqrt{3} U_0}{2\sqrt{2}M} - \frac{2\sqrt{2} D}{m\sqrt{M}} V - S_0 \sqrt{\frac{5}{m}} \quad (41)$$

综上所述,  $V(q, \dot{q})$  为式(6), (9)的 Lyapunov 函数, 根据 Lasalle's 不变集原理与不等式(41), 系统在点  $(q, \dot{q}) = (0, 0)$  附近全局渐近稳定, 并可以得到系

统稳定的充分条件:

$$U > 2 \sqrt{\frac{10M}{3m}} S_0 + \frac{4\sqrt{2n} D}{\sqrt{3} m} V(q, \dot{q}) \quad (42)$$

### 2.3 有限时间收敛性分析

选择系统初始状态, 使初始值  $\delta$  大于零:

$$\delta(t_0) > 0 \quad (43)$$

因此, 根据式(6)和(9),  $V(q, \dot{q})$  对时间的导数满足以下条件:

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{\delta(t)}{B(t)} V^{\frac{1}{2}}(t) \quad (44)$$

存在一个最初的时间  $t_0$ , 函数  $V$  的导数沿着系统  $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = U + S'$  的轨迹, 并满足不等式:

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{\delta(t_0)}{3} V^{\frac{1}{2}}(t), t \geq t_0 \quad (45)$$

因此, 由引理可知, 系统是有限时间稳定的, 且定位误差可以在有限时间内收敛到原点。

下面, 对系统最小收敛时间  $t$  进行估计。

由不等式(38), (43)~(44)可知:

$$\dot{V}(t_0) \leq -\frac{\delta(t_0)}{B(t_0)} V^{\frac{1}{2}}(t_0) \leq -\frac{\delta(t_0)}{3} V^{\frac{1}{2}}(t_0) < 0 \quad (46)$$

因此, 当  $t > t_0$  时, 在点  $t_0$  的一个足够小的邻域内, 不等式  $V(t) > V(t_0)$  恒成立。假设存在相反的情况,  $t' > t_0$  为函数  $V$  在数值  $V(t_0)$  处取值的初始时间, 则当  $t \in (t_0, t')$  时, 有  $V(t) < V(t_0)$ 。因此, 根据不等式(41), (43)可得函数  $\delta(t)$  的范围为:

$$\delta(t) > \delta(t_0) > 0 \quad (47)$$

由不等式(44)可得, 当  $t \in (t_0, t')$  时, 不等式  $\dot{V}(t) < 0$ 。此外, 根据 Lagrange 中值定理, 在  $V(t_0) = V(t')$  前, 存在一个点  $t'' \in (t_0, t')$ , 使  $\dot{V}(t'') = 0$ , 根据反证法可得: 当  $t > t_0$  时,  $V(t) < V(t_0)$ 。上述不等式证明了当  $t > t_0$  时, 存在  $\delta(t) > \delta(t_0) > 0$ , 同时, 由不等式(34), (39), 可证得不等式(45)恒成立。

由不等式(21), (45)可知, 函数  $V$  沿式(6)和(9)的轨迹值趋于 0, 而轨迹本身趋于原点。

为了估计镇定时间, 在区间  $[t_0, t]$  内对不等式(45)积分可得:

$$t - t_0 \leq \frac{6}{\delta(t_0)} \left[ V^{\frac{1}{2}}(t_0) - V^{\frac{1}{2}}(t) \right] \quad (48)$$

当  $V(t) \rightarrow 0$  时,  $t$  连续增大, 得到系统轨迹(6)和(9)从初始状态  $q = q(t_0)$ ,  $\dot{q} = \dot{q}(t_0)$  移动到最终状态  $q = \dot{q} = 0$  所花费的最小时间估计如下:

$$\tau \leq \frac{6}{\delta(q, \dot{q})} V^{\frac{1}{2}}(q, \dot{q}) \quad (49)$$

2.4 控制回路与计算流程

定义：

$$\begin{cases} x = V^{\frac{1}{2}}, & \xi = 2\sqrt{2\dot{q}^T H \dot{q}}, \\ \eta = \frac{2\sqrt{6} U_0}{\sqrt{M}} q \dot{q}, & \gamma = \sqrt{3} U_0 \|q\| \end{cases} \quad (50)$$

