

两自由度含弹性约束碰撞振动系统共存吸引子 转迁控制研究

李得洋^{1,2}, 丁旺才², 丁杰², 卫晓娟²

(1. 兰州交通大学材料科学与工程学院, 甘肃 兰州 730070;

2. 兰州交通大学机电工程学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要: 针对碰撞振动系统具有的吸引子共存现象,在不改变原碰撞系统平衡解结构的前提下,采用线性反馈控制方法研究了一类两自由度含弹性约束碰撞振动系统共存吸引子转迁控制问题。建立了两自由度含弹性约束碰撞振动系统的动力学模型,理论推导得到了系统 $n-1$ 周期运动的存在条件;利用 Floquet 理论分析了系统的稳定性、分岔及引起吸引子共存的原因;通过设计合理的线性反馈控制器实现了系统共存吸引子的相互转迁;讨论了不同的控制开始状态和控制参数对控制性能的影响。仿真结果表明,所应用的线性反馈控制方法能有效控制此类非光滑碰撞振动系统共存吸引子之间的相互转迁。

关键词: 非线性振动; 非光滑系统; 吸引子共存; 线性反馈控制; 分岔

中图分类号: O322; TB535 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2021)01-0176-09

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2021.01.020

引言

含间隙^[1-2]的非光滑机械系统常见于各种工程领域中,如运动副、齿轮系统等,该类系统中部件的相互碰撞通常会导系统动力响应出现复杂而丰富的分岔、混沌和周期共存等非线性现象。在非光滑系统分岔和混沌研究方面,Shaw 和 Holmes^[3]采用接缝法精确地求解了分段线性振子的动力学响应,并通过复合的全局映射研究了系统周期响应的稳定性问题。Kundu 等^[4]构建了 4 种单自由度弹性约束系统 Grazing 分岔的范式映射,并研究了擦碰轨道邻域内 Poincaré 映射的特性。张惠等^[5]研究了含间隙和预紧弹簧碰撞振动系统由于擦边引起不动点处 Jacobian 矩阵的行列式和迹的变化特性。乐源等^[6]研究了一类三自由度碰撞振动系统的激变和阵发性。也有学者利用 Floquet 理论和近似求解方法对此类系统的分岔和稳定性进行研究。Leine 等^[7]对非光滑系统周期解的不连续分岔作了进一步的研究,分析了伴随基解矩阵的跳跃而发生的各种不连续分岔现象,进而给出了一般意义下的 Floquet 理论。徐慧东等^[8]应用 Floquet 理论研究了一类两自由度分段线性非光滑系统周期运动的分岔现象和混沌行为。

任传波等^[9]利用数值方法研究了兩自由度具有非连续阻尼力分段线性系统的稳定性和分岔。贾启芬等^[10]用 KB 方法研究了汽车悬架的简化分段线性非线性动力系统的不同参数对共振曲线的影响。在周期共存研究方面,李健等^[11]根据非光滑动力学系统特点,得到了非光滑系统吸引子和吸引域的胞映射计算方法,并在一类单自由度碰撞系统上验证了方法的有效性。Antonio S E Chong 等^[12]利用数值方法对简谐激励下含间隙碰撞振动系统在分岔点附近周期共存现象进行了研究。

随着非线性理论的深入研究以及工程实际的需求,将不同的周期运动以及共存的不同吸引子之间实现转迁控制引起了学者的兴趣。Jackson 等^[13]最早提出了开环控制方法实现不同周期运动之间的转迁,但是该方法无法确定非线性系统的吸引域且对大多数非线性系统无效。为了弥补开环控制方法的不足,开环加闭环(OPCL)控制方法和 OPNCL 控制方法被相继提出。Shen 等^[14]用 OPCL 方法研究了将 Mathieu-Duffing 振子从混沌吸引子迁移至任意周期吸引子的控制问题。柴凯等^[15]利用 OPCL 和 OPNCL 控制方法实现了非线性隔振系统多个不同拓扑特性的吸引子之间的迁移控制。赵建学等^[16]分别采用开环、闭环和开环加闭环控制方法对准零刚

收稿日期: 2019-05-29; **修订日期:** 2019-10-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11962013, 11732014, 51665027); 兰州交通大学青年科学基金资助项目(2017013); 甘肃省高等学校创新能力提升项目(2019B-059)

度隔振系统的共存吸引子实现了迁移控制,并对开环闭环控制方法的稳定性和可行性进行了分析。已有的共存吸引子转迁控制主要侧重于光滑系统,而有关含弹性约束碰撞振动系统共存吸引子转迁控制的相应研究仍然很少,依然有待进一步开展和深入研究。本文以一类两自由度含弹性约束分段线性非光滑系统为研究对象,理论推导了系统 $n-1$ 周期运动的存在条件;利用数值方法分析了系统周期共存现象,并利用线性反馈控制方法对系统共存吸引子进行转迁控制。通过吸引子转迁控制可实现系统的减振、混沌控制和分岔控制,仿真结果验证了本文方法的可行性和有效性。

