

具有分数导数本构关系的粘弹性浅拱的非线性动力学行为

李媛萍^{1, 2}, 张卫³

(1. “重大工程灾害与控制”教育部重点实验室(暨南大学), 广州 510632;

2. 暨南大学力学与土木工程系, 广州 510632;

3. 暨南大学信息科学技术学院电子工程系, 广州 510632)

Dynamic Characteristics of Viscoelastic Shallow Arch With Fractional Derivative Constitutive Relation

LI Yuan-ping^{1, 2} ZHANG Wei³

(1. Key Lab of Disaster Forecast and Control in Engineering, Ministry of Education of the People's Republic of China (Jinan University);

2. Department of Mechanics and Civil Engineering, Jinan University; Guangzhou 510632, China

3. Department of Electronic Engineering, Jinan University; Guangzhou 510632, China)

摘要: 利用分数导数本构模型描述材料的粘弹性特性, 建立了粘弹性浅拱在横向荷载作用下的动力学方程。利用 Galerkin 截断法并结合边界条件分别得到了一阶和二阶 Galerkin 系统的控制微分方程。通过数值计算, 分析了简谐激励下一阶 Galerkin 系统的非线性动力学行为。研究表明: 随着外激励幅值的变化, 粘弹性浅拱系统可以通过倍周期分岔或阵发性两条路径进入混沌; 另外, 固定外激励幅值、频率以及阻尼系数等状态参数, 不同初始条件下, 系统可以出现多周期解共存、周期解与混沌解共存的现象。

关键词: 分数导数本构关系; 粘弹性浅拱; 分岔; 混沌; 多解共存

中图分类号: 0322 文献标识码: A

Abstract: The dynamics equation of a viscoelastic shallow arch under lateral loads, in which fractional derivative model introduced to simulate the materials' characteristics, is proposed. The simplified differential equations of the first and second order Galerkin systems are developed combined Galerkin method with boundary conditions. Dynamic behaviors of the first order Galerkin system with harmonic loads are discussed by numerical calculations. The results show that: the system may lead to chaotic motion via period-doubling bifurcations or intermittent routes; In addition, the coexistences of multiple periodic solutions and the coexistences of periodic solutions with chaos solutions are found in this system when the excitation amplitude, frequency and damping and other state parameters are fixed but the initial conditions are changed.

Keywords: Fractional derivative constitutive relation; Viscoelastic shallow arch; Bifurcations; Chaos; Coexistences of multiple solutions

作者简介: 李媛萍 (1971-), 女, 博士, 讲师, 国家一级注册结构工程师, 国家一级注册建造师. 电话: (020)85228352; E-mail: tliyp@jnu.edu.cn

收稿日期: 2011-4-24

修订日期:

基金项目: 国家自然科学基金(10872079); 广东省科技计划项目(2010B050900016)

引言

近年来,随着材料科学的飞速发展,大量新型的聚合物材料或聚合物基复合材料被广泛应用于土木、机械、航空航天等工程领域,从而形成了一类具有特殊力学性质的粘弹性结构。由于粘弹性材料的性质依赖于时间、温度、加载历史,在动态情况下还明显地依赖于频率,因此这类粘弹性结构的静、动力学行为较普通弹性或弹塑性结构复杂得多,给工程设计带来了相当的难度,目前在设计该类结构时采用的简化处理办法不仅非常保守,而且存在一定的安全隐患^[1]。目前,这类粘弹性结构在各种承载与使用条件下的非线性动力学行为以及稳定性机理分析和预报成为现代工程中迫切需要解决的问题。

在粘弹性材料的本构描述方面,分数导数本构模型由于具有良好的记忆功能,且能较好地预测材料的长时间蠕变行为^[2],并能在较大频率范围内描述材料的力学性能而备受关注^[3,4],近年来,分数导数本构模型在粘弹性结构中的应用研究已成为粘弹性领域的研究热点,涉及到的结构类型包括粘弹性梁、柱、板、壳等^[5-12],已有的研究成果也证实了分数导数本构模型在粘弹性结构中的适用性和优越性。由于目前对工程中应用较多的粘弹性浅拱的研究还较少^[13],因此本文选择了粘弹性浅拱为研究对象并利用分数导数本构模型来描述材料的本构关系,首先根据动力平衡原理建立了粘弹性浅拱的动力学方程;然后利用 Galerkin 截断法并结合边界条件得到了关于响应的控制微分方程,最后通过数值计算考察了一阶 Galerkin 模态下系统的非线性动力学特性,揭示了粘弹性浅拱的复杂动力学行为。

1. 粘弹性浅拱的动力方程

如图 1 所示的两端铰支粘弹性浅拱,跨度为 L ,矢高为 H ,密度为 ρ ,扁拱横截面的宽度为 b ,厚度为 h ,面积为 A ,刚度为 I ,回转半径为 i , $F(X,T)$ 为其上作用的横向分布荷载,浅拱的动力学方程为^[14]

$$\frac{\partial^2 M(X,T)}{\partial X^2} + N \frac{\partial^2 Y(X,T)}{\partial X^2} + rA \frac{\partial^2 Y(X,T)}{\partial T^2} = F(X,T) \quad (1)$$

其中 $N(X,T), M(X,T)$ 分别表示任意时刻拱单元截面上的水平力和弯矩。利用分数导数本构模型描述粘弹性材料的本构关系

$$s_{(t)} = E_0 e_{(t)} + E_1 D^q [e_{(t)}] = E_0 (1 + g D^q) [e_{(t)}] \quad (2)$$

其中 E_0, E_1, g 为材料常数且 $g = E_1/E_0$, D^q 是 Riemann-Liouville 分数导数算子, $0 < q < 1$ 为分数导数阶值。