其中：

$$\xi^2 + \gamma^2 > 0, \quad |\eta| \leq |\xi\gamma| \quad (51)$$

将式(11),(12)和(50)代入式(13),可得：

$$16x^4 - \xi^2 x^2 - \eta x - y^2 = 0 \quad (52)$$

对于式(52),有如下定理：

定理<sup>[21]</sup>：

所有形式如下的方程：

$$16x^4 - \xi^2 x^2 - \eta x - y^2 = 0 \quad (53)$$

其系数满足不等式(51)时,具有唯一的正实根,且其重数为1。

因此,可以通过牛顿迭代法求解方程(47)得到  $x$  的值,然后依次求出  $V, k_p, k_d, U$  的值,机械臂位置控制回路如图3所示。

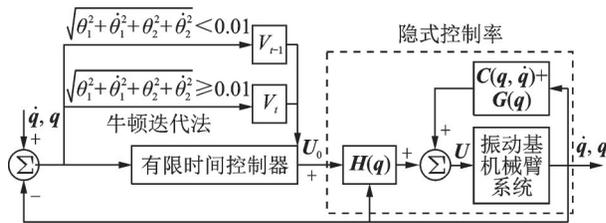


图3 机械臂位置控制回路

Fig. 3 Position control scheme of manipulator

3 试验验证与分析

3.1 试验设置

搭建振动基机械臂试验装置如图4所示。

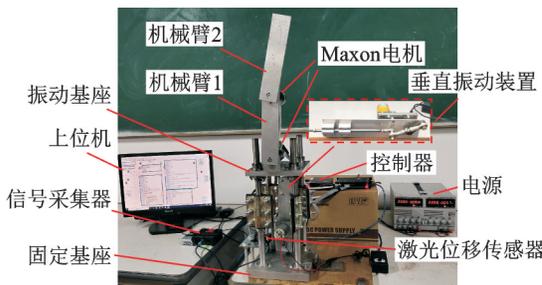


图4 振动基机械臂试验装置

Fig. 4 Experiment equipment of vibration-based manipulator

试验装置主要由机械部分和控制部分组成。机械部分由机械臂1,2(包括臂体、直流电机、行星齿轮减速器)、振动装置、夹具板、用于保持底座振动方

向的四个导向杆、固定基座、振动基座等组成。两机械臂均为45号钢材料,均由Maxon公司生产的EC45型直流无刷电机经GP52C型行星齿轮减速器进行驱动,均可绕电机轴360°旋转。其中,机械臂1,2与其驱动电机均采用键连接,机械臂1的驱动电机固定在振动基座上,机械臂2的驱动电机固定在机械臂1上。垂直振动装置固定在振动基座下端,其振动激励由一个供电电压为24 V,最大频率为2 Hz的DS-400.110/S555S型直流减速电机驱动的曲柄滑块机构提供,所选曲柄滑块机构的行程为0~80 mm。在固定基座的四角上设置有四个滑动轴承,可以使固定基座沿着安装在固定底板上的导向杆垂直滑动,振动基座被垂直振动装置支撑。

控制系统数据通讯方案如图5所示。控制部分由PC机、控制器、激光位移传感器、信号采集器、电源组成,试验控制算法在PC机内采用LABVIEW编写,每个EC45型电机的末端设置有HEDL5540型光电编码器与霍尔传感器,编码器与70/10型EPOS2数字位置控制器连接,两个位置控制器之间通过CAN总线传递数据并均通过USB接口和PC机进行通讯交换数据,振动位移测量传感器采用日本松下公司生产的HG-C1400型激光位移传感器,其测试精度为0.3 mm,供电电源为MCH-303D-II型直流稳压电源。

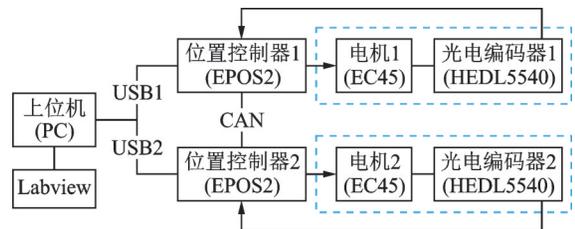


图5 控制系统数据通讯方案

Fig. 5 Control system data communication scheme

本试验采用电流环、速度环与位置环的三环控制,其中,电流环采用EPOS2数字位置控制器系统内嵌的PI控制,速度环以电流环为内控回路,采用PI反馈、速度反馈、加速度反馈的控制策略,位置环采用如图3所示的机械臂位置控制回路,系统控制原理如图6所示。

