

非饱和地基中部分埋入桩的水平振动问题

杨紫健¹, 刘浩¹, 张云鹏¹, 邱敏³, 吴文兵^{1,2}

(1. 中国地质大学工程学院, 湖北 武汉 430074; 2. 中国地质大学浙江研究院, 浙江 杭州 311305;
3. 中交第二航务工程局有限公司, 湖北 武汉 430040)

摘要: 本文研究非饱和土中部分埋入桩的水平振动问题, 为模拟桥梁桩基的高承台桩的实际服役状态, 考虑水平简谐荷载和竖向静载的组合作用, 采用 Timoshenko 梁模型和三维连续介质建立了非饱和土-部分埋入桩的耦合振动理论模型, 利用微分变换法和传递矩阵法求得了桩身水平动力响应解析解, 将退化解与已有成果作比较, 验证了本文解的合理性。基于建立的理论模型, 探讨了竖向荷载、埋入比和饱和度对部分埋入桩水平动力特性的影响。研究结果表明: 刚度因子随着竖向荷载的增大而迅速减小, 但是阻尼因子略微减小; 刚度因子和阻尼因子均随着埋入比的增加而减小; 桩身水平位移、转角、弯矩和剪力幅值均随着埋入比的增大而增大, 幅值位置逐渐向上移动; 饱和度较低的对刚度因子的影响很小, 但饱和度大于 0.9 时刚度因子随饱和度的增加而迅速增大, 阻尼因子基本保持不变。

关键词: 非饱和土; 部分埋入桩; 水平振动; 动阻抗; Timoshenko 梁模型

中图分类号: TU435; TU473.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2023)01-0247-09

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2023.01.026

引言

部分埋入式桩基础(高桩)被广泛应用于山区高速铁路、海上平台和深水桥梁等结构物中, 在其服役周期内经常承受由交通、风、浪、流等引起的动荷载, 因此部分埋入桩的水平动力响应引起了国内学者的重视。相比于整体埋入桩, 部分埋入桩由于桩身自由段的存在, 在水平动荷载作用下有可能发生屈曲失稳破坏; 此外, 部分埋入桩受到地震荷载后, 上部竖向荷载和桩身自由段的组合作用很容易产生较大的弯矩和挠曲变形, 难以满足规范的设计要求, 所以部分埋入桩的水平动力响应研究有着重要的理论与工程价值。

Lee 等^[1]采用 Winkler 地基梁模型, 对部分埋入矩形变截面桩的固有频率和振型进行了研究。Catal^[2-3]和 Yusuf 等^[4]应用传递矩阵法, 推导了组合荷载下部分埋入桩的振动偏微分方程, 分析了自由段长度和桩-土边界条件对水平动力响应的影响。Sapountzakis 等^[5]基于边界元法和 Timoshenko 梁模型, 在考虑土体非线性的情况下对部分埋入桩的水平振动特性进行了研究。在国内相关研究方面, 任青等^[6]考虑上部竖向荷载和桩-桩相互作用, 基于

叠加原理研究了部分埋入群桩基础的水平振动特性; 黄茂松等^[7]进一步将其应用于海上风机部分埋入群桩基础的结构共振问题。熊辉等^[8]基于 Winkler 梁模型, 详细地探讨了液化土中桩基的水平振动特性。

以上研究大多采用 Winkler 地基梁模型描述桩土耦合作用, 该模型结构简单, 有利于简化建模过程, 但忽略了土体的连续性, 同时无法考虑土体的固、液、气三相介质特性。为此, Liu 等^[9]将桩周土视为层状饱和土, 提出了一种计算部分埋入群桩基础水平振动阻抗的简化方法。Hu 等^[10]基于 Biot 动力固结方程和 Novak 薄层法, 推导了组合荷载下部分埋入饱和土层桩的动力阻抗; 付鹏等^[11-12]进一步考虑了桩-孔隙水动力相互作用, 分别建立了单层和成层地基中海洋高桩-土-孔隙水耦合振动模型。Zheng 等^[13]研究了非均质多孔介质中部分埋入刚性圆桩在水平简谐荷载下的振动特性。Li 等^[14]和艾志勇等^[15]考虑了层状土的横观各向同性以及水流的冲刷作用, 基于有限元法推导了部分埋入群桩的水平动力方程。

不同于单相土或饱和土, 自然界中非饱和土在应力状态、本构关系上表现得更为复杂^[16-17]。章敏等^[18-19]研究了非饱和土中完全埋入端承桩的水平动

收稿日期: 2021-07-21; **修订日期:** 2021-09-07

基金项目: 中国博士后科学基金(2020M673093); 广东省海洋土木工程重点实验室开放基金(LMCE202003); 浙江省自然科学基金杰出青年项目(LR21E080005)。

力响应,并将其推广到了群桩基础,但该研究尚未考虑上部结构荷载和部分埋入桩自由段的屈曲失稳破坏,而这两个因素对桥梁桩基等高承台桩的动力特性有着非常重要的影响。为此,本文基于 Timoshenko 梁模型和多孔介质模型,建立了非饱和土-部分埋入桩的动力耦合模型,通过传递矩阵法求得了水平简谐荷载与上部竖向静载共同作用下桩顶动力复阻抗的解析解,分析了竖向荷载、埋入比和饱和度对桩体水平振动特性的影响。

1 计算模型与假设条件建立

1.1 数学模型

非饱和土-部分埋入桩的耦合动力模型如图 1 所示,其中假定桩-土界面位移连续并且无相对滑动,接触面为不透水和不透气的边界。水平简谐荷载 $Q_0 e^{i\omega t}$, 简谐弯矩 $M_0 e^{i\omega t}$ 和竖向静荷载 $A_p P$ 作用于桩顶, ω 为激振频率。桩身自由段长为 L_1 , 划分为第一区域; 埋入段长为 L_2 , 划分为第二区域。坐标系为圆柱坐标系 (r, θ, z) , 原点位于自由段与埋入段的分界处中心, z 轴与桩体中心轴线重合。 R_1 为桩体半径。

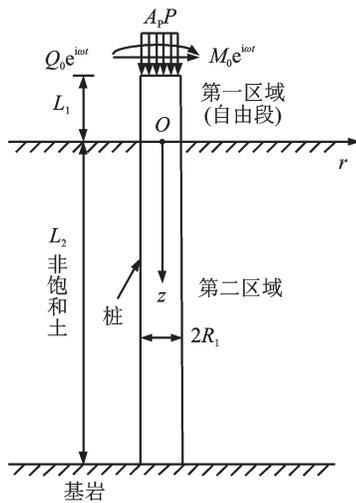


图 1 非饱和土-部分埋入桩动力耦合模型

Fig. 1 Dynamic coupling model of unsaturated soil-partially-embedded pile

1.2 假设条件

本文采用如下基本假定:

- (1) 桩基为均质圆截面弹性杆, 桩周土为各向同性、均匀、黏弹性介质;
- (2) 仅考虑土体的水平位移, 地表不发生转动位移;
- (3) 土体顶部为自由表面, 即无正应力或剪应

力, 土体底部为固定边界;

- (4) 不考虑土体颗粒、孔隙水的压缩性及各相物质间的黏性、惯性耦合效应。

2 控制方程及边界条件

2.1 振动控制方程

2.1.1 土体振动方程

根据黏弹性动力学理论^[20], 桩周土在稳态简谐水平振动作用下的动力控制方程为:

$$G^* \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda_c + G^*) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + M \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + N \nabla(\nabla \cdot \mathbf{w}) = \rho \ddot{\mathbf{u}} + \rho_f \ddot{\mathbf{v}} + \rho_a \ddot{\mathbf{w}} \quad (1)$$

$$D_1 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + D_2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + D_3 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{w}) = \rho_f \ddot{\mathbf{u}} + \frac{\rho_f}{n S_r} \ddot{\mathbf{v}} + \frac{\eta_f}{k_{rf} \kappa} \dot{\mathbf{v}} \quad (2)$$

$$D_4 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + D_5 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + D_6 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{w}) = \rho_a \ddot{\mathbf{u}} + \frac{\rho_a}{n(1-S_r)} \ddot{\mathbf{w}} + \frac{\eta_a}{k_{ra} \kappa} \dot{\mathbf{w}} \quad (3)$$

其中,

$$\lambda_c = \lambda + \alpha \gamma D_1 + \alpha(1-\gamma) D_4, \quad \alpha = 1 - \frac{K_b}{K_s},$$

$$M = \alpha \gamma D_2 + \alpha(1-\gamma) D_5, \quad K_b = \lambda + \frac{2}{3} G^*,$$

$$N = \alpha \gamma D_3 + \alpha(1-\gamma) D_6, \quad D_1 = \frac{a A_{22}}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}},$$

$$D_2 = \frac{1}{n S_r} \frac{A_{22} A_{13} - A_{12} A_{23}}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}}, \quad S_e = \frac{S_r - S_{w0}}{1 - S_{w0}},$$

$$D_3 = \frac{1}{n(1-S_r)} \frac{A_{22} A_{14} - A_{12} A_{24}}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}},$$

$$D_4 = -\frac{a A_{21}}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}},$$

$$D_5 = \frac{1}{n S_r} \frac{A_{11} A_{23} - A_{21} A_{13}}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}},$$

$$D_6 = \frac{1}{n(1-S_r)} \frac{A_{11} A_{24} - A_{21} A_{14}}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}},$$

$$\rho = (1-n) \rho_s + n S_r \rho_f + n(1-S_r) \rho_a.$$

式中 \mathbf{u}, \mathbf{v} 和 \mathbf{w} 分别为土颗粒位移矢量, 孔隙水和孔隙气体相对于土颗粒的位移矢量; λ, G^* 为土骨架的 Lamé 常数, 其中, $G^* = G_0(1 + i\delta_0)$, G_0 和 δ_0 分别是土体的剪切模量和材料阻尼; ∇^2 表示拉普拉斯算子; 其余符号和式子的含义详见文献[20]。

2.1.2 桩体水平振动方程

Zheng 等^[21]采用 Timoshenko 梁模型模拟管桩, 并且建立了考虑竖向荷载情况下的桩基动力平衡方程, 故本文建立组合荷载作用下桩身自由段和埋入

段的动力平衡方程分别为:

$$\begin{cases} \frac{d^4 \bar{u}_1}{dz^4} + W \frac{d^2 \bar{u}_1}{dz^2} + J \bar{u}_1 = 0 \\ \frac{d^4 \bar{\theta}_1}{dz^4} + W \frac{d^2 \bar{\theta}_1}{dz^2} + J \bar{\theta}_1 = 0 \end{cases}, -L_1 \leq z \leq 0 \quad (4)$$

$$\begin{cases} \frac{d^4 \bar{u}_2}{dz^4} + W \frac{d^2 \bar{u}_2}{dz^2} + J \bar{u}_2 = \\ \frac{1}{k' A_p G_p} \frac{d^2 q_h}{dz^2} + \left(\frac{\rho_p \omega^2}{k' A_p G_p E_p} - \frac{1}{E_p I_p} \right) q_h \\ \frac{d^4 \bar{\theta}_2}{dz^4} + W \frac{d^2 \bar{\theta}_2}{dz^2} + J \bar{\theta}_2 = - \frac{k' G_p + P}{k' G_p E_p I_p} \frac{dq_h}{dz}, \\ 0 \leq z \leq L_2 \end{cases} \quad (5)$$

式中:

$$W = \frac{\rho_p \omega^2}{E_p} + \frac{\rho_p \omega^2}{k' G_p} + \frac{A_p P}{E_p I_p}, J = \frac{\rho_p^2 \omega^4}{k' G_p E_p} - \frac{\rho_p A_p \omega^2}{E_p I_p};$$

$\bar{u}_1, \bar{\theta}_1$ 分别为桩身自由段的水平位移和转角的幅值;
 $\bar{u}_2, \bar{\theta}_2$ 分别为桩身埋入段的水平位移和转角的幅值;
 $\rho_p, E_p, I_p, G_p, A_p$ 和 k' 分别为桩体的密度、弹性模量、转动惯性矩、剪切模量、横截面积和剪切形状系数; P 为桩体受到的竖向静荷载; q_h 为沿桩身单位长度的侧向阻力。

2.2 边界条件

非饱和土层的边界条件为:

(1) 水平方向无限远处土体位移均趋近于 0:

$$\begin{cases} u_r|_{r=\infty} = v_r|_{r=\infty} = w_r|_{r=\infty} = 0 \\ u_\theta|_{r=\infty} = v_\theta|_{r=\infty} = w_\theta|_{r=\infty} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

式中 下标 r 和 θ 分别表示土体三相位移在径向和环向上的分量。

(2) 地基地部水平位移为 0:

$$u_r|_{z=L_2} = u_\theta|_{z=L_2} = 0 \quad (7)$$

(3) 在忽略土层竖向位移的条件下,地表转角为 0:

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad (8)$$

桩-土接触面连接条件为:

(1) 桩土完全接触,接触面无滑动脱离:

$$u_r|_{r=R_1} = \bar{u}_2(z) \cos \theta, u_\theta|_{r=R_1} = -\bar{u}_2(z) \sin \theta \quad (9)$$