1 力学模型及 $n-1$ 周期运动的存在条件

1.1 力学模型

图 1 为两自由度含弹性约束碰撞振动系统的力学模型,质量为 M_1 和 M_2 的振子分别由刚度为 K_1 和 K_2 的线性弹簧以及阻尼系数为 C_1 和 C_2 的线性阻尼器连接,作用在振子上的激励是简谐激励 $P_i \sin(\Omega T + \tau)(i=1, 2)$,其中 Ω, T 和 τ 分别为激励频率、时间和相位角。在振子 M_1 上有一个刚度为 K_3 的线性弹簧,当振子 M_1 和 M_2 的位移差小于间隙 $-B$ 时,振子 M_2 与线性弹簧 K_3 接触在一起振动。间隙的存在将会导致碰撞的产生,系统会呈现出复杂的动力学行为。

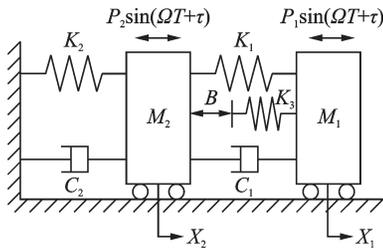


图 1 两自由度含弹性约束碰撞振动系统动力学模型
Fig. 1 The model of a two-degree-of-freedom vibro-impact system with soft constraints

取质块 M_1 的平衡位置为坐标原点建立坐标, M_1 和 M_2 的位移分别用 X_1 和 X_2 表示。为了描述系统的运动过程,定义边界函数

$$H(X) = X_1 - X_2 + B \quad (1)$$

根据边界函数引入分界面

$$\Sigma_P = \{(X_1, \dot{X}_1, X_2, \dot{X}_2)^T \in R^4 \mid H(X) = 0\}$$

系统的状态空间由分界面划分为两部分:

$\Sigma_{P-} = \{(X_1, \dot{X}_1, X_2, \dot{X}_2)^T \in R^4 \mid H(X) > 0\}$, 表示振子 M_2 与弹簧 K_3 不接触。

$\Sigma_{P+} = \{(X_1, \dot{X}_1, X_2, \dot{X}_2)^T \in R^4 \mid H(X) < 0\}$, 表示振子 M_2 与弹簧 K_3 接触。

令无量纲量参数为:

$$\begin{aligned} \mu_m &= \frac{M_2}{M_1 + M_2}, \xi = \frac{C_1}{2\sqrt{K_1 M_1}}, \mu_c = \frac{C_2}{C_1 + C_2}, \\ \mu_{ki} &= \frac{K_i}{K_1 + K_i} (i=2, 3), f_{20} = \frac{P_2}{P_1 + P_2}, \omega = \\ \Omega \sqrt{\frac{M_1}{K_1}}, b &= \frac{BK_1}{P_1 + P_2}, t = T \sqrt{\frac{K_1}{M_1}}, x_i = \frac{X_i K_1}{P_1 + P_2}. \end{aligned}$$

系统无量纲化的运动微分方程为:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\mu_m}{1-\mu_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\xi & -2\xi \\ -2\xi & \frac{2\xi}{1-\mu_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{1}{1-\mu_{k2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + H(x) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} 1-f_{20} \\ f_{20} \end{bmatrix} \sin(\omega t + \tau) \quad (2) \end{aligned}$$

$$H(x) = \begin{cases} \frac{\mu_{k3}}{1-\mu_{k3}}(x_1 - x_2 + b), & x_1 - x_2 + b < 0 \\ 0, & x_1 - x_2 + b > 0 \end{cases} \quad (3)$$

1.2 系统 $n-1$ 周期运动的存在条件

令 $\Psi(H(x) > 0)$ 和 $\bar{\Psi}(H(x) < 0)$ 表示方程 (1) 的模态矩阵, ω_i 和 $\bar{\omega}_i$ 表示系统无阻尼的固有频率,通过模态叠加法可得到方程 (2) 的通解如下 ($i=1, 2; j=1, 2$):

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \sum_{j=1}^2 \psi_{ij} \{ e^{-\eta_j t} [a_j \cos(\omega_{dj} t) + b_j \sin(\omega_{dj} t)] + \\ &A_j \sin(\omega t + \tau_0) + B_j \cos(\omega t + \tau_0) \} \\ x_i(t) &= \sum_{j=1}^2 \bar{\psi}_{ij} \{ e^{-\bar{\eta}_j t} [\bar{a}_j \cos(\bar{\omega}_{dj} t) + \bar{b}_j \sin(\bar{\omega}_{dj} t)] + \\ &\bar{A}_j \sin(\omega t + \bar{\tau}_0) + \bar{B}_j \cos(\omega t + \bar{\tau}_0) + c_j \} \end{aligned}$$

