

鲁棒性观测矩阵优化设计及其在机械故障诊断中的应用

林慧斌, 陈伟良

(华南理工大学机械与汽车工程学院, 广东 广州 510640)

摘要: 在机械设备故障诊断系统中应用压缩感知(CS)可以有效缓解故障诊断系统数据的传输和存储压力。将观测矩阵的优化设计方法引入机械设备故障诊断系统中。结合机械信号信噪比(SNR)较低的特点,在分析不同观测矩阵优化框架抗噪性能的基础上,得出适用于机械信号的鲁棒性观测矩阵优化框架。基于该优化框架,推导出一种比现有求解方法计算复杂度更低的解析解,提高了优化观测矩阵的求解速度。数值仿真和实验结果表明,所提方法得到的优化观测矩阵具有良好的鲁棒性和更高的计算效率,相比现有的优化观测矩阵和常用的随机矩阵,所提方法可以在更低的信噪比和压缩比下有效地重构机械故障信号。

关键词: 故障诊断; 轴承; 压缩感知; 观测矩阵优化设计; 鲁棒性

中图分类号: TH165⁺.3; TH133.33 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2023)01-0288-11

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2023.01.030

引言

旋转机械的振动信号蕴含着丰富的设备运行信息,对关键部件的运行状态进行在线监测可防患未然,避免灾难性事故发生。传统方法基于香农采样定理对机械设备振动信号进行采样,但实时更新的运行状态数据会导致数据量呈几何级数增长,这给数据传输和存储带来很大的压力,不利于对机械部件的运行状态进行实时监测和诊断。近年来出现的压缩感知理论^[1-4]基于信号的稀疏先验知识,可以在不丢失有用信息的情况下从远低于Nyquist采样率的采样信号中重构原始信号,为有效缓解信号的远程传输与储存负担提供了新的理论。

目前已有一些学者对压缩感知在机械设备故障诊断中的应用进行了研究,如文献[5]建立叶端定时测量的压缩感知模型,并采用多重信号分类算法进行求解,实现旋转叶片振动的在线测量;文献[6]提出采用独立成分分析对压缩后的信号进行处理,并基于统计独立性对信号进行分离和转换,实现多源故障信号的特征提取;文献[7]研究了压缩感知方法在多级风扇周向声模态识别和幅值重构中的应用,并且探讨了传声器数量与周向布局对感知效果的影响;文献[8]提出了多重压缩匹配追踪方法,成功提取了齿轮箱噪声信号中的故障脉冲分量。

虽然学者对压缩感知在机械故障诊断中的应用做了许多的研究,但从现有的文献[5-8]中可以发现,目前的研究内容都集中在稀疏字典和重构算法方面,而压缩过程中使用的几乎都是高斯随机矩阵、伯努利矩阵等非优化观测矩阵,但实际上通过对观测矩阵进行优化能使得压缩感知系统工作在更低的采样率下,或是在相同的采样率下达到更高的重构精度,这对于机械设备的实时监测和故障诊断具有重大意义。在观测矩阵的优化设计方面,已有一些研究成果,Elad^[9]提出了一种以减小平均互相关系数为目的的阈值收缩方法,优化后的观测矩阵在信号重构精度上优于随机生成的测量矩阵。Duarte等^[10]提出一种联合设计并优化非参数字典和观测矩阵的框架,应用于图像的压缩感知。Abolghasemi等^[11-12]在Elad的算法的基础上引入梯度下降算法和自适应梯度下降算法,通过快速迭代求解出测量矩阵。Xu等^[13]以等角紧框架(ETF)为目标,通过基于QR因子分解的方法令等效字典逼近ETF。

此外,一般情况下,信号在字典上很难达到绝对稀疏,因此学者们开始在观测矩阵的优化设计过程中考虑其鲁棒性。Li等^[14]提出了一种同时考虑等效字典的互相干性和稀疏表示误差的优化框架,并用解析法求解测量矩阵。Hong等^[15]提出了一种通过交替优化对观测矩阵进行设计的算法,该方法在含有稀疏表示误差的对象上表现出良好的鲁棒性。

收稿日期: 2021-10-12; 修订日期: 2021-12-22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51875207);广东省基础与应用基础研究基金资助项目(2022A1515011238)。

Hong等^[16]通过引入一个新的惩罚函数,在不需要训练数据的情况下,通过梯度下降法有效地求解出鲁棒性观测矩阵。

从文献检索看,尽管观测矩阵的优化设计方法在图像处理领域已有一定的应用并取得了较好的效果,但目前尚无将优化观测矩阵用于机械故障诊断的先例。分析其原因,主要包括:(1)机械故障信号的信噪比通常较低,现有方法得到的优化观测矩阵在大噪声干扰下的有效性还有待验证;(2)现有的观测矩阵优化过程的计算复杂度较高,进一步制约其在机械故障诊断领域的应用。

1 理论基础

压缩感知的数学模型可以表示为:

$$Y = \Phi X = \Phi \Psi S = AS \quad (1)$$

式中 $Y \in \mathbb{R}^{M \times P}$,表示 P 个压缩得到的 M 维信号; $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$,且 $M \ll N$,表示观测矩阵; $\Psi \in \mathbb{R}^{N \times L}$,且 $N \leq L$,表示字典; $\Phi \Psi = A \in \mathbb{R}^{M \times L}$,称为等效字典; $X \in \mathbb{R}^{N \times P}$,表示 P 个 N 维信号; $S \in \mathbb{R}^{L \times P}$,为信号在字典 Ψ 上的稀疏系数矩阵。若 S 满足 $\|S(:, p)\|_0 = k, \forall p$,则称 X 在字典 Ψ 上为 k -稀疏信号。压缩比 δ 定义为 M 和 N 的比值,即 $\delta = M/N$ 。

压缩感知系统的重构过程是根据下采样的低维数据 Y 重构出原始信号 X ,其过程可以视为求解下式:

$$\begin{aligned} S = \arg \min_S \|Y - AS\|_F^2 \\ \text{s.t. } \|S(:, p)\|_0 \leq k, \forall p \end{aligned} \quad (2)$$

式中 $\|\cdot\|_F$ 表示矩阵的 Frobenius 范数。

1.1 优化框架

学者对评价观测矩阵性能的指标进行了研究^[17-18],目前最常用的观测矩阵优化指标是等效字典 A 的互相关系数(mutual coherence)^[18],其定义为:

$$\mu(A) = \max_{1 \leq i \neq j \leq L} \frac{|A(:, i)^T A(:, j)|}{\|A(:, i)\|_2 \|A(:, j)\|_2} \quad (3)$$

式中 $\|\cdot\|_2$ 表示向量的 2-范数; T 表示转置运算符。

根据文献[18],当满足:

$$k < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\mu(A)} \right) \quad (4)$$

则可以通过求解式(2)稳定地重构信号。从式(4)可以看出, $\mu(A)$ 越小, k 越大,越有利于信号的压缩,因此通过最小化 $\mu(A)$ 可以提高稀疏度 k 的上

限,从而提高 A 的观测性能。当矩阵 A 列归一化,即 $\|A(:, i)\|_2 = 1$ 时, $\mu(A)$ 为矩阵 A 不同列的内积的最大值。矩阵 A 的 Gram 矩阵定义为 $G = A^T A$,当 A 为列归一化矩阵时, G 的对角线为 1,非对角线表示对应列的相关系数。