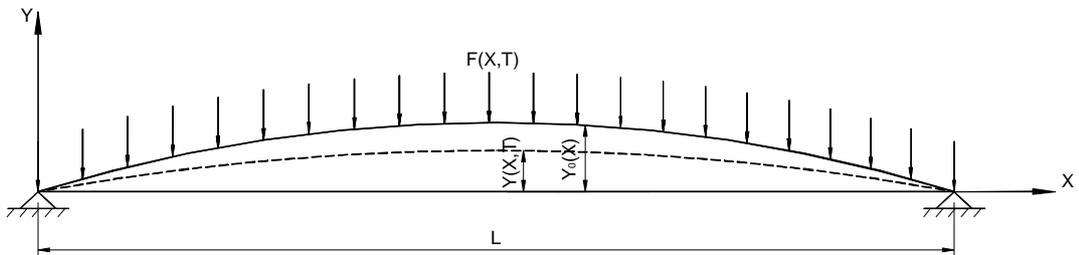


图 1 两端铰支粘弹性浅拱

拱单元截面上的弯矩可表示为

$$M(X,T) = IE_0(1+gD^q) \left(\frac{\partial^2 Y(X,T)}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 Y_0(X)}{\partial X^2} \right) \quad (3)$$

其中 $Y_0(X), Y(X,T)$ 分别为变形前后拱单元截面的竖向坐标。而拱的轴向应变可表示为

$$\Delta = \frac{1}{2L} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial Y_0(X)}{\partial X} \right)^2 - \left(\frac{\partial Y(X,T)}{\partial X} \right)^2 \right] dX \quad (4)$$

拱的水平力为

$$N = \frac{E_0 A (1+gD^q)}{2L} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial Y_0(X)}{\partial X} \right)^2 - \left(\frac{\partial Y(X,T)}{\partial X} \right)^2 \right] dX \quad (5)$$

将式(3)，(5)代入式(1)可得拱的动力方程(6)

$$IE_0(1+gD^q) \left[\frac{\partial^4 Y(X,T)}{\partial X^4} - \frac{\partial^4 Y_0(X)}{\partial X^4} \right] + \frac{A}{2L} \frac{\partial^2 Y(X,T)}{\partial X^2} E_0(1+gD^q) \int_0^L \left[\left(\frac{\partial Y_0(X)}{\partial X} \right)^2 - \left(\frac{\partial Y(X,T)}{\partial X} \right)^2 \right] dX + rA \frac{\partial^2 Y(X,T)}{\partial T^2} = F_{(x,t)} \quad (6)$$

两端铰支拱的边界条件为

$$Y|_{x=0} = Y|_{x=L} = 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} \Big|_{x=L} = 0 \quad (7)$$

任意时刻拱的竖向位移可用式(8)表示为

$$U(X,T) = Y(X,T) - Y_0(X) \quad (8)$$

将式(8)代入式(6)即可得到关于拱竖向位移 $U(X,T)$ 的动力学方程

$$\frac{A}{2L} \left[\frac{\partial^2 U(X,T)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 Y_0(X)}{\partial X^2} \right] E_0(1+gD^q) \int_0^L \left[\left(\frac{\partial U(X,T)}{\partial X} \right)^2 + 2 \frac{\partial U(X,T)}{\partial X} \frac{\partial Y_0(X)}{\partial X} \right] dX - IE_0(1+gD^q) \frac{\partial^4 U(X,T)}{\partial X^4} - rA \frac{\partial^2 U(X,T)}{\partial T^2} + F_{(x,t)} = 0 \quad (9)$$

引入无量纲量: $u = \frac{U}{i}, u_0 = \frac{Y_0}{i}, x = \frac{X}{L}, t = \sqrt{\frac{IE_0}{rA}} \frac{T}{L^2}, f = \frac{FL^4}{IE_0 i}$, 则可得如下无量纲化动力方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (1+gD^q) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right] (1+gD^q) \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial x} \right] dx = f \quad (10)$$

无量纲边界条件为

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = u''|_{x=0} = u''|_{x=1} = 0 \quad (11)$$

2. 控制微分方程

鉴于方程(10)仍难以求解, 这里结合边界条件并采用 Galerkin 方法进行截断简化。考虑正弦形拱受正弦分布荷载, 即 $f = p_1 \sin p x \cos w_1 t$, 设初始时刻拱的形状为

$$u_0(x) = m \sin px, (0 \leq x \leq 1) \quad (12)$$

其中常数 m 的大小反应了拱的弯曲程度。假设方程(10)的解可展开为 Fourier 级数

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) \sin npx, (0 \leq x \leq 1) \quad (13)$$

式(12), (13)显然是满足边界条件(11)的。为了比较不同阶 Galerkin 截断对系统振动特性的影响(即 Galerkin 截断法对该问题的适用性), 分别考虑 1 阶和 2 阶 Galerkin 模态。取 $n=1$ 或 $n=2$, 则可分别得到关于 $v_1 = U_1(t)$ 或 $v_1 = U_1(t)$, $v_2 = U_2(t)$ 的控制微分方程(组)。

当 $n=1$ 时, 可得到 1 阶 Galerkin 模态的控制微分方程

$$m \ddot{v}_1 + p^4 \left(1 + \frac{1}{2} m^2\right) v_1 + \frac{3}{4} m p^4 v_1^2 + \frac{1}{4} p^4 v_1^3 + g p^4 \left(1 + \frac{1}{2} m^2 + \frac{1}{2} m v_1\right) D^q v_1 + \frac{1}{4} g p^4 (m + v_1) D^q v_1^2 = p_1 \cos(w_1 t) \quad (14)$$