式中 ψ_{ij} 和 $\bar{\psi}_{ij}$ 为正则模态矩阵 Ψ 和 $\bar{\Psi}$ 的元素, $\eta_j = \xi \omega_j^2$, $\omega_{dj} = \sqrt{\omega_j^2 - \eta_j^2}$, $\bar{\eta}_j = \xi \bar{\omega}_j^2$, $\bar{\omega}_{dj} = \sqrt{\bar{\omega}_j^2 - \bar{\eta}_j^2}$; $a_j, b_j, \bar{a}_j, \bar{b}_j$ 为积分常数,由系统初始条件的模态参数确定; A_j, B_j, \bar{A}_j 和 \bar{B}_j 为振幅常数。令

$$C = (c_1, c_2)^T = \bar{\Psi}^T \left(\frac{-\mu_{k3} b}{(1-\mu_{k3}) \bar{\omega}_1^2}, \frac{\mu_{k3} b}{(1-\mu_{k3}) \bar{\omega}_2^2} \right)^T.$$

当参数满足一定条件时,系统就会存在 $n-1$

周期运动, n 为激励周期数。取振子 M_2 与右侧约束面碰撞后瞬间为时间坐标原点 ($t=0$), 经过时间 t_1 振子 M_2 与右侧约束面脱离, 之后经过时间 t_2 振子与右侧约束面再次碰撞, 那么 t_1 和 t_2 必须满足 $t_1 + t_2 = \frac{2n\pi}{\omega}$, $n-1$ 周期运动的边界条件、周期条件和衔接条件为:

$$\begin{aligned} x_1(0) - x_2(0) &= -d, x_1(t_1) - x_2(t_1) = -d, x_1(0) = \\ x_1\left(\frac{2n\pi}{\omega}\right), \dot{x}_1(0) &= \dot{x}_1\left(\frac{2n\pi}{\omega}\right), x_2(0) = x_2\left(\frac{2n\pi}{\omega}\right), \\ \dot{x}_2(0) &= \dot{x}_2\left(\frac{2n\pi}{\omega}\right), x_1(t_{1-}) = x_1(t_{1+}), \dot{x}_1(t_{1-}) = \\ \dot{x}_1(t_{1+}), x_2(t_{1-}) &= x_2(t_{1+}), \dot{x}_2(t_{1-}) = \dot{x}_2(t_{1+}). \end{aligned}$$

记 $\bar{t} = t - t_1$, $e_i = e^{-\eta_i t}$, $\bar{e}_i = e^{-\bar{\eta}_i \bar{t}}$, $c_{di} = \cos(\omega_{di} t)$, $s_{di} = \sin(\omega_{di} t)$, $\bar{c}_{di} = \cos(\bar{\omega}_{di} \bar{t})$, $\bar{s}_{di} = \sin(\bar{\omega}_{di} \bar{t})$, $C_\omega = \cos(\omega t)$, $S_\omega = \sin(\omega t)$, 其中 $i = 1, 2$ 。

为便于周期运动推导, 引入下列符号:

$$\begin{aligned} \phi_{11}^i &= e_i c_{di}, \phi_{12}^i = e_i s_{di}, \phi_{21}^i = -(\eta_i c_{di} + \omega_{di} s_{di}) e_i, \\ \phi_{22}^i &= (\omega_{di} c_{di} - \eta_i s_{di}) e_i, \\ \bar{\phi}_{11}^i &= \bar{e}_i \bar{c}_{di}, \bar{\phi}_{12}^i = \bar{e}_i \bar{s}_{di}, \bar{\phi}_{21}^i = -(\bar{\eta}_i \bar{c}_{di} + \\ \bar{\omega}_{di} \bar{s}_{di}) \bar{e}_i, \bar{\phi}_{22}^i &= (\bar{\omega}_{di} \bar{c}_{di} - \bar{\eta}_i \bar{s}_{di}) \bar{e}_i, \\ m_{11}^i &= A_i S_\omega + B_i C_\omega, m_{12}^i = A_i C_\omega - B_i S_\omega, m_{21}^i = \\ \omega m_{12}^i, m_{22}^i &= -\omega m_{11}^i, \\ \bar{m}_{11}^i &= \bar{A}_i S_\omega + \bar{B}_i C_\omega, \bar{m}_{12}^i = \bar{A}_i C_\omega - \bar{B}_i S_\omega, \bar{m}_{21}^i = \\ \omega \bar{m}_{12}^i, \bar{m}_{22}^i &= -\omega \bar{m}_{11}^i. \end{aligned}$$

$$n_{11} = n_{22} = \cos \omega t_1, n_{12} = -\sin \omega t_1, n_{21} = \sin \omega t_1.$$

则系统 $n-1$ 周期运动的周期解可表示为

$$z(t) = \begin{cases} \Phi(t)J + M(t)C_s + Q, & t \in [0, t_{1-}] \\ \bar{\Phi}(\bar{t})\bar{J} + \bar{M}(\bar{t})\bar{N}C_s, & t \in [t_{1+}, \frac{2n\pi}{\omega}] \end{cases} \quad (4)$$