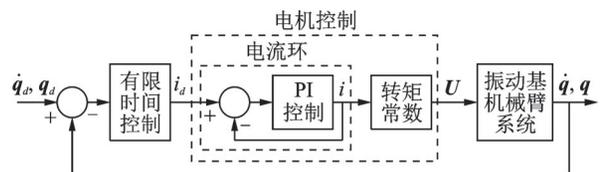


图6 控制原理

Fig. 6 Control principle

经激光位移传感器测量与信号采集器采集,由振动装置产生的振动位移如图7所示。

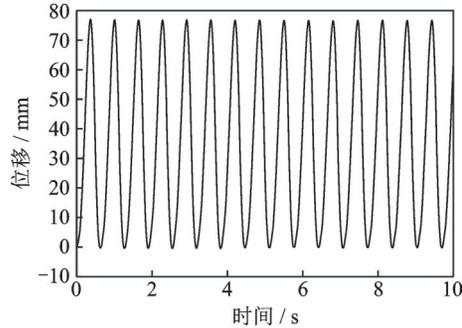


图7 振动位移

Fig. 7 Vibration displacement

为验证本文提出算法在控制时间与准确度方面的优越性,采用目前工程上机械臂常用的固定参数PD控制器并增加重力补偿项后进行对照试验,其控制率如下:

$$U_{PD} = -k_1 \dot{q} - k_2 q + G(q) \quad (54)$$

设置机械臂1,2的初始角位置分别为0.25 rad, 0.65 rad,初始角速度均为0,定位目标角位置与角速度均为0。试验装置的系统参数与控制参数如表1所示,其中 $J_1, J_2$ 分别为机械臂1,2驱动减速器与电机的转动惯量, $J_u$ 为机械臂相对于质心的转动惯量, $U$ 为控制输入。此外,由于本试验采用三环控制,因此在试验中电机的控制输入通过电流环的电流输入实现。

表1 系统参数及控制参数

Tab. 1 System parameters and control parameters

参数	数值	参数	数值
$d_1/m$	0.21	$k_p$	120
$d_2/m$	0.21	$k_d$	80
$J_1/(kg \cdot m^2)$	$1.81 \times 10^{-5}$	$m_1/kg$	0.228
$J_2/(kg \cdot m^2)$	$1.904 \times 10^{-5}$	$m_2/kg$	0.228
$J_u/(kg \cdot m^2)$	$5 \times 10^{-5}$	$U/(N \cdot m)$	5

为验证本文所设计的基于隐式Lyapunov函数的有限时间控制器(IL控制器)在振动与变负载工况下的有效性与优越性,通过在机械臂2上分别增加0.125, 0.25 kg的质量块模拟负载变化工况,通过启停振动装置模拟外界振动工况,并结合PD控制器设置了两组对照试验。此外,当试验误差 $e = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2}$ 小于0.05 rad时,可认为机械臂到达既定目标位置,停止试验。试验组设计如表2所示。

### 3.2 试验结果与分析

试验一工况下机械臂的运动响应结果如图8所

表2 试验组设计

Tab. 2 Experiment groups design

组别	控制器	振动情况	负载/kg
试验一	IL	无振动	0
	IL	无振动	0.125
	IL	无振动	0.25
	PD	无振动	0
	PD	无振动	0.125
	PD	无振动	0.25
试验二	IL	垂直振动	0
	IL	垂直振动	0.125
	IL	垂直振动	0.25
	PD	垂直振动	0
	PD	垂直振动	0.125
	PD	垂直振动	0.25