令 $t = p^2 t, h = \frac{g}{p^{2q}}, p = \frac{p_1}{p^4}, w = \frac{w_1}{p^2}$, 方程(14)可进一步简化为

$$\begin{aligned} v_1'' + \left(1 + \frac{1}{2} m^2\right) v_1 + \frac{3}{4} m v_1^2 + \frac{1}{4} v_1^3 + \\ h \left[\left(1 + \frac{1}{2} m^2 + \frac{1}{2} m v_1\right) D^q v_1 + \frac{1}{4} (m + v_1) D^q v_1^2 \right] = p \cos(wt) \end{aligned} \quad (15)$$

当 $n=2$ 时, 可得到 2 阶 Galerkin 模态的控制微分方程组

$$\begin{cases} m \ddot{v}_1 + p^4 \left(1 + \frac{1}{2} m^2\right) v_1 + \frac{3}{4} m p^4 v_1^2 + \frac{1}{4} p^4 v_1^3 + p^4 v_1 v_2^2 + m p^4 v_2^2 + g p^4 \left(1 + \frac{1}{2} m^2 + \frac{1}{2} m v_1\right) D^q v_1 \\ \quad + \frac{g}{4} p^4 (m + v_1) D^q v_1^2 + g p^4 (m + v_1) D^q v_2^2 = p_1 \cos(wt) \\ m \ddot{v}_2 + 16 p^4 v_2 + 4 p^4 v_2^3 + 2 m p^4 v_1 v_2 + p^4 v_1^2 v_2 + \\ \quad 2 g m p^4 v_2 D^q v_1 + g p^4 v_2 D^q v_1^2 + g 16 p^4 D^q v_2 + 4 g p^4 v_2 D^q v_2^2 = 0 \end{cases} \quad (16)$$

令 $t = p^2 t, h = \frac{g}{p^{2q}}, p = \frac{p_1}{p^4}, w = \frac{w_1}{p^2}$, 则方程(16)可进一步简化为

$$\begin{cases} v_1'' + \left(1 + \frac{1}{2} m^2\right) v_1 + \frac{3}{4} m v_1^2 + \frac{1}{4} v_1^3 + v_1 v_2^2 + m v_2^2 + \\ \quad h \left[\left(1 + \frac{1}{2} m^2 + \frac{1}{2} m v_1\right) D^q v_1 + \frac{1}{4} (m + v_1) D^q v_1^2 + (m + v_1) D^q v_2^2 \right] = p \cos(wt) \\ v_2'' + 16 v_2 + 4 v_2^3 + 2 m v_1 v_2 + v_1^2 v_2 + \\ \quad h \left[2 m v_2 D^q v_1 + v_2 D^q v_1^2 + 16 D^q v_2 + 4 v_2 D^q v_2^2 \right] = 0 \end{cases} \quad (17)$$

篇幅所限, 本文仅对 1 阶 Galerkin 系统的动力学行为进行探讨, 关于 2 阶 Galerkin 系统的动力学行为以及 Galerkin 截断法的适用性将另文分析。

方程(15)是具有二次和三次非线性项的振动方程, 令

$$w_0^2 = 1 + \frac{1}{2} m^2, \bar{k}_2 = \frac{3}{4} m, \bar{k}_3 = \frac{1}{4} \quad (18)$$

由判别式 $\Delta = 9 \bar{k}_3 w_0^2 - 10 \bar{k}_2^2$ 的正负号可判断系统属于具有哪一类弹簧特性的系统^[15]: 若 $\Delta > 0$, 即

$m^2 < 0.5$ 则属于具有“渐硬”弹簧特性的系统, 其频率-振幅响应曲线将呈右向弯曲的态势; 若 $\Delta < 0$

即 $m^2 > 0.5$ 则属于具有“渐软”弹簧特性的系统，其频率-振幅响应曲线将呈左弯曲的态势。由于浅拱的 μ 值通常比较小， $m^2 < 0.5$ ，因此考虑扁拱的非线性振动时，可视其为具有“渐硬”弹簧特性的系统，本文数值计算时取 $m = 0.2$ 。

3. 数值计算

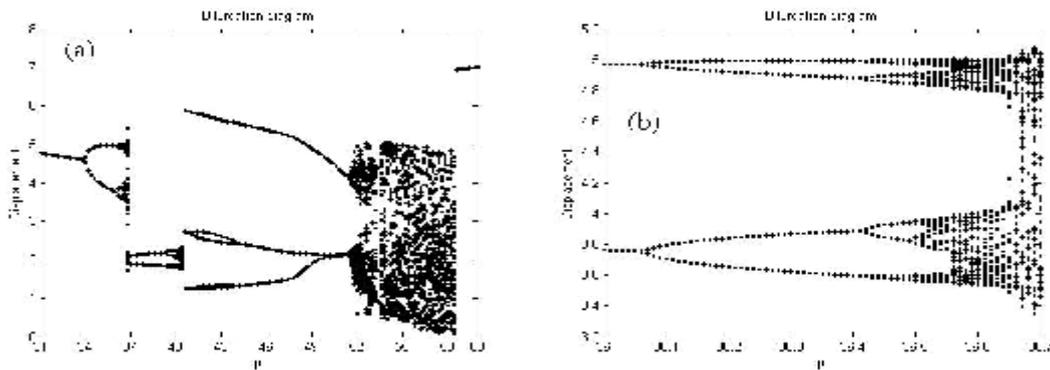
对无量纲化方程 (15) 进行数值计算并揭示系统的非线性动力学行为。 h, q 均是反映系统阻尼特性的量，当 $q = 0.5$ 时系统的阻尼最大^[2]。不失一般性，本文取 $h = 0.01, q = 0.5$ ，外激励频率 $w = 0.8$ ，外激励幅值 $p \in (31, 60)$ ，分别考虑外激励幅值 p 从 31 以步长 0.02 增加到 60（称之为正向加载）和从 60 以步长 0.02 减小到 31（称之为反向加载）两种情形，两种情形下均将前一幅值下计算所得的位移和速度作为后一幅值下的初始位移和初始速度。