为了最小化 $\mu(A)$,学者提出了许多优化框架,最初用于评价观测矩阵优化效果的指标是平均互相关系数 $\mu_{av}(A)$,文献[9]中给出的平均互相关系数的定义如下:

$$\mu_{av}(A) = \frac{\sum_{\forall \{(i,j)|\bar{\mu} < |G(i,j)| < 1, i \neq j\}} |G(i,j)|}{N_{av}} \quad (5)$$

式中 $0 < \bar{\mu} < 1$,是一个预定义的参数; N_{av} 为集合 $\{(i,j)|\bar{\mu} < |G(i,j)| < 1, i \neq j\}$ 中元素的个数。通过优化 Gram 矩阵的 $\mu_{av}(A)$,可以间接地降低 $\mu(A)$,然后再从更新后的 A 中反解出观测矩阵 Φ 。

现有的观测矩阵优化设计方法大部分都是通过设计 Gram 矩阵的趋近目标来构造优化框架,可以统一表示为以下形式:

$$A = \arg \min_A \|G_t - G\|_F^2 + \lambda h(\Phi, \Psi) \quad (6)$$

式中 G 为等效字典的 Gram 矩阵; G_t 为目标 Gram 矩阵; $h(\Phi, \Psi)$ 为正则项; λ 为对应的正则项系数。

将 $\Phi \Psi = A$ 代入式(6),得:

$$\Phi = \arg \min_{\Phi} \|G_t - \Psi^T \Phi^T \Phi \Psi\|_F^2 + \lambda h(\Phi, \Psi) \quad (7)$$

在不同的优化框架中, Gram 矩阵 G_t 具有不同的形式。在文献[10-12]中,学者将 G_t 设置为单位矩阵,即 $G_t = I_L$,且没有使用正则项,其优化框架可以表示为:

$$\Phi = \arg \min_{\Phi} \|I_L - \Psi^T \Phi^T \Phi \Psi\|_F^2 \quad (8)$$

式(8)表示使得矩阵 A 不同列之间的相关系数的平均值最小化。

根据文献[19-20],对于列归一化后的矩阵 A ,有 $\mu(A) \in \left[\sqrt{\frac{L-M}{M(L-1)}}, 1 \right]$,即 $\mu(A)$ 存在一个下限。若有 $|A(:, i)^T A(:, j)| = C, \forall i \neq j$,其中 C 为一常数,则称矩阵 A 为等角紧框架(ETF),此时 $\mu(A)$ 取得最小值。基于 ETF 框架的优化模型可以表示为:

$$\Phi = \arg \min_{\Phi} \|G_{etf} - \Psi^T \Phi^T \Phi \Psi\|_F^2 \quad (9)$$

式中 G_{etf} 表示从一组松弛的 ETF 的 Gram 矩阵中搜索得到的最优目标 Gram 矩阵。

此外,即使在良好设计过的字典上,通常信号也很难达到绝对稀疏,而是只能近似稀疏表示,因此实

际应用中压缩感知的数学模型表示为:

$$Y = \Phi X = \Phi(\Psi S + E) = AS + \Phi E \quad (10)$$

式中 $E = X - \Psi S$, 称为稀疏表示误差矩阵或者噪声矩阵。

基于式(8)和(9)得到的优化观测矩阵相比传统的高斯随机矩阵等观测矩阵,能够在更低的压缩比下对无噪声信号进行不丢失信息的观测,但对于带噪声的信号,则不够鲁棒^[14-15]。文献[14]提出一个引入噪声约束项的优化框架,如下式所示:

$$\Phi = \arg \min_{\Phi} \|G_t - \Psi^T \Phi^T \Phi \Psi\|_F^2 + \lambda \|\Phi \bar{E}\|_F^2 \quad (11)$$

式中 $\bar{E} = \bar{X} - \Psi S$, \bar{X} 为优化时使用的训练数据, \bar{E} 表示训练数据在字典 Ψ 上的噪声。

文献[14]的实验结果表明,通过引入约束项 $\|\Phi \bar{E}\|_F^2$ 可以抑制噪声对重构精度的影响。

但在很多场景下,具有代表性的训练数据是比较难以获得的,这大大限制了该优化框架的应用。为了解决这一问题,文献[16]提出可以用 $\|\Phi\|_F^2$ 取代 $\|\Phi \bar{E}\|_F^2$, 该论文假设噪声矩阵的每一列都是服从均值为 0, 方差为 σ^2 的高斯独立同分布噪声向量, 则 $\|\Phi \bar{E}\|_F^2$ 的期望值趋近于 $P\sigma^2 \|\Phi\|_F^2$, 因此得到无需训练数据的优化模型为:

$$\Phi = \arg \min_{\Phi} \|G_t - \Psi^T \Phi^T \Phi \Psi\|_F^2 + \lambda \|\Phi\|_F^2 \quad (12)$$

从本节的内容可知,在压缩感知系统中,观测过程能达到的压缩比主要取决于等效字典 A 的互相关性以及观测信号中的噪声水平。显然,压缩感知能达到的压缩比还受到信号在字典上的稀疏程度影响,信号在字典上越稀疏,则压缩感知系统能达到越低的压缩比。由于本文主要研究观测矩阵的性能,因此在后文的对比仿真和实验分析中,所有压缩感知系统采用的都是同一个稀疏字典。

1.2 求解算法

文献[9]提出采用一个迭代过程来最小化 $\mu_{av}(A)$, 该方法采用阈值收缩的方法,将 Gram 矩阵中大于 $\bar{\mu}$ 的元素收缩,其收缩策略如下:

$$\hat{G}(i, j) = \begin{cases} \gamma G(i, j), & |G(i, j)| \geq \bar{\mu} \\ \gamma \bar{\mu} \cdot \text{sign}(G(i, j)), & \bar{\mu} > |G(i, j)| > \gamma \bar{\mu} \\ G(i, j), & \gamma \bar{\mu} > |G(i, j)| \end{cases} \quad (13)$$

式中 γ 为收缩系数; $\bar{\mu}$ 为一个预定义的阈值参数。

将 Gram 矩阵 \hat{G} 收缩后,再从 \hat{G} 中反解出等效

字典 A , 最后求解 $\Phi = \arg \min_{\Phi} \|A - \Phi \Psi\|_F^2$ 。上述过程对观测矩阵 A 完成一次更新,通过不断迭代这个过程,可以不断地降低 Gram 矩阵的 $\mu(A)$ 。

在文献[10-16]中,学者研究了基于式(7)求解观测矩阵 Φ 的方法。求解该问题的方法通常是通过交替更新 G_t 和 Φ 来进行的。

第一步是固定 Φ , 对 G_t 进行更新。当 $G_t = I_t$ 时,可以略去该步骤;当 $G_t = G_{eff}$ 时,通常在—组松弛的 ETF 的 Gram 矩阵中搜索 G_t :

$$G_t(i, j) = \begin{cases} \bar{\mu} \cdot \text{sign}(G(i, j)), & i \neq j, |G(i, j)| \geq \bar{\mu} \\ G(i, j), & i \neq j, |G(i, j)| < \bar{\mu} \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (14)$$

第二步是对 Φ 进行求解并更新。目前的求解算法可以分为基于梯度的算法以及解析算法两大类。文献[16]使用共轭梯度法对式(12)进行求解,而文献[10, 14]则采用解析法分别给出了式(9)和(11)的一个解集。

2 鲁棒性观测矩阵优化算法

2.1 适用于机械信号的优化框架

通常情况下,机械设备故障诊断系统采集到的信号受到设备中多源噪声的干扰,导致信号中的故障特征淹没在大量的噪声中,因此在机械设备故障诊断系统中应用压缩感知,其观测矩阵必须对噪声有较好的鲁棒性。