示,其中:图8(a),(b)分别给出了机械臂1,2的角位移曲线;图8(c),(d)分别给出了机械臂1,2的角速度曲线;图8(e),(f)分别为机械臂1,2的电流曲线。由图8(a)~(d)可知,采用基于IL控制算法的有限时间控制器在0,0.125,0.25 kg负载下机械臂1的定位误差分别为:-0.0027,0.0061,-0.0089 rad;机械臂2的定位误差分别为:0.0072,-0.0193,-0.0273 rad。相对于标称系统主要差别体现在图8(a),(b)中机械臂1,2的最大角位移的绝对值相对增加,以及图8(e),(f)中最大电流相对增加,这主要是由于两组负载相对于机械臂本体质量分别大幅增加约54.35%,109.65%,但对整体控制效果没有明显影响。此外,IL控制算法有着根据外部负载的增加自行调节控制电流输入大小的特点,表现为连续时变反馈的PD型控制,这是由于IL控制器的控制增益结合了反映系统稳定程度的Lyapunov函数值,当系统越趋于不稳定时,控制输入反而大幅增加,从而最终使系统逐渐趋于稳定。

然而,由于PD控制器在增加外部扰动后无法满足控制精度的条件,同时其控制输入在2.5 s后基本趋于稳定,为便于对比两种控制方法的效果,设置于3.1 s时停止试验。基于PD控制算法的控制器在0,0.125,0.25 kg负载下机械臂1的定位误差分别为:0.0126,0.0526,0.0651 rad;机械臂2的定位误差分别为:0.0173,0.0500,0.0624 rad,均显著高于IL控制器的定位误差。这主要是由于PD控制器的控制电流输入采用的是常数增益值,当机械臂的外部负载增加时,控制电流输入无法根据定位误差自适应调节大小,导致图8(f)中PD控制器的输入电流在0~0.5 s的初始试验时间内产生了显著的振荡,继而导致在机械臂外部负载增加后的定位精度显著下降。