(2) 桩-土接触面不透水,不透气:

$$v_r|_{r=R_1} = w_r|_{r=R_1} = 0 \quad (10)$$

(3) 桩底简化为固定支座,可表示为:

$$\bar{u}_2(L_2) = 0, \bar{\theta}_2(L_2) = 0 \quad (11)$$

3 方程求解

3.1 桩周土振动方程的求解

文献[19]采用 Laplace 变换技术对非饱和土在水平简谐激励下的振动问题进行了求解,求得土颗粒径向位移和沿桩身单位长度的侧向阻力分别为:

$$u_r = \sum_{n=1}^{\infty} (A_{4n} \Omega_{4n} - A_{1n} \Omega_{1n} - A_{2n} \Omega_{2n} - A_{3n} \Omega_{3n}) \cdot \cos \theta \operatorname{ch}(g_n z) \quad (12)$$

$$q_h = \pi R_1 \sum_{n=1}^{\infty} (E_{1n} \tilde{A}_{1n} + E_{2n} \tilde{A}_{2n} + E_{3n} \tilde{A}_{3n} - \beta_{4n}^2 G^* K_1(\beta_{4n} R_1) \tilde{A}_{4n}) U_n \operatorname{ch}(g_n z) \quad (13)$$

其中,

$$\Omega_{1n} = \frac{\beta_{1n}}{2} [K_2(\beta_{1n} r) + K_0(\beta_{1n} r)],$$

$$\Omega_{2n} = \frac{\beta_{2n}}{2} [K_2(\beta_{2n} r) + K_0(\beta_{2n} r)],$$

$$\Omega_{3n} = \frac{\beta_{3n}}{2} [K_2(\beta_{3n} r) + K_0(\beta_{3n} r)],$$

$$\Omega_{4n} = \frac{\beta_{4n}}{2} [K_2(\beta_{4n} r) - K_0(\beta_{4n} r)]$$

$$\beta_4^2 = \frac{\rho_s^2}{G^*} - \frac{\rho_a^2 s^4}{G^* b_a} - \frac{\rho_f^2 s^4}{G^* b_f} - g_n^2,$$

$$b_f = \frac{\rho_f s^2}{n S_r} + \frac{\eta_f s}{k_{rf} \kappa}, b_a = \frac{\rho_a s^2}{n(1-S_r)} + \frac{\eta_a s}{k_{ra} \kappa}, s = i\omega,$$

$$E_{in} = -[\lambda + 2G^* + \gamma D_1 + (1-\gamma) D_4 + d_{fi} \gamma D_2 + d_{fi} (1-\gamma) D_5 + d_{ai} \gamma D_3 + d_{ai} (1-\gamma) D_6] \cdot$$

$$\beta_{in}^2 K_1(\beta_{in} R_1),$$

$$A_{1n} = \tilde{A}_{1n} U_n, A_{2n} = \tilde{A}_{2n} U_n,$$

$$A_{3n} = \tilde{A}_{3n} U_n, A_{4n} = \tilde{A}_{4n} U_n,$$

$$d_{fi} =$$

$$\frac{(D_3 D_4 - D_1 D_6) \beta_i^4 + (D_1 b_a - \rho_a s^2 D_3 + \rho_f s^2 D_6) \beta_i^2 - \rho_f s^2 b_a}{(D_2 D_6 - D_3 D_5) \beta_i^4 - (D_2 b_a + D_6 b_f) \beta_i^2 + b_f b_a}$$

$$d_{ai} =$$

$$\frac{(D_1 D_5 - D_2 D_4) \beta_i^4 + (D_4 b_f + \rho_a s^2 D_2 - \rho_f s^2 D_5) \beta_i^2 - \rho_a s^2 b_f}{(D_2 D_6 - D_3 D_5) \beta_i^4 - (D_2 b_a + D_6 b_f) \beta_i^2 + b_f b_a}$$

式中 β_1^2, β_2^2 和 β_3^2 是采用数值计算方法求得的非零解; $I_m(\cdot)$ 和 $K_m(\cdot)$ 分别为第一、二类 m 阶虚宗量贝塞尔函数; $\tilde{A}_m (i=1, 2, 3, 4)$ 为通过计算方程组确定的系数; $g_n = (2n-1)\pi/(2L), (n=1, 2, 3, \dots)$, 下标 n 表示第 n 阶模态; U_n 为待定系数。

3.2 桩体水平振动方程的求解

将式(13)代入非齐次线性常微分方程组(5)并进行求解,可得:

$$\begin{aligned} \bar{u}_2(z) = & S_{21} \cos(\lambda_1 z) + S_{22} \sin(\lambda_1 z) + \\ & S_{23} \operatorname{ch}(\lambda_2 z) + S_{24} \operatorname{sh}(\lambda_2 z) + \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_{1n} U_n \operatorname{ch}(g_n z) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_2(z) = & S_{25} \cos(\lambda_1 z) + S_{26} \sin(\lambda_1 z) + \\ & S_{27} \operatorname{ch}(\lambda_2 z) + S_{28} \operatorname{sh}(\lambda_2 z) + \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_{2n} U_n \operatorname{sh}(g_n z) \end{aligned} \quad (15)$$

其中,

$$\begin{aligned} \lambda_1 = & \sqrt{\frac{W + \sqrt{W^2 - 4J}}{2}}, \lambda_2 = \sqrt{\frac{-W + \sqrt{W^2 - 4J}}{2}}, \\ F_n = & E_{1n} \tilde{A}_{1n} + E_{2n} \tilde{A}_{2n} + E_{3n} \tilde{A}_{3n} - \\ & \beta_{4n}^2 G^* K_1 (\beta_{4n} R_1) \tilde{A}_{4n}, \\ \Theta_{1n} = & \frac{(g_n^2 E_P R_1^2 + \rho_P R_1^2 \omega^2 - 4k'G_P) F_n}{k'G_P E_P R_1^3 (g_n^4 + Wg_n^2 + J)}, \\ \Theta_{2n} = & -\frac{4g_n (k'G_P + P) F_n}{k'G_P E_P R_1^3 (g_n^4 + Wg_n^2 + J)}. \end{aligned}$$

式中 S_{2i} ($i=1, 2, \dots, 8$) 是由桩体边界条件确定的待定系数。

由于桩-土接触面无滑移脱离, 联立式(12)和(14), 两端同时乘以 $\operatorname{ch}(g_n z)$, 并且在 $[0, L_2]$ 上进行积分, 可解得:

$$U_n = \frac{2(S_{21} f_1 + S_{22} f_2 + S_{23} f_3 + S_{24} f_4)}{L(\Theta_{3n} - \Theta_{1n})} \quad (16)$$