3.1 分岔与混沌路径

3.1.1 倍周期分岔路径

首先考虑正向加载情形。图 2a 为 $p \in (31, 60)$ 区间内正向加载的分岔图。在 $p \in (31, 33.8)$ 区间，系统作单周期振动，Poincare 截面为一个不动点，功率谱在基频及倍频处出现尖峰(如图 3)；在 $p = 34$ 附近，系统发生倍周期分岔而进入周期二振动状态，此时 Poincare 截面为两个不动点，功率谱除在基频及倍频处出现尖峰外还出现了 $1/2$ 分频响应(如图 4)。随后，系统又多次出现倍周期分岔现象，为了更清楚地了解系统的倍周期分岔过程，在区间 $p \in (36, 36.7)$ 和 $p \in (39.2, 40.3)$ 内取更小步长进行计算，计算结果见图 2b 和图 2c，图中明显可见多次倍周期分岔过程。

从图 2b 可知，周期 16、周期 8 和周期 4 分岔分别发生在： $I_{16} = 36.5, I_8 = 36.42, I_4 = 36.06$ ，计算可得 $d = 4.55$ ；从图 2c 可知，周期 16、周期 8 和周期 4 分岔分别发生在： $I_{16} = 40.02, I_8 = 39.89, I_4 = 39.3$ ，计算可得 $d = 4.54$ ，均接近 Feigenbaum 常数^[16]，因此我们可以确定在该粘弹塑性拱中确实存在倍周期分岔路径。



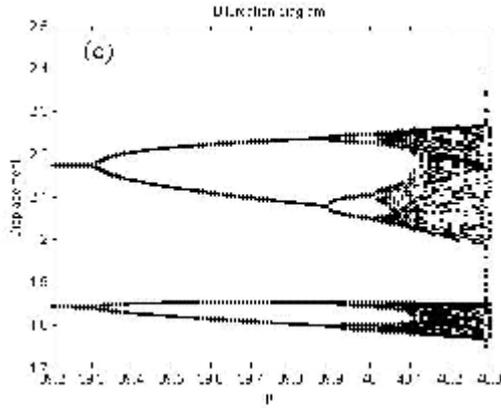


图 2 正向加载时位移随外激励幅值变化的分岔图

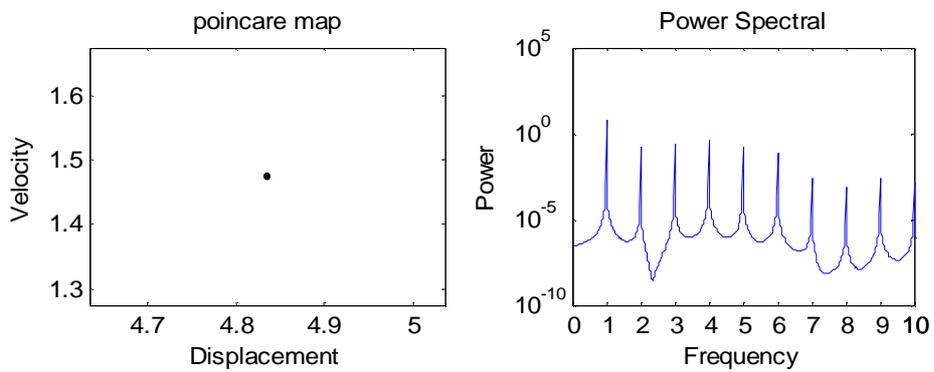


图 3 $P=32$ 时系统的 Poincaré 截面和功率谱

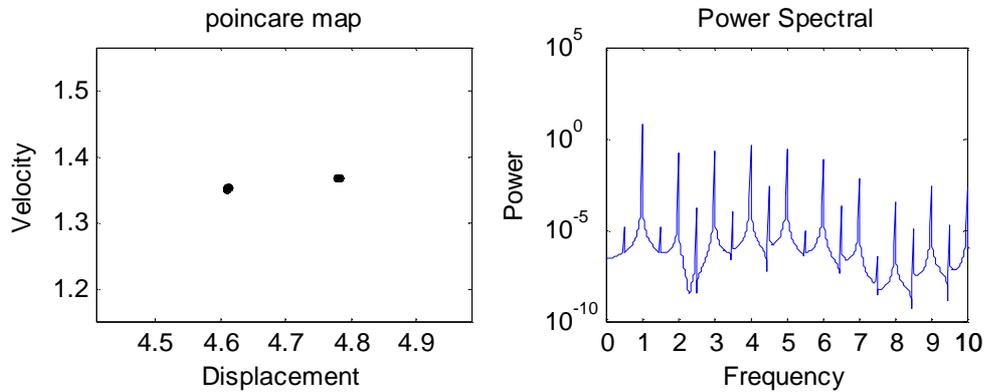


图 4 $P=34$ 时系统的 Poincaré 截面和功率谱

3.1.2 阵发性混沌路径

除倍周期分岔之外，在该系统中还存在阵发性混沌路径，其表现为周期解与混沌的突变，此时系统的状态不再具有规律性，而是发生随机的波动^[17]。例如：在 $p \in (51.6, 58.4)$ 区间，系统再次进入混沌状态（如图 5 为 $p = 55$ 时的 Poincaré 截面和功率谱）；当外激励幅值大于 58.4 时，系统由混沌突变为单周期振动（如图 6 为 $p = 60$ 时的 Poincaré 截面和功率谱）。