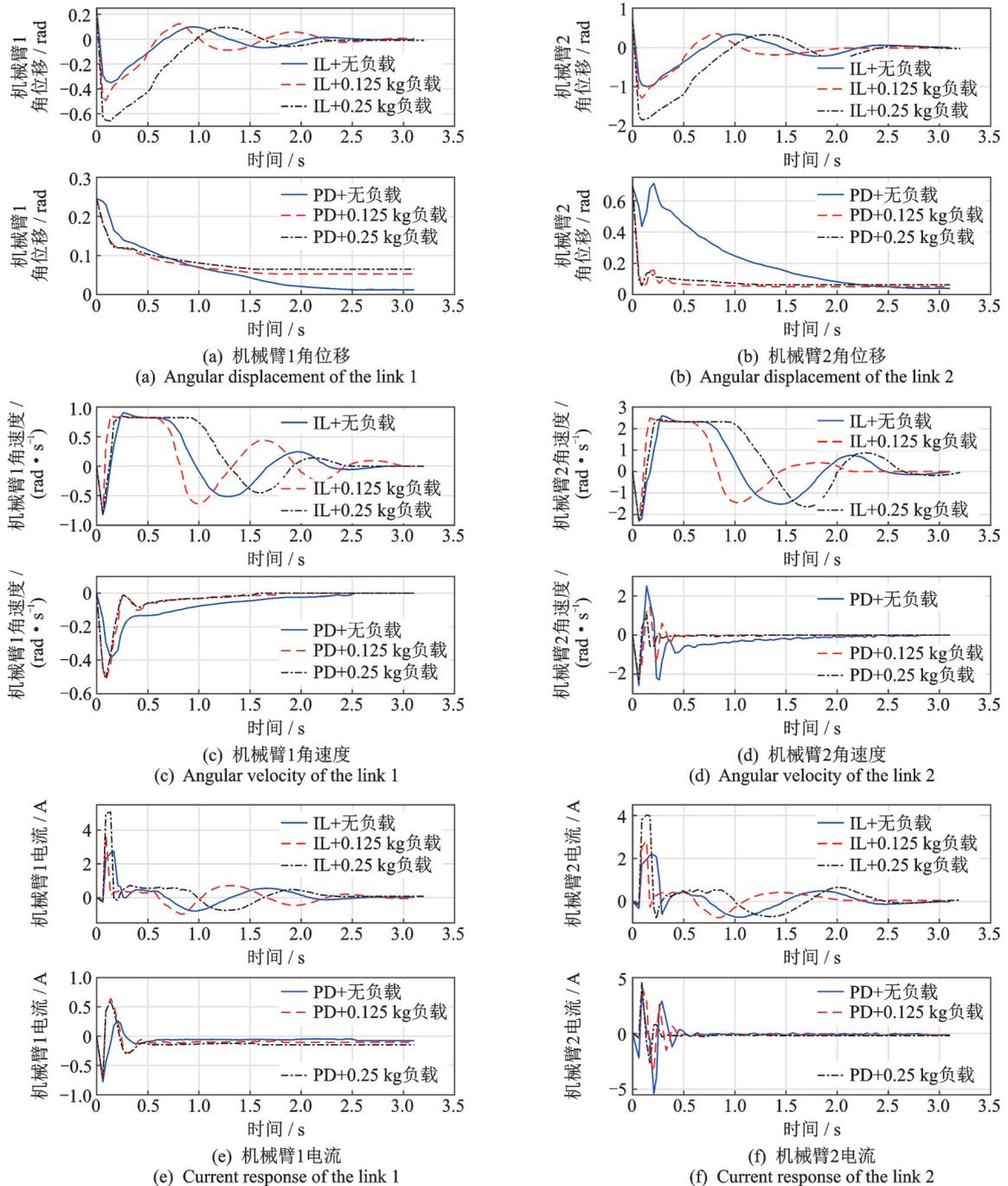


图8 试验一工况下机械臂运动响应

Fig. 8 Motion responses of manipulator in the first experimental group

试验二工况下机械臂的运动响应结果如图9所示,其中:图9(a),(b)分别给出了机械臂1,2的角位移曲线;图9(c),(d)分别给出了机械臂1,2的角速度曲线;图9(e),(f)分别为机械臂1,2的电流曲线。由图9(a)~(d)可知,在机械臂遭受垂直振动激励时,采用IL控制算法在0,0.125,0.25 kg负载下机械臂1的定位误差分别为:  $-0.0063$ ,  $-0.0002$ ,  $-0.0011$  rad;机械臂2的定位误差分别为:  $0.0069$ ,  $-0.0190$ ,  $-0.0006$  rad。

在垂直振动工况下,IL控制器的收敛时间几乎保持不变,说明控制器能完全抑制施加的垂直振动

激励,在有限时间内完全实现机械臂准确定位。相对于存在振动激励的标称系统与负载增加的无振动系统,其主要差别体现在图9(e),(f)中0~1 s区间的电流数值变化较为剧烈,从而导致图9(a),(b)中机械臂1,2的初始角位移更大,但仍能快速收敛,这主要是由于添加的负载相对机械臂本体的质量较大且同时存在剧烈振动造成的。但在这类恶劣工况下,IL控制器仍能控制机械臂快速收敛至期望位置,充分地体现了本文设计的基于隐式Lyapunov函数的有限时间控制器在振动与负载增加同时存在的恶劣工况下仍能根据其自身特点自适应调整控制增