如文献[9]所述,通过收缩 $\mu_{av}(A)$ 获得的观测矩阵在信号重构精度方面优于传统的高斯随机矩阵。然而,这种方法假设原始信号在给定的字典上是绝对稀疏的,大多数机械信号都不满足该条件。为了获得适合机械信号的观测矩阵,必须考虑观测矩阵的鲁棒性。因此,更好的选择是式(11)或(12)这类具有鲁棒性约束项的优化框架。

基于式(11)的优化框架的特点是使用了训练数据对观测矩阵进行优化,当训练数据足够多且具有较好的代表性时,该方法能够达到最优的效果,然而,在机械设备故障诊断的很多场景下,这样的训练数据是难以获得的。因此,基于式(12)的优化框架更适用于机械设备故障诊断系统。

此外,目标 Gram 矩阵 G_t 的选择也会对观测矩阵在应用中的鲁棒性产生很大的影响。文献[14, 16]的实验结果都表明,相比基于 $G_t = G_{eff}$ 的优化观

测矩阵,基于 $G_i = I_L$ 的优化观测矩阵在实际应用中
对噪声的鲁棒性更强,文献[14]指出这是由于基于
ETF的优化框架得到的观测矩阵有更多的元素接
近 $\mu(A)$ 的理论最小值,更有利于保持稀疏表示空
间中向量之间的距离,故基于ETF的观测矩阵对噪
声更敏感;而基于 $G_i = I_L$ 的优化框架由于其解集
的自由度较大,因此有更多的余量用于进行 $\|\Phi \bar{E}\|_F^2$ 或
 $\|\Phi\|_F^2$ 的优化。

综上所述,得到适用于机械信号的观测矩阵优
化框架为:

$$\Phi = \arg \min_{\Phi} \|\mathbf{I}_L - \Psi^T \Phi^T \Phi \Psi\|_F^2 + \lambda \|\Phi\|_F^2 \quad (15)$$

下文将通过仿真和实验来验证上述分析。

2.2 解析求解算法推导

式(15)可以通过梯度法进行求解,但基于梯
度的方法需要进行多次迭代,计算耗时较多,且其求
解结果与迭代条件和初始值的设置有关,不能保证
得到全局最优解。此外,也可以通过数学推导得到
式(15)的解析解,由于解析法只需要一次数值计
算,因此通常情况下解析法具有更低的计算复杂
度,且解析法能保证得到全局最优解^[14]。

如1.2节所述,文献[14]中给出了一种在字典
矩阵 Ψ 满秩时式(11)的解析求解方法。若将
式(11)中的 \bar{E} 替换为 \mathbf{I}_N 时,则该解析法同样可
用于求解式(15)。然而,文献[14]中所提的解
析法在每次优化过程中均需进行一次SVD分解
和一次特征值分解,而SVD分解的计算复杂度
为 $O(N^3)$,随着应用对象维度的增大,SVD分
解的计算复杂度呈三次方增长,因此在信号维
度增大到一定程度后,该解析方法耗时较多。
为了提高求解高维度观测矩阵的速度,本文在
字典矩阵 Ψ 满秩的情况下,基于式(15)的优
化框架推导出一种解析法,可以在求解过程中
避免进行SVD分解,从而提高了求解速度。

通过推导,得到了以下结果。

定理: 在字典矩阵 Ψ 满秩的情况下,令 $\mathbf{Q}_0 = \Psi \Psi^T - \frac{\lambda}{2} \mathbf{I}_N$, 其特征值分解为 $\mathbf{Q}_0 = U_{q_0} \mathbf{\Lambda}_{q_0} U_{q_0}^T$, $\mathbf{\Lambda}_{q_0} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_N)$, $\lambda_k \geq \lambda_{k+1}, \forall k$, 找出满足 $c \leq M$ 的最小正特征值 λ_c 的索引 c , 则式(15)的部分解集的表达式为:

$$\Phi = U_2 \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_{q_0, c}^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U_{q_0}^T (\Psi \Psi^T)^{-1} \quad (16)$$

式中 $U_2 \in \mathbf{R}^{M \times M}$ 为任意正交矩阵; $\mathbf{\Lambda}_{q_0, c}$ 为保留 $\mathbf{\Lambda}_{q_0}$ 的前 c 个对角元素,其余对角元素置零的对角阵。

证明:见附录A。

观察到选择 U_2 为任意正交矩阵,不会影响
式(15)的结果大小,考虑选择 U_2 为单位矩阵以
进一步降低计算复杂度,此时只需证明式(16)中
 U_2 的不同取值在对式(2)的求解中,不会对其
结果产生影响。下面的引理给出了推导结果。

引理: 在字典矩阵 Ψ 相同的压缩感知系统中,
式(16)中由不同的 U_2 产生的不同观测矩阵,
不影响式(2)的求解结果。

证明:见附录B。

根据引理,可以取 $U_2 = \mathbf{I}_M$, 则有:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_{q_0, c}^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U_{q_0}^T (\Psi \Psi^T)^{-1} \quad (17)$$

对比式(16)和(17),可知式(17)可以减少
一次矩阵乘法,进一步降低了计算复杂度。

所提优化观测矩阵求解算法的具体流程如
表1所示。从表1中可以看出,所提算法的计
算过程中只需做一次特征值分解,相比文献
[14]的解析法无需进行SVD分解,降低了计
算复杂度。

表1 所提算法流程

Tab. 1 Flow of the proposed algorithm

输入: 稀疏字典 Ψ , 正则化参数 λ
输出: 观测矩阵 Φ
1. $\mathbf{Q}_0 \leftarrow \Psi \Psi^T - \frac{\lambda}{2} \mathbf{I}_N$
2. 对 \mathbf{Q}_0 做特征值分解: $\mathbf{Q}_0 = U_{q_0} \mathbf{\Lambda}_{q_0} U_{q_0}^T$
3. 找出满足 $c \leq M$ 的最小正特征值 λ_c 的索引 c
4. $\Phi \leftarrow \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_{q_0, c}^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U_{q_0}^T (\Psi \Psi^T)^{-1}$

3 仿真信号分析

本节将通过仿真信号的分析来验证第2节所
提议的观测矩阵优化框架(式(15))和求解算
法(表1)的有效性。本文使用的字典为文献
[8, 21]中使用的移不变K-SVD字典,该字典
通过学习故障信号中的冲击模式,并进行单
位时移产生稀疏字典,可以很好地稀疏表示
故障冲击信号。现有压缩感知的重构算法有
许多^[17, 22-24],本文的重构算法选择为经典
的正交匹配追踪(OMP)算法^[17]。使用理论
冲击信号与重构信号之间的均方误差(MSE)
来评价重构效果, MSE值越小表明重构效果
越好。

考虑旋转机械发生局部故障时,前 J 阶
固有频率被冲击力激起,可建立如下数学模
型来模拟故障冲击响应信号^[25]:

$$x(t) = x_0(t) + n(t) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J A_{ij} g(t) \sin[2\pi f_{dj}(t - \tau_i - iT)] + n(t),$$

$$g(t) = \exp\left[\frac{-2\pi\zeta_j}{\sqrt{1-\zeta_j^2}} f_{dj}(t - \tau_i - iT)\right], t \geq \tau_i$$
(18)

式中 J 表示被激起的固有频率个数; I 表示一段时间内产生冲击响应的个数; (f_{dj}, ζ_j) 表示第 j 阶的固有频率和相应的阻尼; A_{ij} 表示第 j 阶固有频率下的第 i 个冲击响应的幅值; T 是理论冲击响应出现的时间间隔; τ_i 为冲击响应时刻的波动值; $n(t)$ 表示噪声信号。