式中 $\Phi_i = [\phi_{kj}^i]_{2 \times 2}$, $N_1 = (n_{ij})_{2 \times 2}$, $\bar{\Phi}_i = [\bar{\phi}_{kj}^i]_{2 \times 2}$, $\bar{J} = [\bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_2]^T$, $J = [a_1, b_1, a_2, b_2]^T$, $M_i(t) = (m_{kj}^i)_{2 \times 2}$, $Q = [\psi_{11}c_1 + \psi_{12}c_2, 0, \psi_{21}c_1 + \psi_{22}c_2, 0]^T$, $\bar{M}_i(t) = (\bar{m}_{kj}^i)_{2 \times 2}$, $C_s = [\cos \tau, \sin \tau]^T$ 。

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{bmatrix} \psi_{11}\Phi_1 & \psi_{12}\Phi_2 \\ \psi_{21}\Phi_1 & \psi_{22}\Phi_2 \end{bmatrix}, \bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \bar{\psi}_{11}\bar{\Phi}_1 & \bar{\psi}_{12}\bar{\Phi}_2 \\ \bar{\psi}_{21}\bar{\Phi}_1 & \bar{\psi}_{22}\bar{\Phi}_2 \end{bmatrix}, \\ M &= \begin{bmatrix} \psi_{11}M_1 & \psi_{12}M_2 \\ \psi_{21}M_1 & \psi_{22}M_2 \end{bmatrix}, \bar{M} = \begin{bmatrix} \bar{\psi}_{11}\bar{M}_1 & \bar{\psi}_{12}\bar{M}_2 \\ \bar{\psi}_{21}\bar{M}_1 & \bar{\psi}_{22}\bar{M}_2 \end{bmatrix}, \\ N &= \begin{bmatrix} N_1 & N_1 \\ N_1 & N_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

将 $t=0$ 及 $t=t_1$ 代入式(4), 可得积分常数关于初始条件的表达式:

$$J = \Phi(0)^{-1}[z(0) - M(0)C_s - Q] \quad (5)$$

$$\bar{J} = \bar{\Phi}(0)^{-1}[z(t_1) - \bar{M}(0)NC_s] \quad (6)$$

将 J, \bar{J} 代入式(4)有

$$z(t) = \begin{cases} Z_{11}(t)z(0) + Z_{12}(t)C_s + (\mathbf{I} - Z_{11}(t))Q, & t \in [0, t_{1-}] \\ Z_{21}(\bar{t})z(t_1) + Z_{22}(\bar{t})C_s, & t \in [t_{1+}, \frac{2n\pi}{\omega}] \end{cases} \quad (7)$$

式中 $Z_{11}(t) = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}$, $Z_{12}(t) = M(t) - \Phi(t)\Phi(0)^{-1}M(0)$, $Z_{21}(\bar{t}) = \bar{\Phi}(\bar{t})\bar{\Phi}(0)^{-1}$, $Z_{22}(\bar{t}) = [\bar{M}(\bar{t}) - \bar{\Phi}(\bar{t})\bar{\Phi}(0)^{-1}\bar{M}(0)]N$ 。

根据周期衔接条件 $z(0) = z(\frac{2n\pi}{\omega})$, $z(t_{1-}) = z(t_{1+})$ 有

$$z(0) = LC_s + H, z(t_1) = \bar{L}C_s + \bar{H} \quad (8)$$

式中 $L = [\mathbf{I} - Z_{21}(t_2)Z_{11}(t_1)]^{-1}[Z_{22}(t_2) + Z_{21}(t_2) \cdot Z_{12}(t_1)] = (l_{ij})_{4 \times 4}$, $\bar{L} = [\mathbf{I} - Z_{11}(t_1)Z_{21}(t_2)]^{-1} \cdot [Z_{12}(t_1) + Z_{11}(t_1)Z_{22}(t_2)] = (\bar{l}_{ij})_{4 \times 4}$, $H = [\mathbf{I} - Z_{21}(t_2)Z_{11}(t_1)]^{-1}Z_{21}(t_2)[\mathbf{I} - Z_{11}(t_1)]Q = (h_{ij})_{4 \times 1}$, $\bar{H} = [\mathbf{I} - Z_{11}(t_1)Z_{21}(t_2)]^{-1}[\mathbf{I} - Z_{11}(t_1)]Q = (\bar{h}_{ij})_{4 \times 1}$ 。

由初始条件 $x_1(0) - x_2(0) = -d$, $x_1(t_1) - x_2(t_1) = -d$ 可得初相位:

$$\tau = \arcsin \frac{-b\delta_2 \pm \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_1^2 b^2}}{\delta_1^2 + \delta_2^2} \quad (9)$$

$$\tau = \arcsin \frac{-b\bar{\delta}_2 \pm \sqrt{\bar{\delta}_1^2 + \bar{\delta}_2^2 - \bar{\delta}_1^2 b^2}}{\bar{\delta}_1^2 + \bar{\delta}_2^2} \quad (10)$$