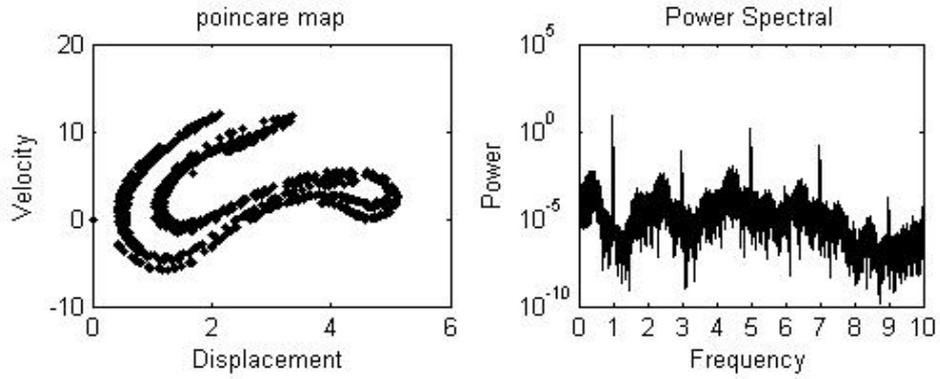


图 5 $P=55$ 时系统的 Poincaré 截面和功率谱

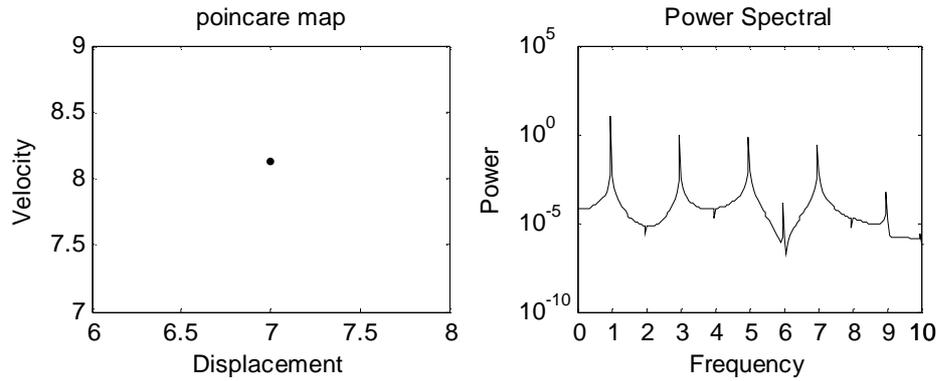


图 6 $P=60$ 时系统的 Poincaré 截面和功率谱

3.2 多解共存现象

图 7a 是反向加载时位移随外激励幅值变化的分岔图。图 7b 是正向和反向加载时位移的最大最小值对比曲线，图中蓝圈和绿圈分别代表正向加载时的最大最小值，黑点和红点分别代表反向加载时的最大最小值，箭头表示加载方向，重合部分表示不同加载情形下的解相同，而未重合区域即为多解共存区域。对比图 2a 和图 7a、图 7b 明显可见：该系统存在多次多解共存区域，说明：即使外激励幅值、频率以及阻尼系数等状态参数完全相同；在不同的初始条件下，该系统在某些区域将呈现不同的振动状态。

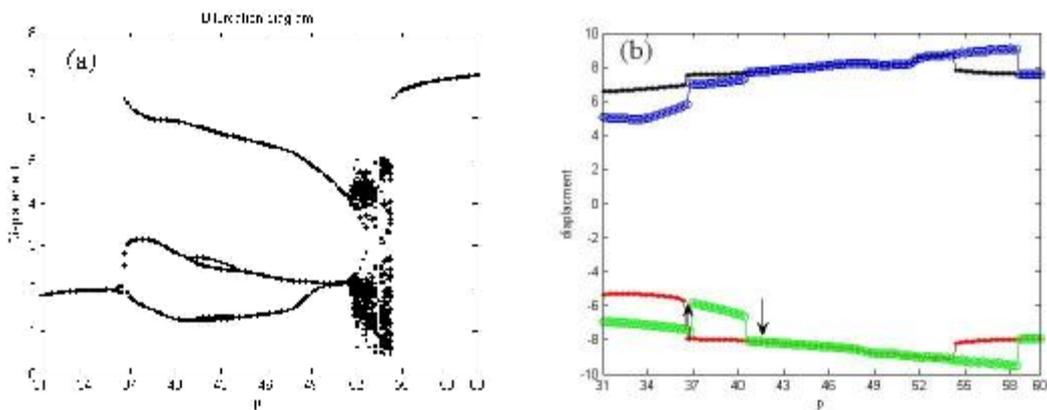


图 7 反向加载时系统位移随外激励幅值变化的分岔图（左）

及正向和反向加载情形下位移的最大最小值对比曲线（右）

3.2.1 周期二与周期一解共存

在 $p \in (33.8 \sim 55.6)$ 区间，可以观察到周期二与周期一解共存的现象，图 8 是正向加载 $P=34.8$ 时系统的相图，Poincare 截面和功率谱，其中相图中的小红圈代表 Poincare 点，此时系统的无量纲化初始位移和初始速度分别为 5.0460 和 1.3657；图 9 为反向加载 $P=34.8$ 时系统的相图，Poincare 截面和功率谱，此时系统的无量纲化初始位移和初始速度分别为 1.7848 和 -1.0507。从图可知，尽管外激励幅值、频率以及阻尼系数等状态参数完全相同，由于初始条件不同导致正向加载时系统呈周期二振动，而反向加载时系统则为周期一振动。