仿真信号的主要参数设置如表 2 所示。其余的参数设置如下: 冲击响应的幅值 A_{ij} 在 (1, 3) 之间随机分布, 滑移量设置为 $\tau_i = T \times \text{rand}(0, 0.02)$ 。 $n(t)$ 服从均值为零的正态分布, 其方差根据实验的信噪比需求进行设置。在本节的实验中, 设置仿真信号数量 $P = 4000$, 评价指标 MSE 在 P 个信号上取平均值。仿真信号维度 N 设置为 4000。图 1 为无噪声时的故障冲击信号的示例。

表 2 仿真信号参数

Tab. 2 The parameters of the simulation signal			
采样 频率/Hz	一阶模态参数 (f_{d1}, ζ_1)	二阶模态参数 (f_{d2}, ζ_2)	外圈故障 频率/Hz
20000	(2400 Hz, 0.06)	(6500 Hz, 0.08)	150

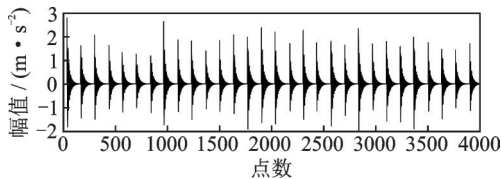


图 1 无噪声的故障冲击信号

Fig. 1 Fault impulse signal without noise

3.1 不同优化框架对比

为验证提议框架的有效性, 本节对基于不同优化框架得到的观测矩阵在仿真信号上的性能进行对比, 对比框架包括当前广泛应用于处理机械信号的高斯随机矩阵、文献[9]提出的基于式(5)的优化框架(框架一)以及文献[16]提出的基于式(12)取 $G_i = G_{eff}$ 的情形(框架二)。从 2.1 节的分析可知, 本文所提议的适用于机械故障信号的优化框架(式(15))对应式(12)取 $G_i = I_L$ 的情形, 区别之处在于文献[16]中是使用共轭梯度法进行求解, 而本文则是推导其解析解。理论上对于同一个优化问题, 通过梯度法和解析法得到最优解是等价的, 故在下文

不同框架对比分析时, 提议框架采用 2.2 节提出的解析法进行求解, 框架一、二则采用对应文献的求解方法。

式(12)中的正则项系数 λ 代表着观测矩阵互相关性 $\|G_i - \Psi^T \Phi^T \Phi \Psi\|_F^2$ 与鲁棒性 $\|\Phi\|_F^2$ 之间的权衡。通常来说, 当噪声增大时, 需要增大正则项系数 λ 以抑制噪声, λ 的取值正比于噪声水平。在实际使用中应根据噪声水平和应用对象信号来确定 λ 的取值。在本文的实验中, 将 λ 取为固定值 1。

用上述四种方法得到的观测矩阵对上述仿真信号进行观测, 并使用 OMP 算法进行重构, 对比不同框架的重构效果。

1) 不同噪声水平下的性能对比

设置压缩比 δ 为 10%, 即 $M = 400, N = 4000$ 。设置信噪比范围为 $[-8 \text{ dB}, 32 \text{ dB}]$, 通过仿真实验验证不同算法在不同信噪比下的观测性能, 以重构信号与理论冲击信号的均方误差 MSE 作为评价指标, 实验的结果如图 2 所示。由图 2 可以看出:

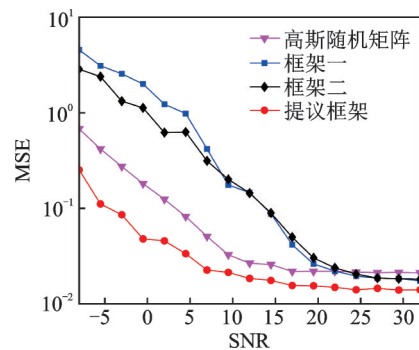


图 2 不同信噪比下的 MSE

Fig. 2 MSE under different signal-to-noise ratios

a) 在信噪比小于 20 dB 的情况下, 基于框架一、二的重构误差都远大于高斯随机矩阵以及本文提议的框架, 只有当信噪比很高时这两种框架对应的重构误差才小于高斯随机矩阵。显然, 这也是现有文献[5-8]在对机械信号进行压缩感知时普遍采用高斯随机矩阵的原因;

b) 在不同信噪比下的框架二的重构误差均大于提议框架, 这与 2.1 节关于目标 Gram 矩阵 $G_i = I_L$ 相比 $G_i = G_{eff}$ 对噪声有更强鲁棒性的分析相符, 验证了目标 Gram 矩阵的选择对观测矩阵的抗噪性有很大影响, 该结果与文献[14, 16]的实验结果一致;

c) 在四种对比框架中, 本文所提议框架在不同信噪比处都具有最低的重构误差, 且随着信噪比的降低, 优势愈加明显。通常情况下传感器采集到的机械振动信号均包含较大的噪声, 因此提议框架更有利于机械信号的压缩测量。

2) 不同压缩比下的性能对比

设置信噪比为 -5 dB, $N = 4000$ 。设置压缩比范围为 $[0.08, 0.26]$, 同样以重构信号与无噪声信号的均方误差 MSE 作为评价指标, 仿真结果如图 3 所示。

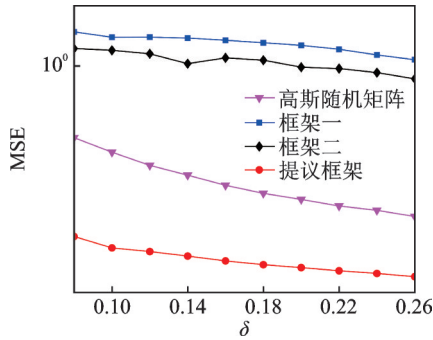


图 3 不同压缩比下的 MSE

Fig. 3 MSE under different compression ratios

由图 3 可以看出, 在如此低的信噪比下, 在整个压缩比变化范围内, 框架一、二对应的重构信号的误差都远高于高斯随机矩阵的重构误差, 而提议框架在不同压缩比下的重构误差均小于高斯随机矩阵, 且即便是在 8% 的压缩比下, 提议框架的重构结果都优于采用高斯随机矩阵在 26% 的压缩比下的重构效果。这进一步说明了提议框架在处理低信噪比信号时具有较大优势。

3) 重构信号对比

图 4 给出了信噪比为 -5 dB, 压缩比 δ 为 10% 时, 基于不同观测矩阵的重构得到的故障冲击信号。图 4 中的红色虚线表示原信号理论冲击的位置。

从图 4 中可以看出, 当信噪比为 -5 dB, 压缩比 δ 为 10% 时:

a) 基于框架一、二得到的观测矩阵对应的重构的信号与理论信号差异较大, 表明这两种矩阵均无法有效观测故障信号;

b) 使用高斯随机矩阵得到的重构信号仅有少数冲击处于正确的位置上, 总体上不具备周期性, 在该工况下无法用于故障诊断;

c) 基于提议框架的观测矩阵压缩重构得到的冲击信号具有明显的周期性, 且绝大部分故障冲击均在理论位置有效重构, 这说明机械信号经过该观测矩阵的压缩重构后可以有效进行故障诊断。

3.2 不同求解算法的运算耗时对比

如 2.2 节所述, 本文提议的框架除了可以用本文所提解析法求解外, 还可以通过文献[16]中采用的共轭梯度法以及文献[14]采用的解析法进行求解。为说明本文所提方法在计算效率上的优越性, 设置压缩比 δ 为 10%, 即 $M = 400, N = 4000$, 采用不同算