式中

$$\begin{aligned} \Theta_{3n} = & \left(\tilde{A}_{4n} \Omega_{4n} - \tilde{A}_{1n} \Omega_{1n} - \tilde{A}_{2n} \Omega_{2n} - \tilde{A}_{3n} \Omega_{3n} \right) \Big|_{r=R_1}, \\ f_1 = & \frac{g_n \cos(\lambda_1 L_2) \operatorname{sh}(g_n L_2) + \lambda_1 \sin(\lambda_1 L_2) \operatorname{ch}(g_n L_2)}{g_n^2 + \lambda_1^2}, \\ f_2 = & \frac{g_n \operatorname{sh}(g_n L_2) \sin(\lambda_1 L_2) - \lambda_1 \operatorname{ch}(g_n L_2) \cos(\lambda_1 L_2) + \lambda_1}{g_n^2 + \lambda_1^2}, \\ f_3 = & \frac{g_n \operatorname{ch}(\lambda_2 L_2) \operatorname{sh}(g_n L_2) - \lambda_2 \operatorname{sh}(\lambda_2 L_2) \operatorname{ch}(g_n L_2)}{g_n^2 - \lambda_2^2}, \\ f_4 = & \frac{g_n \operatorname{sh}(\lambda_2 L_2) \operatorname{sh}(g_n L_2) - \lambda_2 \operatorname{ch}(\lambda_2 L_2) \operatorname{ch}(g_n L_2) + \lambda_2}{g_n^2 - \lambda_2^2}. \end{aligned}$$

将式(16)代入式(14)和(15)中, 故桩体水平位移和转角幅值表达式分别为:

$$\begin{aligned} \bar{u}_2(z) = & S_{21} \left[\cos(\lambda_1 z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\Theta_{1n} f_1 \operatorname{ch}(g_n z)}{L(\Theta_{3n} - \Theta_{1n})} \right] + \\ & S_{22} \left[\sin(\lambda_1 z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\Theta_{1n} f_2 \operatorname{ch}(g_n z)}{L(\Theta_{3n} - \Theta_{1n})} \right] + \\ & S_{23} \left[\operatorname{ch}(\lambda_2 z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\Theta_{1n} f_3 \operatorname{ch}(g_n z)}{L(\Theta_{3n} - \Theta_{1n})} \right] + \\ & S_{24} \left[\operatorname{sh}(\lambda_2 z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\Theta_{1n} f_4 \operatorname{ch}(g_n z)}{L(\Theta_{3n} - \Theta_{1n})} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_2(z) = & S_{21} \left[\chi_1 \sin(\lambda_1 z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\Theta_{2n} f_1 \operatorname{sh}(g_n z)}{L(\Theta_{3n} - \Theta_{1n})} \right] + \\ & S_{22} \left[\chi_2 \cos(\lambda_1 z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\Theta_{2n} f_2 \operatorname{sh}(g_n z)}{L(\Theta_{3n} - \Theta_{1n})} \right] + \\ & S_{23} \left[\chi_3 \operatorname{sh}(\lambda_2 z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\Theta_{2n} f_3 \operatorname{sh}(g_n z)}{L(\Theta_{3n} - \Theta_{1n})} \right] + \\ & S_{24} \left[\chi_4 \operatorname{ch}(\lambda_2 z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\Theta_{2n} f_4 \operatorname{sh}(g_n z)}{L(\Theta_{3n} - \Theta_{1n})} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

其中,

$$\chi_1 = -\chi_2 = \frac{\rho_P \omega^2}{k'G_P \lambda_1} - \lambda_1, \chi_3 = \chi_4 = \frac{\rho_P \omega^2}{k'G_P \lambda_2} + \lambda_2.$$

利用 Timoshenko 梁中弯矩、剪力与水平位移、转角的关系, 能够推导出桩身埋入段弯矩、剪力的解析表达式, 这里不再赘述。故有:

$$Y_2(z) = [\bar{u}_2(z) \quad \bar{\theta}_2(z) \quad \bar{M}_2(z) \quad \bar{Q}_2(z)]^T \quad (19)$$

式(19)可重新表示为:

$$Y_2(z) = T_2(z) X_2 \quad (20)$$

式中 $X_2 = [S_{21} \quad S_{22} \quad S_{23} \quad S_{24}]^T$, $T_2(z)$ 由式(17)和(18)确定。

$Y_2(0)$ 和 $Y_2(L_2)$ 之间的关系可表示为:

$$Y_2(0) = T_2(0) T_2^{-1}(L_2) Y_2(L_2) \quad (21)$$

类似地, 对齐次线性常微分方程(4)进行求解, 可得:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(z) = & S_{11} \cos(\lambda_1 z) + S_{12} \sin(\lambda_1 z) + \\ & S_{13} \operatorname{ch}(\lambda_2 z) + S_{14} \operatorname{sh}(\lambda_2 z) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_1(z) = & S_{11} \chi_1 \sin(\lambda_1 z) + S_{12} \chi_2 \cos(\lambda_1 z) + \\ & S_{13} \chi_3 \operatorname{sh}(\lambda_2 z) + S_{14} \chi_4 \operatorname{ch}(\lambda_2 z) \end{aligned} \quad (23)$$

式中 S_{1i} ($i=1, 2, 3, 4$) 是由桩体边界条件确定的待定系数。

同样地, 在桩身自由段中:

$$Y_1(z) = [\bar{u}_1(z) \quad \bar{\theta}_1(z) \quad \bar{M}_1(z) \quad \bar{Q}_1(z)]^T \quad (24)$$

式(24)可表示为:

$$Y_1(z) = [T_1(z)] X_1 \quad (25)$$

式中 $X_1 = [S_{11} \quad S_{12} \quad S_{13} \quad S_{14}]^T$, $T_1(z)$ 由式(22)和(23)确定。

$Y_1(0)$ 和 $Y_1(-L_1)$ 之间的关系可表示为:

$$Y_1(0) = T_1(0) T_1^{-1}(-L_1) Y_1(-L_1) \quad (26)$$

利用桩身的连续条件可得:

$$T_1(0) T_1^{-1}(-L_1) Y_1(-L_1) = T_2(0) T_2^{-1}(L_2) Y_2(L_2) \quad (27)$$

从而推导出:

$$Y_2(L_2) = T Y_1(-L_1) \quad (28)$$

式中 $T = T_2(L_2) T_2^{-1}(0) T_1(0) T_1^{-1}(-L_1)$ 。

利用桩端的边界条件可得:

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_1(-L_1) \\ \bar{Q}_1(-L_1) \end{bmatrix} = K_P \begin{bmatrix} \bar{u}_1(-L_1) \\ \bar{\theta}_1(-L_1) \end{bmatrix} \quad (29)$$

式中

$$K_p = - \begin{bmatrix} T(1,3) & T(1,4) \\ T(2,3) & T(2,4) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} T(1,1) & T(1,2) \\ T(2,1) & T(2,2) \end{bmatrix} \quad (29)$$

令桩顶水平动阻抗 K_h 表示为:

$$K_h = \frac{\bar{Q}_1(-L_1)}{\bar{u}_1(-L_1)} = K_p(2,1) \quad (30)$$

故无量纲化的水平动刚度因子 k_h 和动阻尼因子 c_h 分别表示为:

$$k_h = \frac{R_1^3}{E_p I_p} \operatorname{Re}(K_h), \quad c_h = \frac{R_1^3}{E_p I_p} \operatorname{Im}(K_h) \quad (31)$$