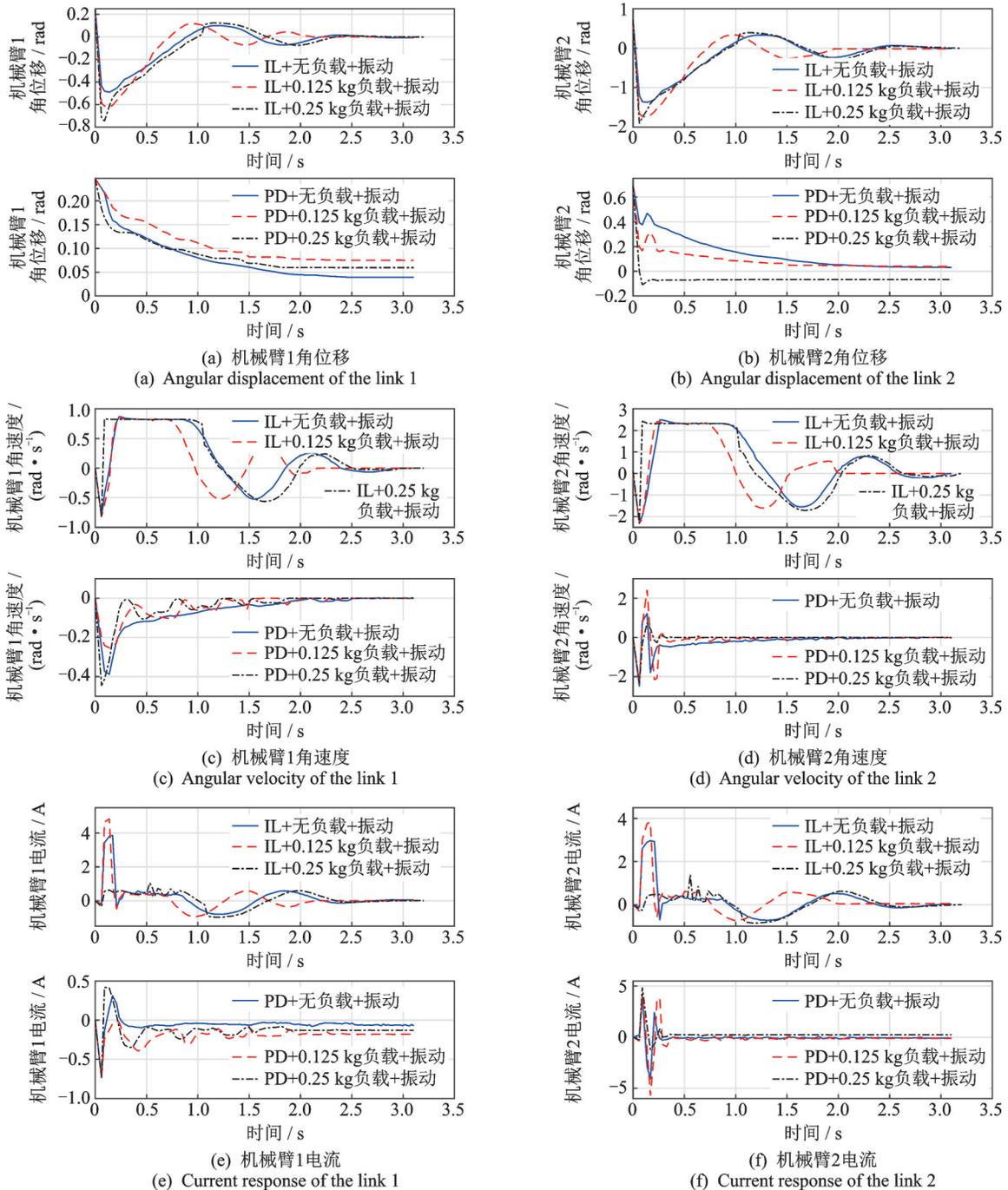


图 9 试验二工况下机械臂运动响应

Fig. 9 Motion responses of manipulator in the second experimental group

益使系统快速趋于稳定,且具有很好的控制性能,充分反映了IL控制器具有较好的抗干扰性与鲁棒性。

然而,基于PD控制算法的控制器在0,0.125,0.25 kg负载下机械臂1的定位误差分别为:0.0447,0.0753,0.0596 rad;机械臂2的定位误差分别为:0.0344,0.0384,-0.0672 rad,均显著高于IL控制器的定位误差。特别是图9(a)中,增加0.25 kg负载时,机械臂1的定位误差已经明显趋于恶化,无法实现收敛。此外,图9(c)中试验的0.5~2 s时,机械臂1增加负载后,其角速度产生了较为快速的波动。这表明在振动工况下,PD控制器的控制效果显著下

降,已经无法保证镇定控制的精度。

反映两种控制方法定位误差的绝对值之和以及到达目标位置的控制时长的对比如表3所示。

分析表3可知:本文所设计的基于隐式Lyapunov函数的有限时间控制器相对于增加了重力补偿项的固定增益PD控制器,在外部负载为0,0.125,0.25 kg时,机械臂1,2的定位误差的绝对值之和分别减少了0.0200,0.0772,0.0913 rad;同时存在垂直振动激励与负载增加时,这一数值分别减少到0.0659,0.0945,0.1251 rad。

此外,IL控制器在自身负载增加至0.25 kg时,

表3 控制效果对比

Tab. 3 Comparison of control results

控制方法	振动	负载/kg	定位误差绝对值之和/rad	控制时长/s
IL	否	0	0.0099	约3.1
	否	0.125	0.0254	
	否	0.25	0.0362	约3.2
	是	0	0.0132	约3.1
	是	0.125	0.0192	
	是	0.25	0.0017	
PD	否	0	0.0299	约3.1
	否	0.125	0.1026	无法收敛
	否	0.25	0.1275	
	是	0	0.0791	
	是	0.125	0.1137	
	是	0.25	0.1268	