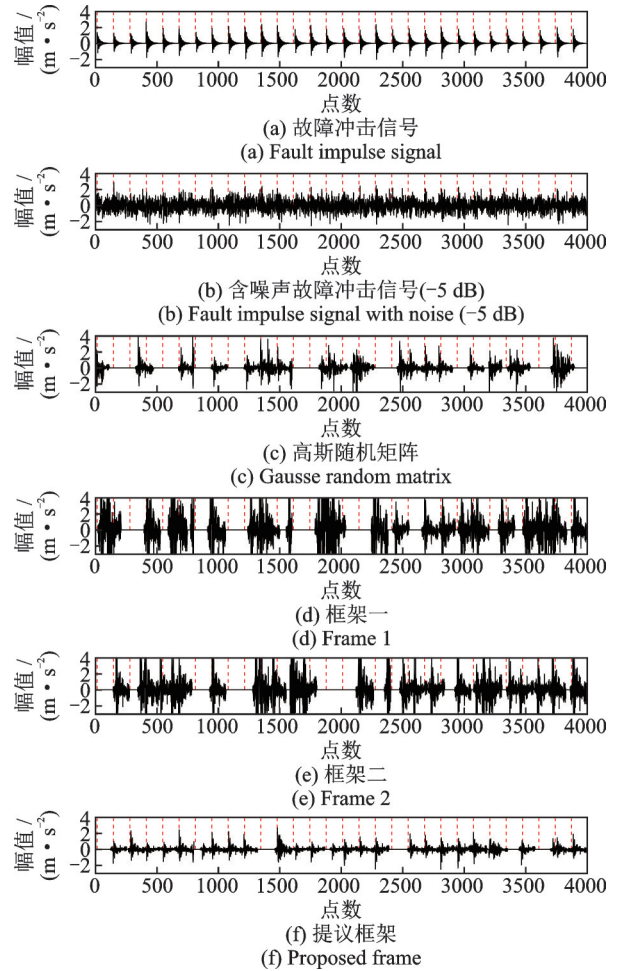


图 4 不同测量矩阵的重构信号对比

Fig. 4 Reconstructed signals under different sensing matrices

法对式(15)进行求解, 得到优化观测矩阵的运算时间。在 MATLAB 版本为 R2018a, CPU 为 Intel(R) Core(TM) i5-4460 以及运行内存为 16 GB 的条件下, 记录三种算法的运算耗时, 结果如表 3 所示。

表 3 不同算法的运算耗时

Tab. 3 Computation time of different algorithms

算法	时间/s
共轭梯度法	1369.538
文献[14]解析法	51.853
本文方法	15.194

从表 3 中可知, 虽然在合适的初始化和迭代次数足够多(本文中迭代次数设置为 50)的情况下, 基于梯度的算法能够达到接近解析解的结果, 但耗时远远高于解析法。在两种解析法中, 本文所提方法的计算耗时不到文献[14]方法的 1/3, 这主要是因为文献[14]的解析法在求解过程需进行特征值分解和 SVD 分解, 而本文方法只需进行特征值分解。由于 SVD 分解的计算复杂度随着矩阵维度的增长呈三次方增长, 因此当处理信号维度较长时, 本文的解析法的计算优势将非常明显。

4 实验信号分析

在机械故障诊断领域应用压缩感知的前提是压缩重构后的信号能够保留原信号中的故障信息,本节将通过对机械故障设备的传感器采集到的信号进行压缩感知来验证所提鲁棒性观测矩阵的优化设计方法在故障诊断中的有效性。

4.1 轴承外圈故障

实验在图5所示的滚动轴承台上进行。在轴承N205M的外圈上以线切割方式产生故障(宽度为0.5 mm,深度为1 mm)。滚动轴承的具体参数如下:节径为38 mm,滚动体直径为6.5 mm,接触角 $\theta=0^\circ$,滚子数为13。振动信号从轴承座上采集,采样频率为100 kHz。当轴转速为800 r/min时,故障特征频率为 $f_{\text{fault}}=f_o=71.84$ Hz。截取时长为1 s的测量加速度的时域信号,如图6所示。

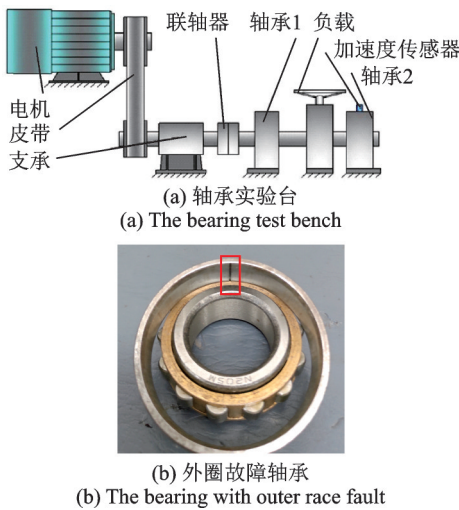


Fig. 5 The test bench of the bearing with outer race fault

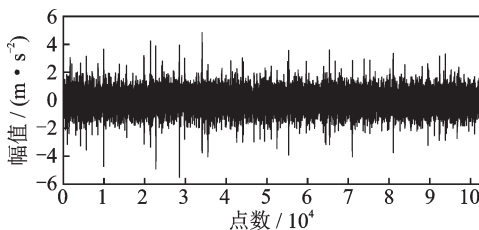


Fig. 6 The time domain signal of bearing with outer race fault

设置压缩率 δ 为15%,使用不同观测矩阵进行观测,对应的重构信号(左)及其包络谱(右)如图7所示。从图7中可以看出,在压缩比 δ 为15%时,使用基于框架一的观测矩阵重构得到的信号其包络谱上无明显峰值,无法用于故障诊断;框架二的重构信

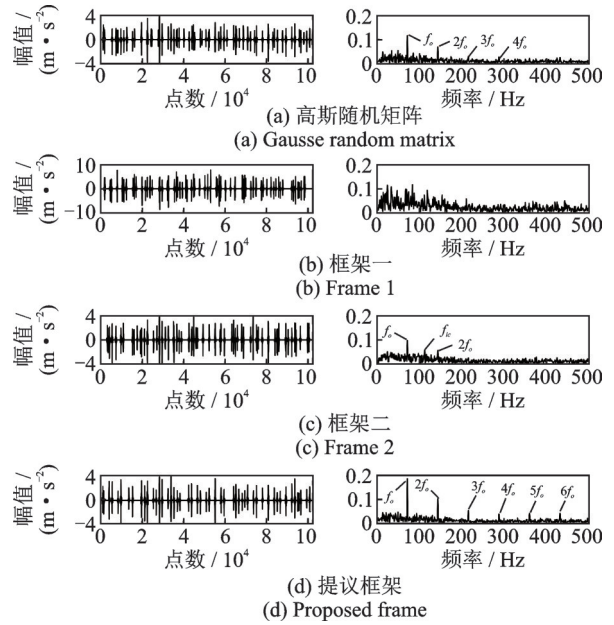


Fig. 7 The reconstructed signals and their envelope spectrums of bearing signals with outer race fault ($\delta=15\%$)

号的包络谱上能观察到前2阶故障频率,但存在一个明显的干扰成分(f_{ic}),可能会造成对设备的误诊;使用提议框架得到的观测矩阵对信号进行观测,重构信号存在明显有规律冲击,其包络谱中可以明显分辨出前6阶故障频率,较之采用高斯随机矩阵的重构信号,提议框架对应的重构信号包络谱故障特征幅值更大,阶次更多,更有利于故障诊断。