假设桩顶边界条件为转角约束,则其转角为0、水平荷载为 Q_0 ,推导出 $Y_1(-L_1)$ 的表达式为:

$$Y_1(-L_1) = \begin{bmatrix} \frac{Q_0}{K_p(2,1)} & 0 & \frac{Q_0 K_p(1,1)}{K_p(2,1)} & Q_0 \end{bmatrix}^T \quad (32)$$

将式(32)代入式(25)中进行求解,可以确定 X_1 中的待定系数 S_{1i} ($i=1, 2, 3, 4$),继而利用传递矩阵法式(28)计算出 $Y_2(L_2)$ 。进一步,求出 X_2 中的待定系数 S_{2i} ($i=1, 2, 3, 4$),由此可得到桩身埋入段水平位移、转角、弯矩和剪力的解析表达式。

4 分析与验证

4.1 计算精度研究

由于解析表达式中含有三角级数,为保证计算结果收敛,本节对三角级数项数引起的误差进行分析。如无特殊说明,桩周土的参数取为: $K_s=36$ GPa, $K_f=2.0$ GPa, $K_a=145$ kPa, $\rho_s=2.7 \times 10^3$ kg/m³, $\rho_f=1.0 \times 10^3$ kg/m³, $\rho_a=1.29$ kg/m³, $\eta_f=1.0 \times 10^{-3}$ Pa·s, $\eta_a=18 \times 10^{-6}$ Pa·s, $k_{rf}=1.0 \times 10^{-4}$ m/s, $k_{ra}=7.2 \times 10^{-6}$ m/s, $n=0.375$, $\gamma=S_r=0.7$, $S_{w0}=0.05$, $\kappa=1.0 \times 10^{-11}$ m², $E_s=25$ MPa, $G_0=1.0 \times 10^7$ Pa, $\delta_0=0.1$, $v_s=0.25$, $\chi=1.0 \times 10^{-4}$ m⁻¹, $m=0.5$, $d=2$ 。桩体的参数具体如下: $L_1=1$ m, $L_2=20$ m, $R_1=0.5$ m, $\rho_p=2.5 \times 10^3$ kg/m³, $k'=0.75$, $E_p=25$ GPa, $v_p=0.3$, $Q_0=100$ kN, $P=10$ MPa。

令三角级数项数 n 分别设置为5, 10, 15和20,结果如图2所示,其中横坐标为无量纲频率 a_0 ($a_0=\omega R_1/V_s$)。由图2可见,桩顶水平动阻抗 K_h 随三角级数项数的变化均趋于收敛;特别是当三角级数项数 $n=10$ 以后,同类型的曲线基本重合,满足精度要求。为了验证该规律的普遍性,通过试算其他工况下三角级数项数对桩顶动力响应的影响,计算结果均可在 $n>10$ 时收敛。因此,下文分析中三角级数项数均取为10。

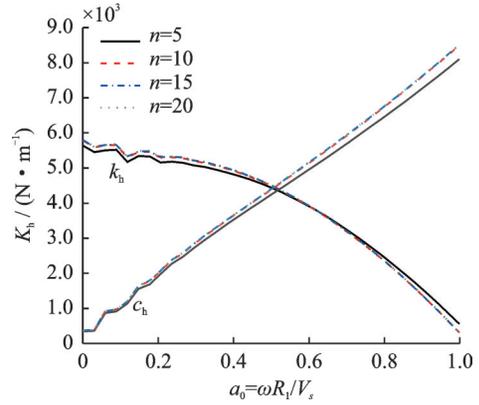
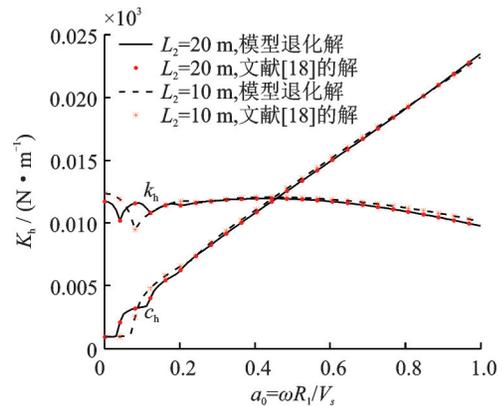


图2 三角级数收敛性分析

Fig. 2 Convergence analysis of trigonometric series

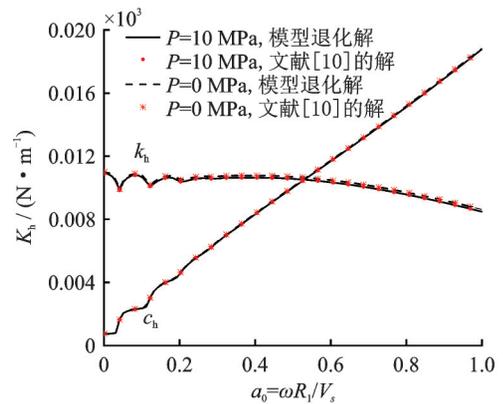
4.2 合理性验证

为验证本文解的合理性,首先将本文模型退化到不考虑竖向荷载时完全埋入桩情况 ($P=0$ MPa, $L_1=0$ m, $L_2=20$ m 和 10 m,其余参数的取值同文献[18]),与文献[18]的解对比;然后,将本文桩周非饱和土退化至饱和两相介质情况 ($S_r=0.999$, $P=10$ MPa 和 0 MPa, $k' \rightarrow \infty$,其余参数取值同文献[10]),与文献[10]的解对比。对比验证情况如图3所示,



(a) 退化解与文献[18]解的对比

(a) Comparison between the solution of degeneration and the existing solution of reference [18]



(b) 退化解与文献[10]解的对比

(b) Comparison between the solution of degeneration and the existing solution of reference [10]

图3 本文解与现有解的比较

Fig. 3 Comparison of present solution with existing solution

发现本文推导所得桩顶水平动阻抗退化解曲线与对应的现有解基本吻合,说明本文模型具有较高的精度和普适性。

5 部分埋入桩水平动力特性分析

5.1 竖向荷载对水平动阻抗的影响

竖向荷载 P 分别设置为0,10,20和30 MPa,其余参数取值均同4.1节。图4显示的是竖向荷载对桩顶水平动阻抗的影响。可以看出,刚度因子随着竖向荷载的增大而迅速减小,而阻尼因子基本不受竖向荷载的影响。这是由于上部竖向荷载的存在使得桩体内位移、剪力发生重分布,降低了桩基抵抗水平变形的能力,因此在进行桩基水平动力设计时,考虑竖向荷载十分有必要。