式中 $\delta_1 = l_{11} + l_{13} - l_{31} - l_{32}$, $\delta_2 = l_{12} + l_{14} - l_{32} - l_{34}$, $\bar{\delta}_1 = \bar{l}_{11} + \bar{l}_{13} - \bar{l}_{31} - \bar{l}_{32}$, $\bar{\delta}_2 = \bar{l}_{12} + \bar{l}_{14} - \bar{l}_{32} - \bar{l}_{34}$ 。

根据初相位的表达式可得系统 $n-1$ 周期运动的存在条件为:

条件 1: $\delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_1^2 b^2 \geq 0$ 且 $\delta_1^2 + \delta_2^2 \neq 0$; $\bar{\delta}_1^2 + \bar{\delta}_2^2 - \bar{\delta}_1^2 b^2 \geq 0$ 且 $\bar{\delta}_1^2 + \bar{\delta}_2^2 \neq 0$;

条件 2: $\delta_1^2 + \delta_2^2 \geq -\delta_2 b$; $\bar{\delta}_1^2 + \bar{\delta}_2^2 \geq -\bar{\delta}_2 b$ 。

根据周期运动的衔接条件及 $t_1 + t_2 = 2\frac{n\pi}{\omega}$ 可得仅关于时间 t_1 的表达式

$$\begin{aligned} b^2[(\delta_1 - \bar{\delta}_1)^2 + (\delta_2 - \bar{\delta}_2)^2] - \\ (\delta_1 \bar{\delta}_2 - \bar{\delta}_1 \delta_2)^2 = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

通过数值方法可求解出方程的根 t_1 , 进而可确定系统的周期解。

2 系统周期运动的稳定性分析

为了研究系统周期运动的稳定性、多样性、存在区域以及局部分岔问题, 建立两个 Poincaré 映射:

① 选择映射截面 $\Sigma_T = \{(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, t) \in R^4 \times S, x_1 = x_{1-}, \text{mod}(t = 2\pi/\omega)\}$, 可以统计出系统周期运动的周期数。建立系统的 Poincaré 映射: $P: \Sigma_T \rightarrow \Sigma_T$, 利用 Floquet 理论可对系统的稳定性进行分析, 本文利用此方法对系统周期运动的稳定性进行分析;

② 利用碰撞面 $\Sigma_p = \{(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \theta) \in R^4 \times S, x_1 - x_2 = -b, \dot{x}_1 - \dot{x}_2 > 0\}$ 可以统计出系统周期运动的碰撞次数。建立 Poincaré 映射: $P: \Sigma_p \rightarrow \Sigma_p$, 则通过 Poincaré 映射线性化矩阵在不动点处的特征值来研究系统周期运动的稳定性。

3 基于线性反馈控制方法的共存吸引子转迁控制

3.1 线性反馈控制器的设计

对图 1 所示系统施加线性反馈控制后, 控制系统可表示为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + s(t)[v(\dot{x} - \dot{x}_p) + u(x - x_p)] + H = p \sin(\omega t + \tau) \quad (12)$$

式中 m, c, k 表示无量纲化后系统的质量、阻尼和刚度矩阵; p 为外激励的幅值向量; u 和 v 为线性反馈增益矩阵; $H = H(x)(1, -1)^T$; $s(t)$ 为开关函数, 当 $s(t) = 1$ 时控制开始; 而当控制成功后, 将 $s(t)$ 设置为 0, 线性反馈控制退出。状态变量 $x = (x_1, x_2)$ 和 $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$, 目标轨道的位移和速度为 $x_p = (x_{1p}, x_{2p})$ 和 $\dot{x}_p = (\dot{x}_{1p}, \dot{x}_{2p})$ 。

选取线性反馈增益矩阵:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 & -u_2 \\ -u_2 & u_1 + u_2 \end{bmatrix}, v = ru = r \begin{bmatrix} u_1 & -u_2 \\ -u_2 & u_1 + u_2 \end{bmatrix}.$$

其中 u_1, r 和 u_2 为控制参数。

在控制过程中, 涉及同时计算系统的两个不同的周期轨道: 受控和目标周期轨道; 同时不同周期轨道到达约束面的时间不同, 为方便计算将系统受控和未控的无量纲运动方程写成一阶形式