进一步降低压缩比 δ 至8%,使用高斯随机矩阵和提议框架构造的观测矩阵进行观测,对应的重构信号及其包络谱如图8所示。

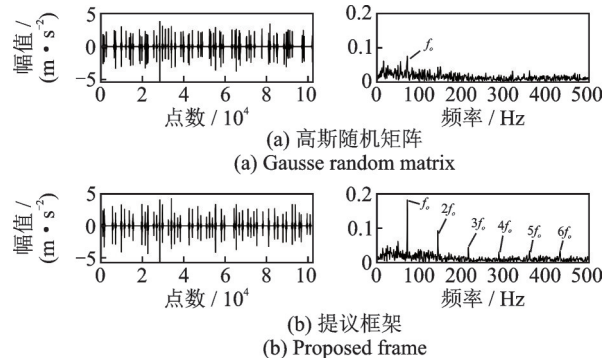


Fig. 8 The reconstructed signals and their envelope spectrums of bearing signals with outer race fault ($\delta=8\%$)

从图8左侧的时域信号中可以看出,即便是在8%的压缩比下,使用提议框架依旧可以较好地重构故障冲击特征,重构信号冲击规律明显,其包络谱

上能清晰的观察到前 6 阶故障频率。相比之下,使用高斯随机矩阵观测其重构信号无明显规律,其包络谱中只出现第一阶的故障频率,且附近有很多干扰成分,其峰值不突出,事实上已经无法用于故障诊断。以上结果进一步验证了提议框架在机械设备故障诊断领域的有效性。

表 4 给出了使用不同求解算法的运算耗时,从表中可以看出本文提出的解析法方法在计算效率上的优势。

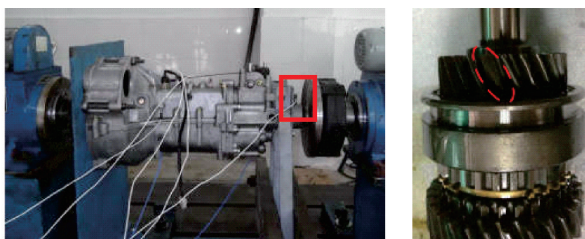
表 4 不同算法的运算耗时

Tab. 4 Computation time of different algorithms

算法	时间/s	
	轴承故障实验	齿轮故障实验
共轭梯度法	6664.268	9996.402
文献[14]解析法	59.542	87.153
本文方法	17.415	26.123

4.2 齿轮断齿故障

为了进一步评估所提方法的有效性,在一个五档输出轴齿轮上有断齿故障的汽车变速箱上进行实验,其中加速度传感器被安装在输出轴的轴承座上,如图 9 所示。实验中信号采样频率为 24000 Hz,变速箱运行参数如表 5 所示。输入轴转速为 1000 r/min,对应的齿轮故障频率 $f_{\text{fault}} = f_g = 21.618$ Hz。截取时长为 1 s 的测量信号如图 10 所示。



(a) 变速器实验台架和传感器安装位置 (b) 故障齿轮
(a) The gearbox test bench and location of sensor (b) The fault gear

图 9 故障齿轮实验台

Fig. 9 The test bench of the fault gear

表 5 齿轮箱运行参数

Tab. 5 The operating parameters of the gearbox

参数	常啮合齿轮副		第五档齿轮副	
	主动轮	从动轮	主动轮	从动轮
齿数	19	30	43	21
转速/Hz	16.667	10.558	10.558	21.618

设置压缩比 δ 为 20%,使用不同观测矩阵进行观测,对应的重构信号及其包络谱如图 11 所示。

从图 11 中可以看出,在压缩比 δ 为 20% 时,基于框架一的观测矩阵重构得到的信号及其包络谱均

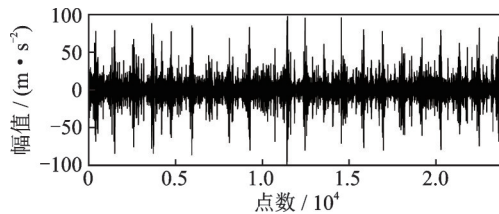


图 10 故障齿轮时域信号

Fig. 10 The time domain signal of fault gear

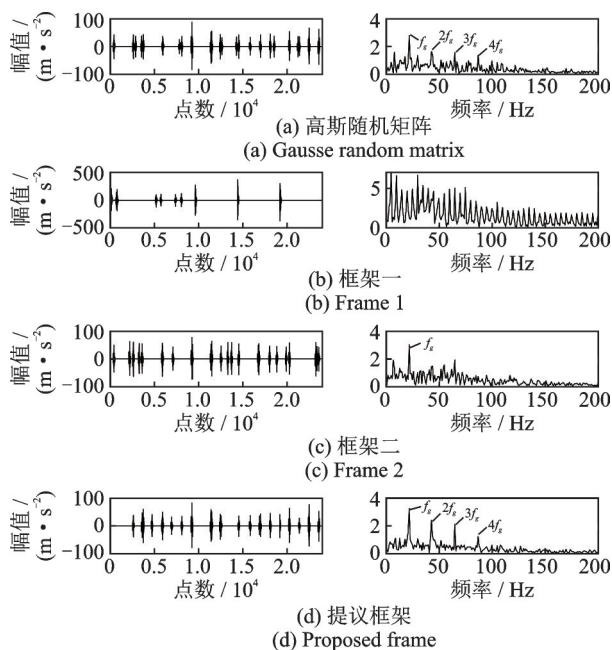


图 11 故障齿轮信号的重构信号及其包络谱($\delta = 20\%$)

Fig. 11 The reconstructed signals and their envelope spectrums of fault gear signal ($\delta = 20\%$)

不包含故障特征,无法用于故障诊断;基于框架二的重构信号的包络谱上虽然能观察到第 1 阶故障频率,但周围存在较多干扰成分,容易造成对设备的误诊;使用高斯随机矩阵对信号进行观测,其重构信号的包络谱中虽然噪声较大,但仍能观察到前 4 阶故障频率;基于提议框架的重构信号则在时域重构出更多等间隔分布的冲击,其包络谱中可以明显分辨出前 4 阶故障频率。

进一步降低压缩比 δ 至 10%,使用高斯随机矩阵和提议框架构造的观测矩阵进行观测,对应的重构信号及其包络谱如图 12 所示。

从图 12 中可见,当压缩比 δ 从 20% 降至 10% 时,本文提议框架的性能并没有明显变化,重构信号的包络谱依旧能清晰地看到前 4 阶故障频率,可以对设备进行正确的故障诊断。然而,使用高斯随机矩阵对信号进行观测,其重构信号的时域变得更加杂乱,其包络谱中只能观察到第一阶的故障频率。该例进一步说明本文提议框架在机械故障诊断中的优势。表 4 给出了不同求解算法的运算耗时,从表中可以看出本文方法的计算耗时低于其他两个求解算法。

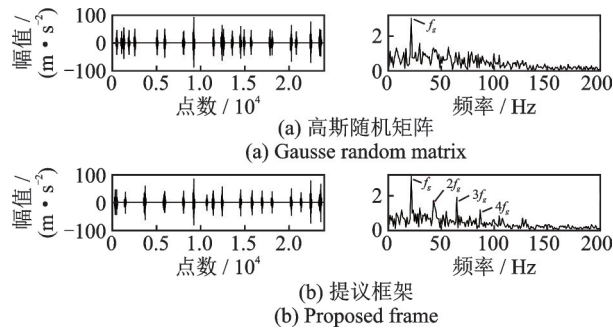


图12 故障齿轮信号的重构信号及其包络谱($\delta = 10\%$)