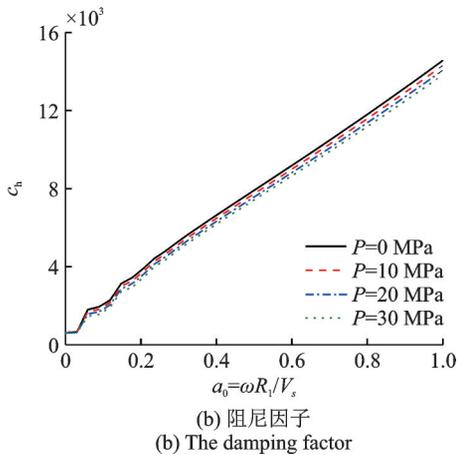
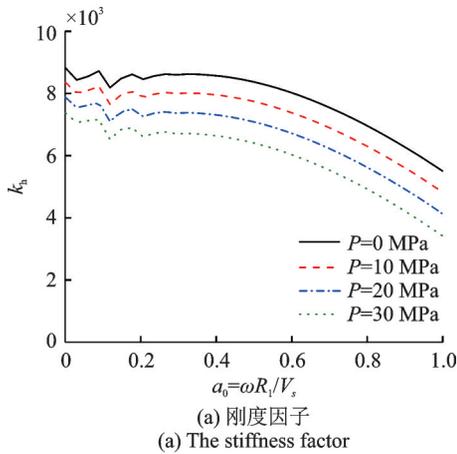


图4 竖向荷载对桩顶水平动阻抗的影响
Fig. 4 Effect of vertical load on horizontal dynamic impedance of pile top

5.2 桩身埋入比对水平动阻抗的影响

保持桩体总长 $L=20$ m和10 m不变,桩身埋入比 L_1/L_2 分别取0,0.05,0.1和0.15,其他参数取值均同4.1节。图5展示的是两种桩体总长情况下桩身埋入比对桩顶水平动阻抗的影响。可以看出,桩顶水平

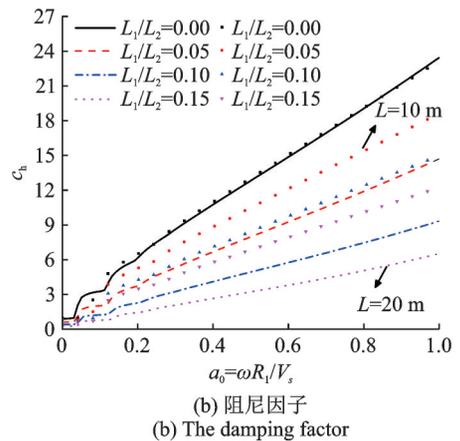
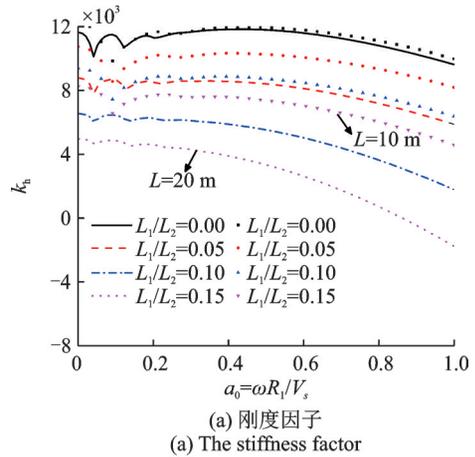


图5 埋入比对桩顶水平动阻抗的影响

Fig. 5 Effect of embedding ratio on horizontal dynamic impedance of pile

动阻抗对埋入比的变化非常敏感,刚度因子和阻尼因子均随着埋入比的增加而迅速减小,说明桩身自由段的存在使得桩身阻抗大幅降低。当 $L=20$ m时,埋入比 L_1/L_2 从0增大到0.15,桩顶水平动阻抗最大可降低约50%,这是由于桩身外延部分增大了整个基础的柔性,弱化了土体对桩基础的约束;同时,随着振动频率的增加,水平动阻抗的弱化现象更加明显。值得注意的是, $L=20$ m时高频范围内的刚度因子在 $L_1/L_2=0.15$ 时已经降低至0并且反向增大,说明此时部分埋入桩的水平承载能力很差,甚至可能发生断裂和破坏。相比之下, $L=10$ m时桩顶水平动阻抗随埋入比的变化程度明显更小,这是因为此时桩体本身具有的刚性不容易被桩周土的作用力改变。总的来说,不同桩土参数使得桩身埋入比对桩顶振动响应的规律有细微差别,但上述分析已经表明,为保证上部结构的安全性,应该严格控制埋入比的取值。

进一步,在高频阶段内研究桩身埋入比对桩体位移和内力分布规律的影响,此处令无量纲激振频率 $a_0=1.0$ 。桩身埋入比对桩体水平位移和转角分布规律的影响如图6所示。由图6可知,桩身转角和位移幅值随着埋入比的增大而迅速增大,并且幅值位置逐渐向上移动。图7反映了桩身弯矩和剪力随

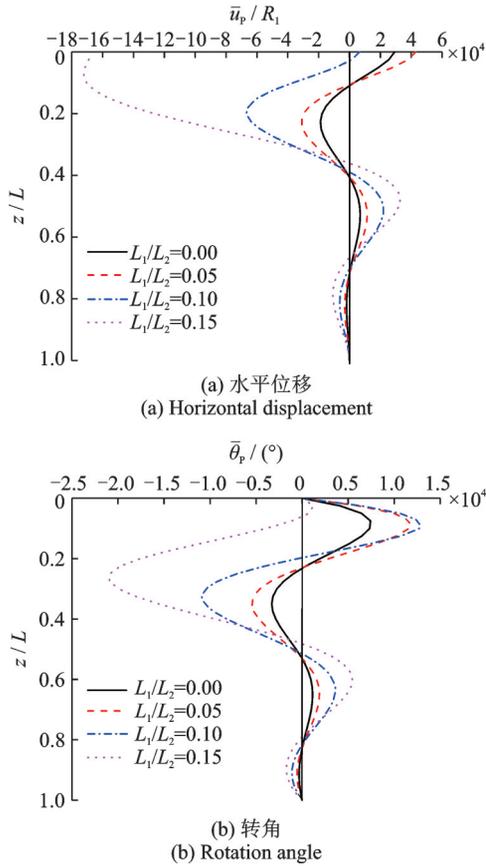


图 6 埋入比对桩体水平位移和转角分布规律的影响
Fig. 6 The influence of embedding ratio on the distribution of horizontal displacement and rotation angle of pile body

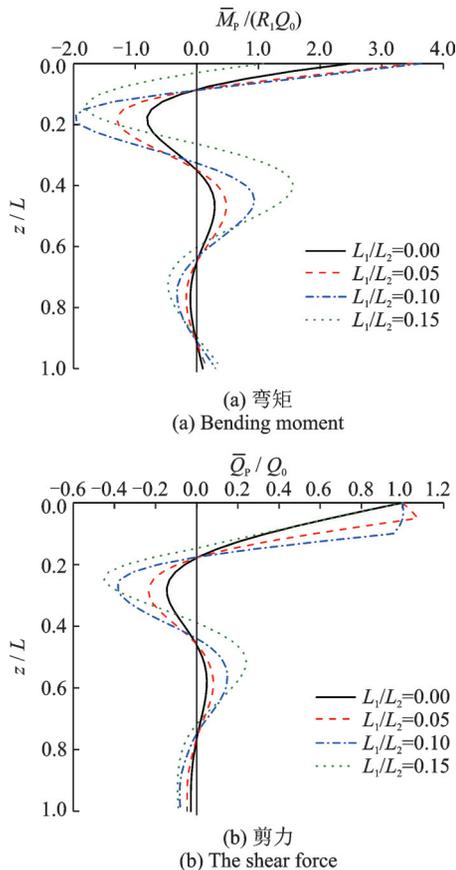


图 7 埋入比对桩体内力分布规律的影响
Fig. 7 The influence of embedding ratio on the force distribution in pile body