到达目标位置的耗时相对于无负载情况仅增加约0.1 s;在同时存在外部振动激励与负载增加的工况下,控制时间几乎无增加,进一步说明了基于隐式Lyapunov函数的有限时间控制算法在处理存在振动系统时具有较好的鲁棒性与抗干扰性,能在有限时间内引导系统到达目标位置。

## 4 结论

本文以一种坦克弹药传输机械臂为研究对象,提出了一种在外部振动激励与负载变化的工况下能够实现机械臂有限时间鲁棒镇定控制的方法,通过理论分析和实验验证,本文的主要结论与贡献如下:

(1) 在外部负载为0,0.125,0.25 kg时,采用本文所提出的IL控制器相对于PD控制器的机械臂定位误差绝对值之和分别减少0.0200,0.0772,0.0913 rad;在外部负载为0,0.125,0.25 kg的基础上再增加垂直振动激励时,这一数值分别减少0.0659,0.0945,0.1251 rad。

(2) IL控制器在自身负载增加至0.25 kg时,到达目标位置的耗时相对于无负载情况仅增加约0.1 s,在同时存在外部振动激励与负载增加的工况下,控制时间几乎无增加。

(3) 本文结合有限时间稳定性引理,采用Lyapunov理论证明了所提出方法的有限时间收敛性,并给出了控制器计算流程。试验结果表明,该控制器能在有限时间内引导系统到达目标位置,定位精度高且具有较好的鲁棒性与抗干扰性。

## 参考文献:

- [1] 郭宇飞,侯保林. 传动柔性及负载变化弹药传输机械臂位置控制及柔性振动抑制[J]. 振动与冲击,2015,34(22):1-8.  
Guo Y F, Hou B L. Positioning control and elastic vibration suppressing of an ammunition transfer manipulator with transmission flexibility and payload uncertainty [J]. Journal of Vibration and Shock, 2015, 34(22): 1-8.
- [2] Guo Y F, Xi B C, Mei R L, et al. Singular-perturbed control for a novel SEA-actuated MBT autoloader subject to chassis oscillations[J]. Nonlinear Dynamics, 2020, 101(4): 2263-2281.
- [3] Korayem M H, Nekoo S R, Kazemi S. Finite-time feedback linearization(FTFL) controller considering optimal gains on mobile mechanical manipulators[J]. Journal of Intelligent & Robotic Systems, 2019, 94(3): 727-744.
- [4] Sun W, Wu Y Q. Modeling and finite-time tracking control for mobile manipulators with affine and holonomic constraints[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2016, 29(3): 589-601.
- [5] Cao L, Xiao B, Golestani M. Robust fixed-time attitude stabilization control of flexible spacecraft with actuator uncertainty[J]. Nonlinear Dynamics, 2020, 100(3): 2505-2519.
- [6] Nekoo S R. Model reference adaptive state-dependent riccati equation control of nonlinear uncertain systems: regulation and tracking of free-floating space manipulators[J]. Aerospace Science and Technology, 2019, 84(1): 348-360.
- [7] 梁捷,陈力,梁武林,等. 基座弹性影响下空间站柔性关节机械臂的鲁棒自适应滑模控制及双重弹性振动主动抑制[J]. 载人航天,2016,22(6):788-796.  
LIANG Jie, CHEN Li, LIANG Wulin, et al. Robust adaptive sliding mode control and active dual vibration suppression in flexible joint manipulators of space station with elastic foundation[J]. Manned Spaceflight, 2016, 22(6): 788-796.
- [8] 张振国,陈彦杰,占巍巍,等. 作业型飞行机器人动态滑翔抓取的鲁棒自适应控制[J]. 控制理论与应用, 2021,38(6):775-783.  
ZHANG Zhenguo, CHEN Yanjie, ZHAN Weiwei, et al. Robust adaptive control for unmanned aerial manipulator in dynamic gliding grasping[J]. Control Theory and Applications, 2021, 38(6): 775-783.
- [9] 娄军强,魏燕定,杨依领,等. 空间柔性机械臂弯扭耦合振动的主动控制研究[J]. 振动工程学报,2014,27(3):400-407.