$$\begin{cases} \dot{x}_{1p} = v_{1p} \\ \dot{v}_{1p} = (1 - f_{20})\sin(\omega t + \tau_p) - 2\xi v_{1p} + 2\xi v_{2p} - \\ \quad x_{1p} + x_{2p} - H(x_p) \\ \dot{x}_{2p} = v_{2p} \\ \dot{v}_{2p} = \frac{1 - \mu_m}{\mu_m} [f_{20} \sin(\omega t + \tau_p) + 2\xi v_{1p} - \\ \quad \frac{2\xi}{1 - \mu_c} v_{2p} + x_{1p} - \frac{1}{1 - \mu_{k2}} x_{2p} + H(x_p)] \\ \dot{x}_1 = v_1 \\ \dot{v}_1 = (1 - f_{20})\sin(\omega t + \tau) - 2\xi v_1 + 2\xi v_2 - \\ \quad x_1 + x_2 - H(x) - E_1 \\ \dot{x}_2 = v_2 \\ \dot{v}_2 = \frac{1 - \mu_m}{\mu_m} [f_{20} \sin(\omega t + \tau) + 2\xi v_1 - \frac{2\xi}{1 - \mu_c} v_2 + \\ \quad x_1 - \frac{1}{1 - \mu_{k2}} x_2 + H(x) - E_2] \end{cases} \quad (13)$$

式中 E_1 和 E_2 分别是控制过程中施加在振子 M_1 和 M_2 上的可控反馈输入力, 表达式为

$$\begin{aligned} E_1 &= u_1(x_1 - x_{1p}) - u_2(x_2 - x_{2p}) + \\ &\quad r[u_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_{1p}) - u_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_{2p})] \\ E_2 &= -u_2(x_1 - x_{1p}) + (u_1 + u_2)(x_2 - x_{2p}) + \\ &\quad r[-u_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_{1p}) + (u_1 + u_2)(\dot{x}_2 - \dot{x}_{2p})] \end{aligned}$$

为了判定控制方法的可行性, 引入误差函数(即被控轨道和目标轨道之间的距离)

$$e(t) = \sqrt{(x_1 - x_{1p})^2 + (\dot{x}_1 - \dot{x}_{1p})^2 + (x_2 - x_{2p})^2 + (\dot{x}_2 - \dot{x}_{2p})^2} \quad (14)$$

在控制开始后如果控制参数合理, 误差函数的值会快速减小为零。

3.2 控制方法的稳定性分析

引入受控和未控状态向量间的误差向量 $d = [d_1, d_2] = x - x_p, \dot{d} = [\dot{d}_1, \dot{d}_2] = \dot{x} - \dot{x}_p$, 此时被控系统(12)可表示为:

$$m\ddot{d} + (c + v)\dot{d} + (k + u)d + \Delta H = p \sin(\omega t + \tau) + p \sin(\omega t + \tau_p) \quad (15)$$

式中 ΔH 为向量, $\Delta H = \Delta H(x)(1, -1)^T, \Delta H(x) =$

$$\begin{cases} 0, & x_1 - x_2 > -b \text{ 且 } x_{1p} - x_{2p} > -b \\ x_1 - x_2 + b, & x_1 - x_2 < -b \text{ 且 } x_{1p} - x_{2p} > -b \\ -x_{1p} + x_{2p} - b, & x_1 - x_2 > -b \text{ 且 } x_{1p} - x_{2p} < -b \\ d_1 - d_2, & x_1 - x_2 < -b \text{ 且 } x_{1p} - x_{2p} < -b \end{cases}$$

系统(15)可表示为

$$\dot{d} = \begin{cases} F_1(d, t) = A_1 d + B_1, & x_1 - x_2 > -b \text{ 且 } x_{1p} - x_{2p} > -b \\ F_2(d, t) = A_2 d + B_2, & x_1 - x_2 < -b \text{ 且 } x_{1p} - x_{2p} > -b \\ F_3(d, t) = A_3 d + B_3, & x_1 - x_2 > -b \text{ 且 } x_{1p} - x_{2p} < -b \\ F_4(d, t) = A_4 d + B_4, & x_1 - x_2 < -b \text{ 且 } x_{1p} - x_{2p} < -b \end{cases} \quad (16)$$

上式满足 $F(d, t) = F(d, t + T)$, T 为其运动周期, A_i 为常数矩阵, B_i 为与时间有关的向量。设系统(15)的周期解为 $d_z(t)$, 扰动解可表示为

$$d(t) = d_z(t) + \Delta d(t) \quad (17)$$

将式(17)代入式(15), 略去高阶项。在扰动很小的前提下, 在周期解处系统的线性扰动基解矩阵为

$$\Phi_i(t, t_0, d_0) = e^{A_i(t-t_0)} \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (18)$$

由于在间断点处系统的向量场是连续的, 所以每两个向量场之间转换时跳跃矩阵都为单位矩阵。

通过上面的分析可得全局的线性化单值矩阵

$$\Phi_T(T + t_0, t_0, d_0) = \Phi_1(T + t_0, t_4) \Phi_m(t_4, t_3) \cdot$$

$$\Phi_4(t_3, t_2) \Phi_n(t_2, t_1) \Phi_1(t_1, t_0) \quad (m, n=2, 3)。$$

令 $\lambda_i (i=1, 2, 3, 4)$ 表示 Φ_T 的特征值。根据 Floquet 理论^[7-8], 若选择的控制参数 u_1, r 和 u_2 使得 $|\lambda_i| < 1 (i=1, 2, 3, 4)$, 则系统(15)的周期解 $d_z(t)$ 为渐进稳定的, 即控制方法是稳定的, 控制参数是合理的。