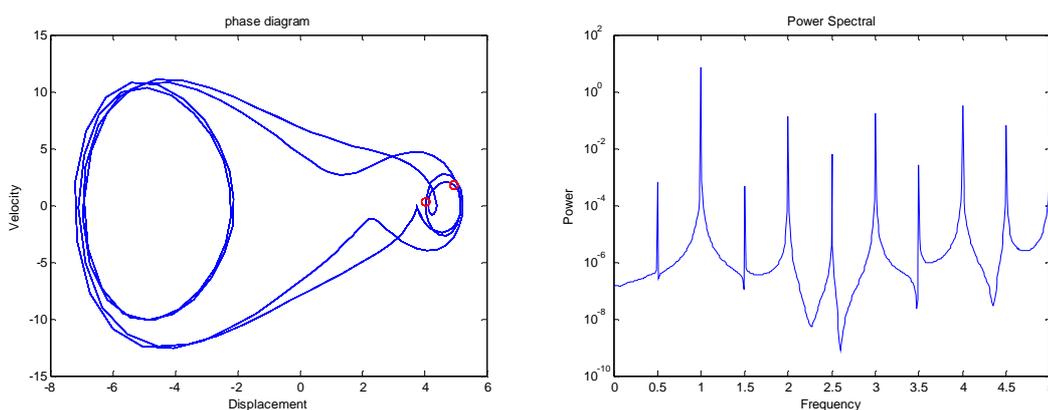


图 8 正向加载 $P=34.8$ 时系统的相图，Poincare 截面和功率谱

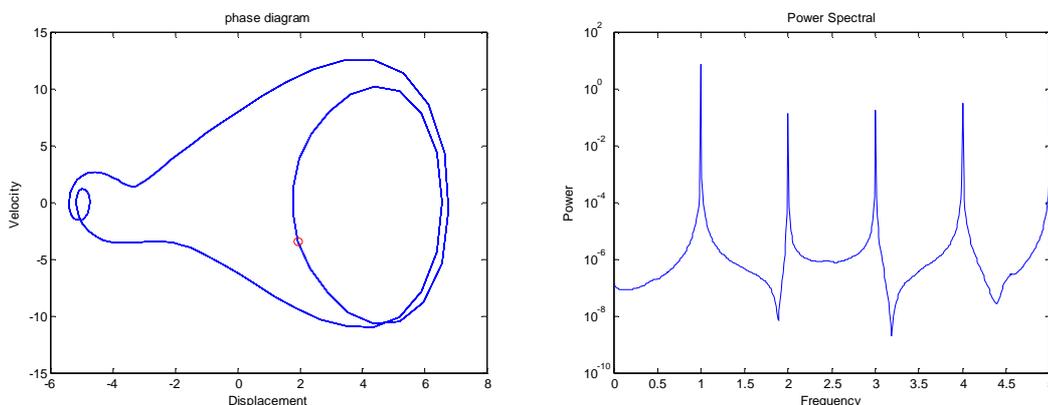


图 9 反向加载 $P=34.8$ 时系统的相图，Poincare 截面和功率谱

3.2.2 倍周期分岔区间与周期三解共存

在 $p \in (36 \sim 40.6)$ 区间，系统在正向加载时因多次倍周期分岔而出现了周期 2, 4, 8, 16...解，而反向加载时则均为周期三解。例如：图 10 和图 11 以及图 12 和图 13 分别为正向加载和反向加载， $P=38$ 和 $p=40$ 时系统的相图，Poincare 截面和功率谱，图中明显可见周期二和周期三以及周期八与周期三解共存的现象。