- LOU Junqiang, WEI Yanding, YANG Yiling, et al. Active control of bending-torsion-coupled vibration of a space flexible manipulator[J]. Journal of Vibration Engineering, 2014, 27(3): 400-407.
- [10] 刘洋,井元伟,刘晓平,等. 非线性系统有限时间控制研究综述[J]. 控制理论与应用, 2020, 37(1): 1-12.
- LIU Yang, JING Yuanwei, LIU Xiaoping, et al. Survey on finite-time control for nonlinear systems[J]. Control Theory & Applications, 2020, 37(1): 1-12.
- [11] Rouhani E, Erfanian A. A finite-time adaptive fuzzy terminal sliding mode control for uncertain nonlinear systems[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2018, 16(4): 1938-1950.
- [12] Yi S C, Zhai J Y. Adaptive second-order fast nonsingular terminal sliding mode control for robotic manipulators[J]. ISA Transactions, 2019, 90: 41-51.
- [13] Wang J K, Chen X Q, Fu J K. Adaptive finite-time control of chaos in permanent magnet synchronous motor with uncertain parameters[J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 78(2): 1321-1328.
- [14] Yao Q J. Robust adaptive finite-time attitude tracking control of a 3D pendulum with external disturbance: numerical simulations and hardware experiments[J]. Nonlinear Dynamics, 2020, 102(1): 223-239.
- [15] Zhou M H, Feng Y, Xue C, et al. Deep convolutional neural network based fractional-order terminal sliding-mode control for robotic manipulators[J]. Neurocomputing, 2020, 416(5): 143-151.
- [16] Galicki M. Robust task space finite-time chattering-free control of robotic manipulators[J]. Journal of Intelligent & Robotic Systems, 2017, 85(3): 471-489.
- [17] Liu Y, Jing Y W. Practical finite-time almost disturbance decoupling strategy for uncertain nonlinear systems[J]. Nonlinear Dynamics, 2019, 95(1): 117-128.
- [18] Han S I, Lee J. Finite-time sliding surface constrained control for a robot manipulator with an unknown dead zone and disturbance[J]. ISA Transactions, 2016, 65(1): 307-318.
- [19] 姚来鹏,侯保林. 弹药传输机械臂固定时间终端滑模控制[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2021, 53(1): 109-116.
- YAO Laipeng, HOU Baolin. Fixed-time terminal sliding mode control for ammunition transfer manipulator [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2021, 53(1): 109-116.
- [20] Galicki M. Finite-time control of robotic manipulators [J]. Automatica, 2015, 51(1): 49-54.
- [21] Ananevskii I M. Synthesis of continuous control of a mechanical system with an unknown inertia matrix [J]. Journal of Computer and Systems Sciences International, 2006, 45(3): 356-367.

## Finite time robust stabilization control for vibration-based manipulators with payload uncertainty

MEI Rui-lin<sup>1,2,3</sup>, GUO Yu-fei<sup>1,2,3</sup>, WANG Zhi-gang<sup>1</sup>, HAO Zhi-qiang<sup>1</sup>

(1.Key Laboratory of Metallurgical Equipment and Control Technology of Ministry of Education, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China;

2.Precision Manufacturing Institute, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China;

3.Institute of Robotics and Intelligent Systems, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China)

**Abstract:** A robust finite time control method is proposed to solve the problem of long time and low precision in position control of manipulator with vibrational excitation and payload uncertainty. Firstly, the dynamic equation of the manipulator with external disturbance is established by Lagrange method of the second kind. The vibrational excitation of the base is treated as the inertial uncertainty parameter of the system. A finite time controller based on implicit Lyapunov function is designed. Secondly, in combination with the lemma of finite time stability, Lyapunov theory is used to prove the proposed control algorithm can converge and stabilize in finite time, and the calculation flow of the controller is given. Finally, the two-link manipulator arm with based-vibration is taken as the object, set up the experimental equipment and carry out several groups of contrast experiments considering the vibrational excitation and payload uncertainty. The results show that the proposed method can overcome the influence of the vibrational excitation and payload uncertainty and let the controlled member move to the desire position quickly, with better anti-interference and robustness.

**Key words:** robotic manipulator; vibrational excitation; stabilization control; payload uncertainty; implicit Lyapunov function

作者简介: 梅瑞麟(1998—),男,硕士研究生。电话:15672606352;E-mail:meiruilin0@163.com。

通讯作者: 郭宇飞(1985—),男,副教授。电话:17786528669;E-mail:guoyufei\_1985@163.com。