4 仿真研究与分析

取系统参数(1): $\mu_m = 0.9, \xi = 0.01, \mu_{k2} = 0.9, \mu_{k3} = 0.9, b = 0.25, f_{20} = 0$ 和 $\omega \in [0.4, 0.9]$ 。系统在碰撞面 Σ_p 上的单参分岔图如图2所示(红色表示 ω 从大到小变化时得到的分岔曲线, 黑色表示 ω 从小到大变化时得到的分岔曲线)。符号 $n-p$ 中 n 表示激励力周期数, p 表示当 $\dot{x}_1 - \dot{x}_2 > 0$ 时振子 M_2 与约束面碰撞的次数; PB, IPB, NS 和 GR 分别表示倍周期分岔、逆倍周期分岔、鞍结分岔和擦边分岔。

随着 ω 的减小, 在 $\omega = 0.773613$ 时系统出现 1-1 周期擦边运动(如图3所示, 蓝色虚线表示弹性约束的位置), 由于擦边分岔的奇异性导致振子与两侧约束面碰撞次数同时+1, 而周期数不变, 1-1 周期运动转迁为 1-2。

随着 ω 的增加, 在 $\omega = 0.79487545$ 处不动点对应的特征值为:

$$\lambda_1 = 1.000006, \lambda_2 = 0.576849,$$

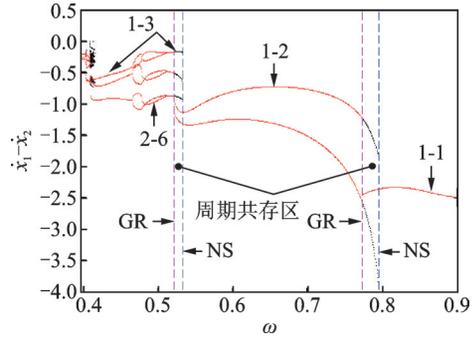


图2 系统单参分岔图

Fig. 2 The single-parameter bifurcation diagram of the system

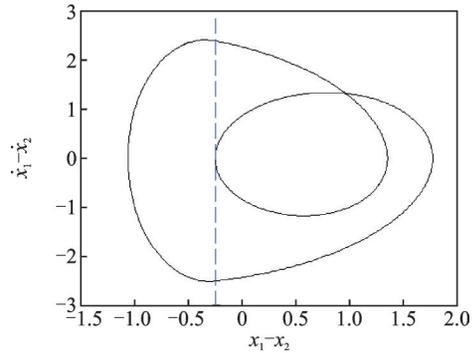


图3 1-1 周期擦边运动

Fig. 3 Phase plane of 1-1 periodic grazing motion

$$\lambda_3 = 0.273727 + 0.424946i,$$

$$\lambda_4 = 0.273727 - 0.424946i。$$

此时系统发生鞍结分岔, 由此导致振子与两侧约束面碰撞次数同时减一, 1-2 周期运动转迁为 1-1 周期运动。同理, 1-2 与 1-3 周期运动之间的转迁也符合上述规律。由于擦边分岔和鞍结分岔的分岔点不在同一位置, 导致 $1-p$ 和 $1-(p+1)$ 周期运动在相互转迁的过程中会经历 $1-p$ 与 $1-(p+1)$ 周期运动共存的过渡区, 将此过渡区定义为“多态共存区”。

由于逆倍周期分岔的出现, 在 1-3 与 1-4 周期运动之间的转迁变得复杂。随着 ω 的减小, 擦边分岔导致 1-3 周期运动转迁为混沌运动, 而随着 ω 的增加混沌运动经逆倍周期分岔退化为 $1-\bar{3}$ (表示与 1-3 周期运动周期数和碰撞次数相同的不同周期运动) 周期运动, $1-\bar{3}$ 周期运动经鞍结分岔转迁为 1-3 周期运动。可见在擦边分岔和鞍结分岔之间出现逆倍周期分岔后, 容易导致不同的 $1-p$ 周期运动以及混沌运动与 $1-p$ 周期运动共存的“多态共存区”。

在多态共存区内, 系统动力学行为对初值非常敏感, 当受到小的扰动时系统可在不同吸引子之间跃迁。针对系统在此参数域内的特性, 可利用线性反馈控制方法实现系统从振幅较大的吸引子转迁到振幅较小的吸引子上, 以增加系统工作的寿命; 或者