Fig. 12 The reconstructed signals and their envelope spectrums of fault gear signal ($\delta = 10\%$)

5 结论

(1) 不考虑鲁棒性的观测矩阵优化框架和基于ETF的优化框架对低信噪比信号的压缩感知效果差,不适用于机械信号。

(2) 相比于机械信号中常用的高斯随机观测矩阵,采用提议框架得到的优化观测矩阵能够处理信噪比更低的信号,且能在更低压缩比下获得更高的信号重构精度,适用于机械故障诊断。

(3) 本文推导的优化观测矩阵求解算法较文献[14,16]的方法有效降低了计算复杂度,大大减小了求解观测矩阵的耗时。

参考文献:

- [1] Candes E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(2):489-509.
- [2] Donoho D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4):1289-1306.
- [3] Candes E J, Tao T. Near-optimal signal recovery from random projections: universal encoding strategies?[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(12):5406-5425.
- [4] Duarte M F, Eldar Y C. Structured compressed sensing: from theory to applications[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(9):4053-4085.
- [5] 徐海龙,杨拥民,胡海峰,等.基于压缩感知的叶端定时欠采样多频叶片振动盲重构研究[J].机械工程学报, 2019,55(13):113-121.
Xu Hailong, Yang Yongmin, Hu Haifeng, et al. Compressed sensing-based blind reconstruction of multi-frequency blade vibration from under-sampled BTT signals [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(13): 113-121.
- [6] Li J, Meng Z, Yin N, et al. Multi-source feature extraction of rolling bearing compression measurement signal

based on independent component analysis[J]. Measurement: Journal of the International Measurement Confederation, 2021, 172: 108908.

- [7] 李泽芃,乔百杰,文璧,等.基于压缩感知的多级风扇周向声模态重构[J].航空动力学报, 2021,36(7):1388-1397.
Li Zepeng, Qiao Baijie, Wen Bi, et al. Azimuthal acoustic mode reconstruction of multi-stage fan based on compressive sensing [J]. Journal of Aerospace Power, 2021, 36(7):1388-1397.
- [8] Lin H B, Tang J M, Mechefske C. Impulse detection using a shift-invariant dictionary and multiple compressions[J]. Journal of Sound and Vibration, 2019, 449: 1-17.
- [9] Elad M. Optimized projections for compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(12):5695-5702.
- [10] Duarte-Carvajalino J M, Sapiro G. Learning to sense sparse signals: simultaneous sensing matrix and sparsifying dictionary optimization[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2009, 18(7):1395-1408.
- [11] Abolghasemi V, Ferdowsi S, Makkiabadi B, et al. On optimization of the measurement matrix for compressive sensing [A]. Proceedings of the 2010 18th European Signal Processing Conference [C]. Alaborg, Demark, 2010:427-431.
- [12] Abolghasemi V, Ferdowsi S, Sanei S. A gradient-based alternating minimization approach for optimization of the measurement matrix in compressive sensing[J]. Signal Processing: EURASIP, 2012, 92(4):999-1009.
- [13] Xu J P, Pi Y M, Cao Z J. Optimized projection matrix for compressive sensing[J]. Eurasip Journal on Advances in Signal Processing, 2010(1):560349.
- [14] Li G, Li X, Li S, et al. Designing robust sensing matrix for image compression [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2015, 24(12):5389-5400.
- [15] Hong Tao, Bai Huang, Li Sheng, et al. An efficient algorithm for designing projection matrix in compressive sensing based on alternating optimization [J]. Signal Processing, 2016,125:9-20.
- [16] Hong Tao, Zhu Zhihui. An efficient method for robust projection matrix design [J]. Signal Processing, 2018, 143:200-210.
- [17] Tropp J A. Greed is good: algorithmic results for sparse approximation [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2004, 50(10):2231-2242.
- [18] Donoho D L, Elad M. Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via l_1 minimization [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2003, 100(5): 2197-2202.
- [19] Strohmer T, Heath R W. Grassmannian frames with applications to coding and communication [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2003, 14(3): 257-275.
- [20] Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz

- Bases[M]. Birkhäuser, 2003.
- [21] Mailhé Boris, Lesage Sylvain, Gribonval Rémi, et al. Shift-invariant dictionary learning for sparse representations: extending K-SVD[A]. European Signal Processing Conference[C]. Lausanne, Switzerland, 2008;1-5.
- [22] Candès E J, Wakin M B. An introduction to compressive sampling: a sensing/sampling paradigm that goes against the common knowledge in data acquisition [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2):21-30.
- [23] Zibulevsky M, Elad M. L1-L2 optimization in signal and image processing[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2010, 27(3):76-88.
- [24] Huang X, Liu Y, Shi L, et al. Two-level l1 minimization for compressed sensing [J]. Signal Processing, 2015, 108:459-475.
- [25] He G L, Ding K B, Lin H. Fault feature extraction of rolling element bearings using sparse representation[J]. Journal of Sound & Vibration, 2016, 366:514-527.
- [26] Horn R A, Johnson C R. Matrix Analysis [M]. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

Optimal design of robust sensing matrix and its application in mechanical fault diagnosis

LIN Hui-bin, CHEN Wei-liang

(School of Mechanical and Automotive Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

Abstract: The application of compressed sensing (CS) in mechanical equipment fault diagnosis system can effectively alleviate the pressure of data transmission and storage in fault diagnosis system. The optimal design method of sensing matrix is introduced into mechanical fault diagnosis system for the first time. Considering the characteristics of low signal-to-noise ratio (SNR) of mechanical signals, a robust sensing matrix optimization framework suitable for mechanical signals is proposed based on the analysis of the robustness of different optimization frameworks of sensing matrix. A new closed-form algorithm with lower computational complexity is derived for the proposed optimization framework. Numerical simulations and experiments are carried out and the results show that the optimal sensing matrix obtained by the proposed method is robust and computationally efficient. Compared with the existing optimal sensing matrix and the commonly used random matrix, the proposed method can effectively reconstruct the mechanical fault signals at lower signal-to-noise ratio and compression ratio.

Key words: fault diagnosis; bearing; compressed sensing; optimal design of sensing matrix; robustness

作者简介: 林慧斌(1975—),女,副教授。电话:(020)87113220;E-mail:hblin@scut.edu.com。

附录 A: 定理的证明

对优化模型(12)进行变形,可得下式:

$$\begin{aligned}
 f(\Phi) &= \text{tr}(G_i^T G_i - G_i^T \Psi^T \Phi^T \Phi \Psi - \Psi^T \Phi^T \Phi \Psi G_i + \Psi^T \Phi^T \Phi \Psi \Psi^T \Phi^T \Phi \Psi) + \lambda \text{tr}(\Phi^T \Phi) = \\
 &= \text{tr}(G_i^T G_i) - 2\text{tr}(\Psi^T \Phi^T \Phi \Psi G_i) + \text{tr}(\Psi \Psi^T \Phi^T \Phi \Psi \Psi^T \Phi^T \Phi) + \lambda \text{tr}(\Phi^T \Phi) = \\
 &= \|G_i\|_F^2 - 2\text{tr}\left[\Phi^T \Phi \left(\Psi G_i \Psi^T - \frac{\lambda}{2} I_N\right)\right] + \text{tr}(\Psi \Psi^T \Phi^T \Phi \Psi \Psi^T \Phi^T \Phi) \quad (A1)
 \end{aligned}$$