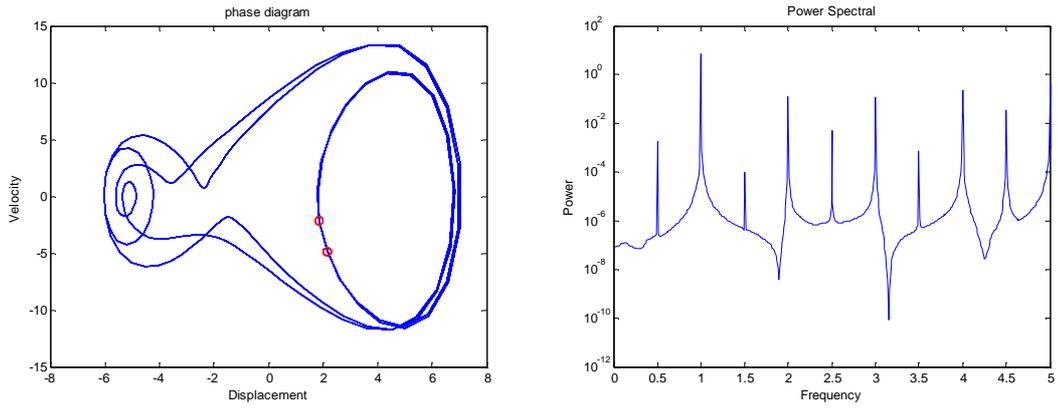


图 10 正向加载, $P=38$ 时系统的相图, Poincare 截面和功率谱

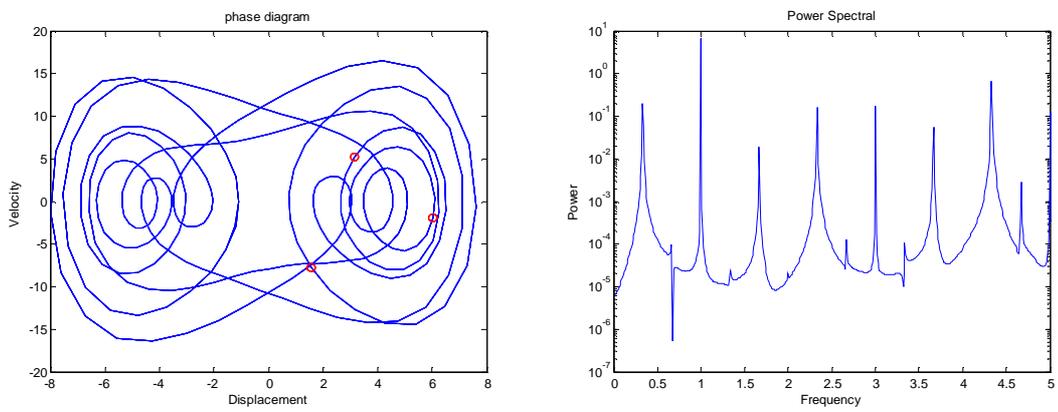


图 11 反向加载, $P=38$ 时系统的相图, Poincare 截面和功率谱

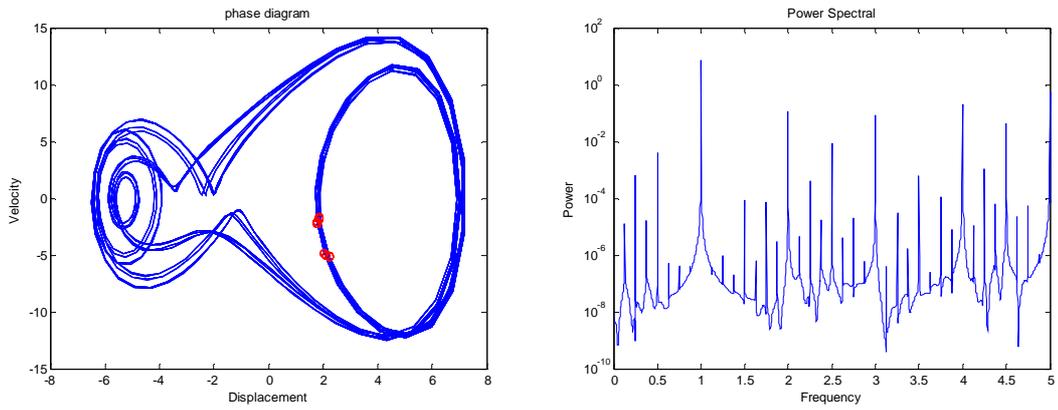


图 12 正向加载, $P=40$ 时系统的相图, Poincare 截面和功率谱

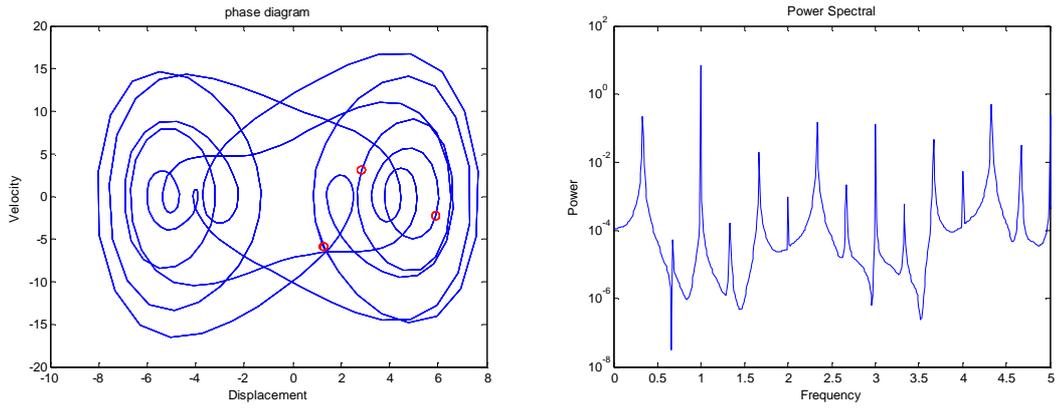


图 13 反向加载, $P=40$ 时系统的相图, Poincare 截面和功率谱

3.2.3 混沌和周期一解共存

在 $p \in (54.4 \sim 58.4)$ 区间, 可以观察到混沌与周期一解共存的现象, 图 14 为正向加载 $P=56$ 时系统的 Poincare 截面和功率谱, 从 Poincare 截面上看相点已在相平面上扩散开来形成具有规则边界的几何形状, 功率谱上出现无数谐波分量且由原来的离散谱变为非光滑的连续谱, 这些现象均说明这是一个混沌运动。图 15 为反向加载 $P=56$ 时系统的相图、Poincare 截面和功率谱图, 从图中明显可知其为周期一振动。