埋入比的变化情况。由图 7 可知,与图 6 中转角和位移的变化规律类似,桩身弯矩与剪力幅值也随着埋入比的增大而增大,幅值位置逐渐上移,但其幅值变化程度相对较小。

5.3 饱和度对桩顶水平动阻抗的影响

图 8 展示了不同饱和度下桩顶水平动阻抗随无量纲频率的变化曲线,其中土体饱和度 S_r 分别设置为 0.3, 0.5, 0.7 和 0.9。由图 8 可知,桩顶水平动刚度和动阻尼因子均随着土体饱和度的增加而增大。值得注意的是,由于改变饱和度使得无量纲频率 a_0 不以角频率 ω 为唯一变量,所以此时荷载频率应该采用角频率 ω 。图 9 展示的是不同荷载频率下桩顶水平动阻抗随饱和度的变化曲线,其中计算角频率 ω 分别为 10, 20, 30 和 40 Hz。如图 9 所示,当土体饱和度较低时,刚度因子随饱和度变化的幅值很小,这是因为此时孔隙水参与桩土耦合作用的程度不高。然而,当饱和度大于 0.9 时(此时处于基本饱和状态),非饱和土中由孔隙水承担的应力增大,使得刚度因子随饱和度的增加而迅速增大,从而显著提高了桩体抵抗横向变形的能力。此外,饱和度较低时,

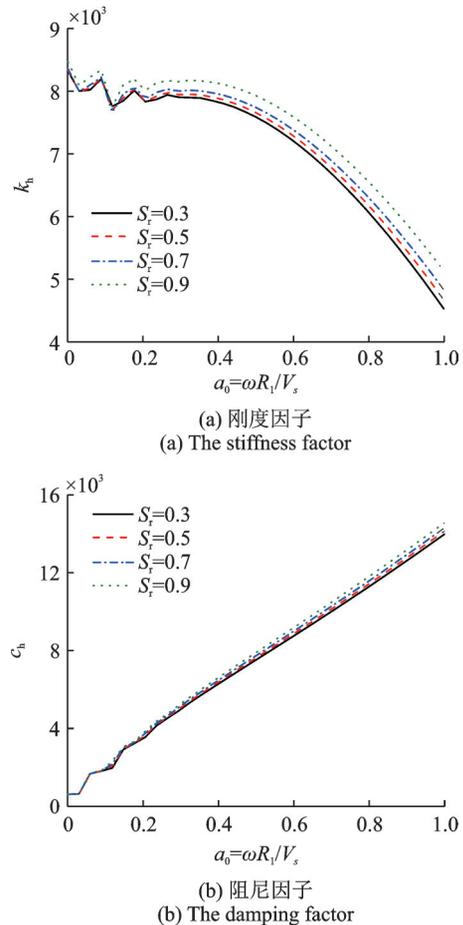


图 8 饱和度对桩顶水平动力阻抗的影响
Fig. 8 Influence of saturation on horizontal dynamic impedance of pile top

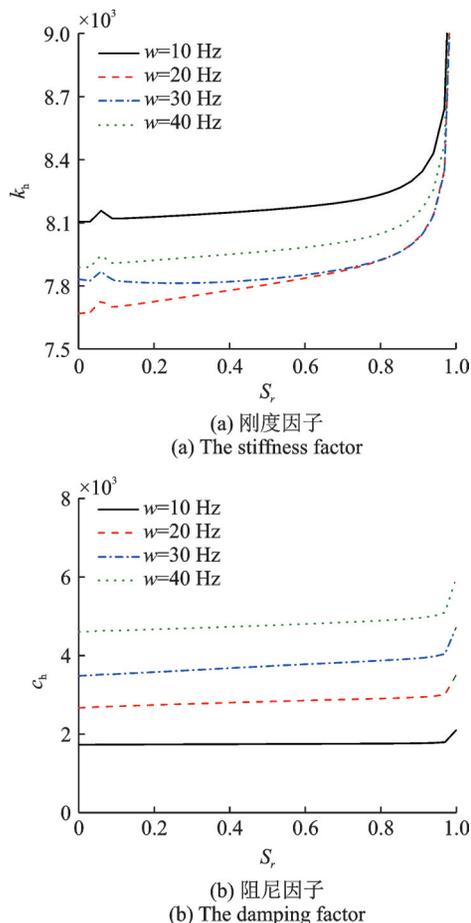


图9 桩顶水平动力阻抗随饱和度的变化

Fig. 9 Variation of horizontal dynamic impedance of pile top with saturation

激振频率的改变会显著影响刚度因子;完全饱和状态时则受激振频率的影响相对小很多,这是由于高频下饱和土中孔隙水压力的消散较为困难。

6 结论

本文采用 Timoshenko 梁模型模拟桩体考虑剪切变形的影响,基于三维连续介质建立了组合荷载下非饱和土-部分埋入桩的耦合计算模型,求得了桩顶动力复阻抗解析解,通过分析竖向荷载、埋入比以及饱和度对桩体动力响应的影响,得出了以下主要结论:

(1) 竖向荷载对桩顶水平动刚度有着显著影响,随着竖向荷载的增大,刚度因子迅速减小,但阻尼因子变化相对较小。因此,在进行桩基水平动力设计时考虑竖向荷载十分有必要。

(2) 刚度因子和阻尼因子均随着埋入比的增加而减小,部分埋入桩的桩顶水平动阻抗小于完全埋入桩;同时,不同桩土参数使得桩身埋入比对桩顶振动响应的影响规律有细微差别,为保证上部结构的安全性应该严格控制埋入比的取值。

(3) 桩体水平位移、转角、弯矩和剪力均随着埋入比的增大而增大,并且幅值位置逐渐向桩身自由段移动。

(4) 饱和度较低时刚度因子随饱和度变化的幅值很小;而饱和度大于 0.9 时,刚度因子随饱和度的增加而迅速增大,阻尼因子基本保持不变。

参考文献:

- [1] Lee B K, Jeong J S, Fan L G, et al. Free vibrations of tapered piles embedded partially in Winkler type foundations [J]. *Journal of Civil Engineering*, 1999, 3(2): 195-203.
- [2] Catal H H. Free vibration of partially supported piles with the effects of bending moment, axial and shear force [J]. *Engineering Structures*, 2002, 24(12): 1615-1622.
- [3] Catal H H. Free vibration of semi-rigid connected and partially embedded piles with the effects of the bending moment, axial and shear force [J]. *Engineering Structures*, 2006, 28(14): 1911-1918.
- [4] Yesilce Y, Catal H H. Free vibration of piles embedded in soil having different modulus of subgrade reaction [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2008, 32(5): 889-900.
- [5] Sapountzakis E J, Kampitsis A E. Nonlinear dynamic analysis of Timoshenko beam columns partially supported on tensionless Winkler foundation [J]. *Computers & Structures*, 2010, 88(21): 1206-1219.
- [6] 任青, 黄茂松, 韩东晓. 考虑轴力的部分埋入群桩基础水平振动特性 [J]. *岩石力学与工程学报*, 2011, 30(9): 1932-1944.
Ren Qing, Huang Maosong, Han Dongxiao. Horizontal vibration characteristics of partially embedded pile group foundation considering axial forces [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2011, 30(9): 1932-1944.
- [7] 黄茂松, 钟锐. 海上风机部分埋入群桩水平-摇摆振动与结构共振分析 [J]. *岩土工程学报*, 2014, 36(2): 286-294.
Huang Maosong, Zhong Rui. Coupled horizontal-rocking vibration of partially embedded pile group and its effect on resonance of offshore wind turbine structures [J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2014, 36(2): 286-294.
- [8] 熊辉, 杨丰. 文克尔地基模型下液化土桩基水平振动响应分析 [J]. *岩土力学*, 2020, 41(1): 103-110.
Xiong Hui, Yang Feng. Analysis of horizontal vibration response of liquefied soil pile foundation under Winkler foundation model [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2020, 41(1): 103-110.
- [9] Liu Y Y, Wang X H, Zhang M. Lateral vibration of pile groups partially embedded in layered saturated soils

- [J]. International Journal of Geomechanics, 2015, 15(4): 04014063.
- [10] Hu A F, Fu P, Xia C Q, et al. Lateral dynamic response of a partially embedded pile subjected to combined loads in saturated soil[J]. Marine Georesources and Geotechnology, 2017, 35(6): 788-798.
- [11] 付鹏, 胡安峰, 李怡君, 等. 海洋高桩基础水平振动特性分析[J]. 振动与冲击, 2019, 38(17): 88-94.
Fu Peng, Hu Anfeng, Li Yijun, et al. Analysis of horizontal vibration characteristics of marine high pile foundation[J]. Journal of Vibration and Shock, 2019, 38(17): 88-94.
- [12] 付鹏, 胡安峰, 李龙, 等. 成层地基中海洋高桩基础水平动力阻抗分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2019, 38(S2): 3790-3798.
Fu Peng, Hu Anfeng, Li Long, et al. Analysis of horizontal dynamic impedance of marine high pile foundation in layered foundation[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2019, 38(S2): 3790-3798.
- [13] Zheng C J, He R, Kouretzis G, et al. Horizontal vibration of a cylindrical rigid foundation embedded in poroelastic half-space [J]. Computers and Geotechnics, 2019, 106: 296-303.
- [14] Li Y, Ai Z Y. Horizontal transient response of a pile group partially embedded in multilayered transversely isotropic soils [J]. Acta Geotechnica: An International Journal of Geoengineering, 2021, 16(1): 335-346.
- [15] 艾智勇, 李志雄. 冲刷作用下层状横观各向同性土中群桩水平振动响应 [J]. 岩土工程学报, 2016, 38(4): 613-618.
Ai Zhiyong, Li Zhixiong. Horizontal vibration response of pile group in transversely isotropic soil under scouring [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2016, 38(4): 613-618.
- [16] Richard F E, Woods R E, Hall Jr. Vibrations of Soils and Foundations[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1970.
- [17] Smeulders D, Dongen M V, Rosette J D L. Waves in partially saturated porous media [J]. Transport in Porous Media, 1992, 9(1): 25-37.
- [18] 章敏, 王星华, 冯国瑞. 非饱和土中端承桩水平振动特性研究[J]. 岩土力学, 2015, 36(2): 409-422.
Zhang Min, Wang Xinghua, Feng Guorui. Research on horizontal vibration characteristic of end-bearing pile in unsaturated soil[J]. Rock and Soil Mechanics, 2015, 36(2): 409-422.
- [19] Zhang M, Zhao C L, Xu C J. Lateral dynamic response of pile group embedded in unsaturated soil[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2021, 142(16): 106559.
- [20] 徐明江. 非饱和土地基与基础的动力响应研究[D]. 广州:华南理工大学, 2010.
Xu Mingjiang. Study on dynamic response of unsaturated soil foundation and foundation [D]. Guangzhou: South China University of Technology, 2010.
- [21] Zheng C J, Luan L B, Qin H Y, et al. Horizontal dynamic response of a combined loaded large-diameter pipe pile simulated by the Timoshenko beam theory[J]. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2020, 20(2): 2071003.

Horizontal vibration of partially embedded piles in unsaturated foundation

YANG Zi-jian¹, LIU Hao¹, ZHANG Yun-peng¹, QIU Min³, WU Wen-bing^{1,2}

(1.Faculty of Engineering, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China;

2.Zhejiang Institute, China University of Geosciences, Hangzhou 311305, China;

3.CCCC Second Maritime Engineering Bureau Co. Ltd., Wuhan 430040, China)

Abstract: In this paper, the horizontal vibration of partially embedded piles in unsaturated soil is mainly studied. In order to simulate the real service state of high bearing platform piles of bridge pile foundation, considering the combined action of horizontal harmonic load and vertical static load, the coupled vibration theoretical model of unsaturated soil and partially embedded piles is established by using Timoshenko beam model and three dimensional continuum model. The analytical solution of horizontal dynamic response of pile is obtained by the decomposition technique of potential technique and the transfer matrix method. The rationality of the solution is verified by comparing the proposed solution with the results of previous scholars. Based on the established theoretical model, the influence of vertical load, embedding ratio and saturation on the horizontal dynamic characteristics of partially embedded piles are discussed in detail. The results show that: the stiffness factor decreases rapidly with the increase of vertical load, but the damping factor decreases slightly at the time; Both stiffness factor and damping factor decrease with the increase of embedding ratio; The horizontal displacement, rotation angle, bending moment and shear amplitude of the pile increase with the increase of the embedding ratio, and the amplitude position moves upward gradually; When the saturation is greater than 0.9, the stiffness factor increases rapidly with the increase of saturation, and the damping factor basically remains unchanged.

Key words: unsaturated soil; partially embedded pile; horizontal vibration; dynamic impedance; Timoshenko beam model

作者简介: 杨紫健(1997—),男,硕士研究生。电话:15180593394;E-mail:yzj1393648253@cug.edu.cn。

通讯作者: 吴文兵(1988—),男,教授。电话:15927208466;E-mail:zjuwub1126@163.com。