对 Ψ 做 SVD 分解,有 $\Psi = U_1[\Lambda_1 \ 0]V_1^T$ 。令:

$$\begin{aligned}
 P &= \Psi \Psi^T = U_1[\Lambda_1 \ 0]V_1^T V_1 \begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix} U_1^T = U_1 \Lambda_1^2 U_1^T, \\
 P_s &= U_1 \Lambda_1 U_1^T, P_s^T = P_s, \\
 Q_0 &= \Psi G_i \Psi^T - \frac{\lambda}{2} I_N
 \end{aligned}$$

并代入式(A1),可得下式:

$$\begin{aligned}
 \arg \min_{\Phi} f(\Phi) &= \arg \min_{\Phi} \left[\|G_i\|_F^2 - 2\text{tr}(\Phi^T \Phi Q_0) + \text{tr}(P \Phi^T \Phi P \Phi^T \Phi) \right] = \\
 &= \arg \min_{\Phi} \left[-2\text{tr}(\Phi^T \Phi Q_0) + \text{tr}(U_1 \Lambda_1^2 U_1^T \Phi^T \Phi U_1 \Lambda_1^2 U_1^T \Phi^T \Phi) \right] = \\
 &= \arg \min_{\Phi} \left[-2\text{tr}(\Phi^T \Phi Q_0) + \text{tr}(U_1 \Lambda_1 U_1^T U_1 \Lambda_1 U_1^T \Phi^T \Phi U_1 \Lambda_1 U_1^T U_1 \Lambda_1 U_1^T \Phi^T \Phi) \right] = \\
 &= \arg \min_{\Phi} \left[-2\text{tr}(\Phi^T \Phi Q_0) + \text{tr}(U_1 \Lambda_1 U_1^T \Phi^T \Phi U_1 \Lambda_1 U_1^T U_1 \Lambda_1 U_1^T \Phi^T \Phi U_1 \Lambda_1 U_1^T) \right] = \\
 &= \arg \min_{\Phi} \left[-2\text{tr}(Q_0 \Phi^T \Phi) + \text{tr}(P_s \Phi^T \Phi P_s P_s \Phi^T \Phi P_s) \right] \quad (A2)
 \end{aligned}$$

由于 Ψ 行满秩, 则 P_s 可逆, 可由式(A2)进一步推导出下式:

$$\begin{aligned} \arg \min_{\Phi} f(\Phi) &= \arg \min_{\Phi} \left[-2\text{tr}(P_s P_s^{-1} Q_0 P_s^{-1} P_s \Phi^T \Phi) + \text{tr}(P_s \Phi^T \Phi P_s P_s \Phi^T \Phi P_s) \right] = \\ &= \arg \min_{\Phi} \left[-2\text{tr}(P_s^{-1} Q_0 P_s^{-1} P_s \Phi^T \Phi P_s) + \text{tr}(P_s \Phi^T \Phi P_s P_s \Phi^T \Phi P_s) \right] = \\ &= \arg \min_{\Phi} \left[-2\text{tr}(Q_1 P_s \Phi^T \Phi P_s) + \text{tr}(P_s \Phi^T \Phi P_s P_s \Phi^T \Phi P_s) \right] = \\ &= \arg \min_{\Phi} \|Q_1 - P_s \Phi^T \Phi P_s\|_F^2 = \arg \min_{\Phi} \|Q_1 - A^T A\|_F^2 \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

其中: $Q_1 = P_s^{-1} Q_0 P_s^{-1} = P_s^{-1} \left(\Psi G_t \Psi^T - \frac{\lambda}{2} I_N \right) P_s^{-1}$, $A = \Phi P_s$.

此时问题可以转化为:

$$A = \arg \min_A g(A) = \arg \min_A \|Q_1 - A^T A\|_F^2 \quad (\text{A4})$$

对式(A4)应用 Eckart-Young 定理^[26], 可得:

$$A = U_2 \begin{bmatrix} \Lambda_{q,c}^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U_q^T \quad (\text{A5})$$

式中 $U_2 \in \mathbf{R}^{M \times M}$ 为任意正交矩阵, 且有:

$$\begin{aligned} Q_1 &= U_q \Lambda_q U_q^T, \\ \Lambda_q &= \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_L), \lambda_k \geq \lambda_{k+1}, \\ \Lambda_{q,c} &= \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_c, 0, \dots, 0), \lambda_c \geq 0 \end{aligned}$$

在求解出 A 之后, 则可通过 $\Phi = A P_s^{-1}$ 求解观测矩阵。则有:

$$\Phi = U_2 \begin{bmatrix} \Lambda_{q,c}^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U_q^T U_1 \Lambda_1^{-1} U_1^T \quad (\text{A6})$$

式中 $U_2 \in \mathbf{R}^{M \times M}$ 为任意正交矩阵。

当 $G_t = I_N$ 时, 有 $Q_0 = \Psi \Psi^T - \frac{\lambda}{2} I_N$, 可得:

$$Q_1 = U_q \Lambda_q U_q^T = P_s^{-1} Q_0 P_s^{-1} = P_s^{-1} \left(\Psi \Psi^T - \frac{\lambda}{2} I_N \right) P_s^{-1} = U_1 \left(I_N - \frac{\lambda}{2} \Lambda_1^{-2} \right) U_1^T \quad (\text{A7})$$

以及

$$Q_0 = U_{q0} \Lambda_{q0} U_{q0}^T = \Psi \Psi^T - \frac{\lambda}{2} I_N = U_1 \Lambda_1^2 U_1^T - \frac{\lambda}{2} I_N = U_1 \left(\Lambda_1^2 - \frac{\lambda}{2} I_N \right) U_1^T \quad (\text{A8})$$

由式(A7)和(A8)有:

$$\Lambda_q = I_N - \frac{\lambda}{2} \Lambda_1^{-2} = \Lambda_1^{-1} \Lambda_{q0} \Lambda_1^{-1}, U_1 = U_q = U_{q0} \quad (\text{A9})$$

将式(A9)代入式(A6), 即可得正文的式(16)。

附录 B: 引理的证明

设 Φ_1 和 Φ_2 分别为由式(16)构造得到的观测矩阵, 且使用了不同的 U_2 矩阵, 则有:

$$\Phi_1 = U_{2,1} \begin{bmatrix} \Lambda_{q0,c}^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U_{q0}^T (\Psi \Psi^T)^{-1} \quad (\text{A10})$$

$$\Phi_2 = U_{2,2} \begin{bmatrix} \Lambda_{q0,c}^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U_{q0}^T (\Psi \Psi^T)^{-1} \quad (\text{A11})$$

式中 $U_{2,1}$ 和 $U_{2,2}$ 都为正交矩阵。

使用 Φ_1 和 Φ_2 分别对信号 X 进行观测, 得到的观测信号为 Y_1 和 Y_2 , 则重构过程如正文的式(2)所示。

由于

$$\begin{aligned} \|Y_1 - \Phi_1 \Psi S\|_F^2 &= \|\Phi_1 X - \Phi_1 \Psi S\|_F^2 = \|\Phi_1 (X - \Psi S)\|_F^2 = \|U_{2,2} U_{2,1}^T \Phi_1 (X - \Psi S)\|_F^2 = \\ &= \|\Phi_2 (X - \Psi S)\|_F^2 = \|\Phi_2 X - \Phi_2 \Psi S\|_F^2 = \|Y_2 - \Phi_2 \Psi S\|_F^2 \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

因此使用不同的 U_2 对求解正文的式(2)的结果无影响, 引理得证。