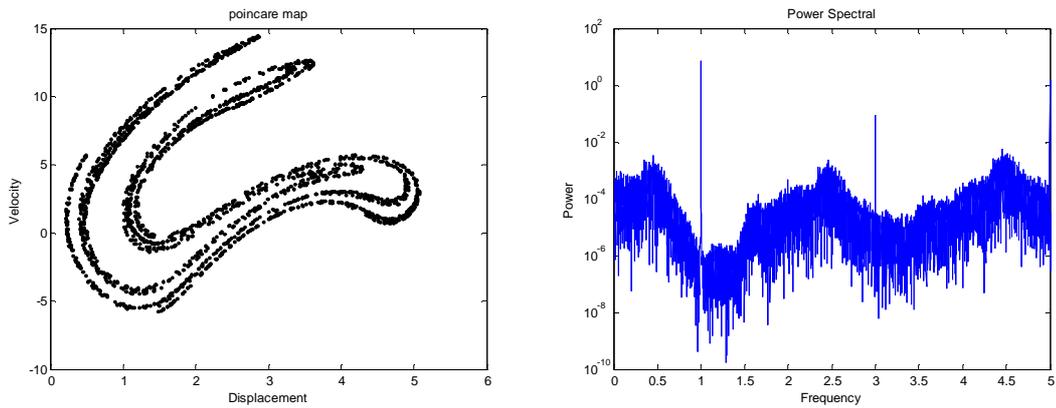


图 14 正向加载, $P=56$ 时系统的 Poincare 截面和功率谱

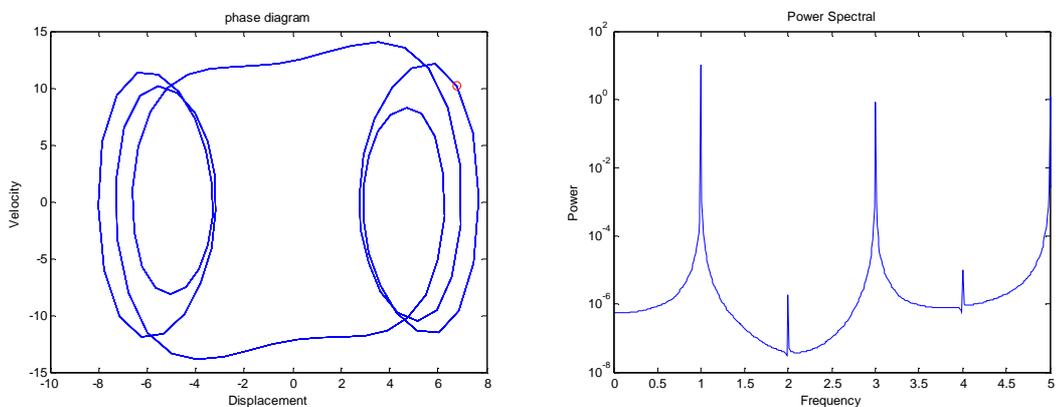


图 15 反向加载, $P=56$ 时系统的相图, Poincare 截面和功率谱

4. 结语

本文假定粘弹性浅拱的材料满足分数导数型本构关系,通过建立动力平衡方程及无量纲化和 Galerkin 截断等简化处理得到了关于结构响应的控制微分方程。通过数值计算,探讨了一阶 Galerkin 模态下系统的动力学行为随简谐荷载幅值的变化规律,发现了粘弹性浅拱的复杂非线性动力学特性。主要表现为:随外激励幅值的变化,系统存在倍周期分岔和阵发性两种通向混沌的路径;固定外激励幅值、频率以及阻尼系数等状态参数,在不同初始条件下,系统可以出现多周期解共存、周期解与混沌解共存的现象。

[参考文献]

1. 铁道部科学研究院深圳研究设计院. 深圳市华强北立交 a、b 匝道桥状态检测报告之二(a、b 匝道桥现有几何状态检测)[R]. 2002
2. 李媛萍. 非线性粘弹性结构的动态行为及大跨空间网壳的减震控制研究[D]. 暨南大学: 博士学位论文. 2010.
3. Yang, Pan, Lam, Yee Cheong,Zhu, Ke-Qin. Constitutive equation with fractional derivatives for the generalized ucm model[J]. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 2010. 165(3-4):88-97.
4. Nasuno, H. ,Shimizu, N. Nonlinear statical and dynamical models of fractional derivative viscoelastic body[J]. Proceedings of the ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Vol 6, Pts A-C, 2005:1415-1423,2446.
5. 李根国. 具有分数导数本构关系的粘弹性结构的静动力学行为分析[D]. 上海大学: 博士. 2001.
6. 李岩. 分数阶微积分及其在粘弹性材料和控制理论中的应用[D]. 山东大学: 博士学位论文. 2008.
7. 高心. 分数阶动力学系统的混沌、控制和同步的研究 [M]. 中国四川成都: 中国电子科技大学. 2005.
8. 王少伟. 分数阶微积分理论在粘弹性流体力学及量子力学中的某些应用[D]. 山东大学: 博士学位论文. 2007.
9. Tenreiro Machado, J. A. Application of fractional calculus in engineering sciences[C]. 2008. Stara Lesna, Slovakia: Inst. of Elec. and Elec. Eng. Computer Society:11-14.
10. Lin, G., Feeny, B. F.,Das, T. Fractional derivative reconstruction of forced oscillators[J]. Nonlinear Dynamics, 2009. 55(3):239-250.
11. Vilela Mendes, R. A fractional calculus interpretation of the fractional volatility model[J]. Nonlinear Dynamics, 2009. 55(4):395-399.
12. Zhu, Hao, Zhou, Shangbo,Zhang, Jun. Chaos and synchronization of the fractional-order chua's system[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2009. 39(4):1595-1603.
13. Yi, Z. P., Wang, L. H.,Zhao, Y. Y. Nonlinear dynamic behaviors of viscoelastic shallow arches[J]. Applied Mathematics and Mechanics-English Edition, 2009. 30(6):771-777.
14. 魏德敏. 拱的非线性理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社. 2004.
15. 陈树辉, 刘世龄, 张佑启,徐兆. 强非线性系统的定量分析方法[M]: 广东科技出版社. 2004.
16. 方锦清. 驾驭混沌与发展新技术[M]. 北京: 原子能出版社. 2002.
17. 聂春燕. 混沌系统与弱信号检测[M]. 北京: 清华大学出版社. 2009.