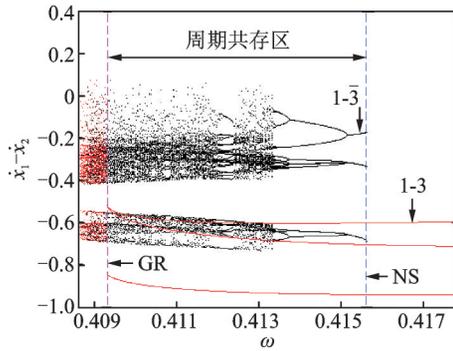


图 4 系统单参分岔图

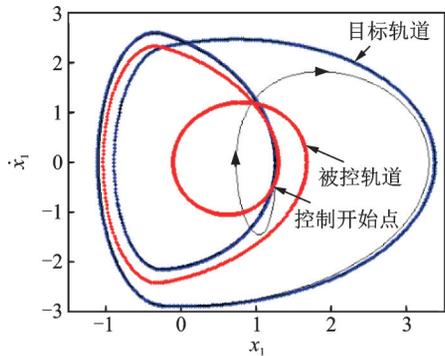
Fig. 4 The single-parameter bifurcation diagram of the system

通过控制吸引子之间的转迁避免系统出现擦边或鞍结分岔。

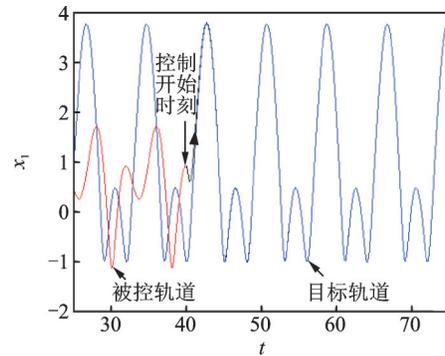
在系统参数(1)下,对系统在 $\omega = 0.78544$ (1-1 和 1-2 周期运动共存) 和 $\omega = 0.41296$ (1-3 周期运动

和混沌运动共存)处施加线性反馈控制。在控制过程中,设定控制区间为 $[5T, 15T]$,当控制持续时间超过 $10T$ 后,认为此参数耗费时间过多不符合控制要求;当 $e(t) < \epsilon$ (ϵ 为控制精度,设置为 0.00001) 时令 $s(t) = 0$ 控制退出,此时系统成功转迁到目标周期运动。

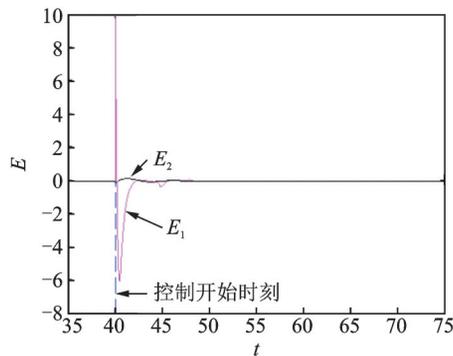
取控制参数 $r = 1, u_1 = 5$ 和 $u_2 = 0$ 。图 5 为 $\omega = 0.78544$ 处将 1-1 周期运动(红色轨线)转迁至 1-2 周期运动(蓝色轨线)的相图(黑色的相轨线代表控制过程)、位移的时间历程图、反馈输入力的时间历程图和控制误差的时间历程图。从图 5(c)可看出,控制开始反馈输入力 E_1 和 E_2 会快速减小;控制开始前和控制结束后 E_1 和 E_2 均为零,说明此种方法不仅不会改变系统原有的周期解,并且需要的能量较少。



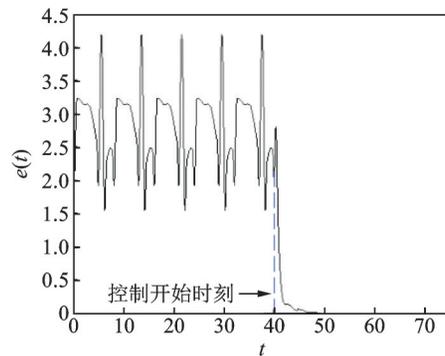
(a) 相轨迹转迁过程
(a) The migration of the phase trajectories



(b) 位移转迁过程
(b) The migration of the displacement



(c) 反馈控制力的时间历程图
(c) Time history of the feedback control force



(d) 控制误差时间历程图
(d) Time history of the control error

图 5 1-1 周期运动转迁至 1-2 周期运动的效果图

Fig. 5 The effect chart of 1-1 periodic motion migrating to 1-2 periodic motion

结合图 5(a) 和 (d) 可看出,当控制未施加时系统被控轨道和目标轨道之间的距离变化具有周期性;当施加控制后,被控轨道快速接近目标轨道,直至被控制到目标轨道上。将 1-1 周期运动转迁至 1-2 周期运动的过程如图 6 所示。将混沌运动(蓝色轨线)转迁至 1-3 周期运动(红色轨线)的过程如图 7 所示。

1-1 周期运动与 1-2 周期运动的相互转迁,不仅

可使系统工作在振幅较小的周期运动上,当激励频率正向或反向迭代时还可控制擦边和鞍结分岔的发生;将混沌运动迁移至 1-3 周期运动,可为混沌控制提供一种更节省能量的方法。

5 控制性能影响因素分析

由于在参数和控制状态变化时对反馈控制力

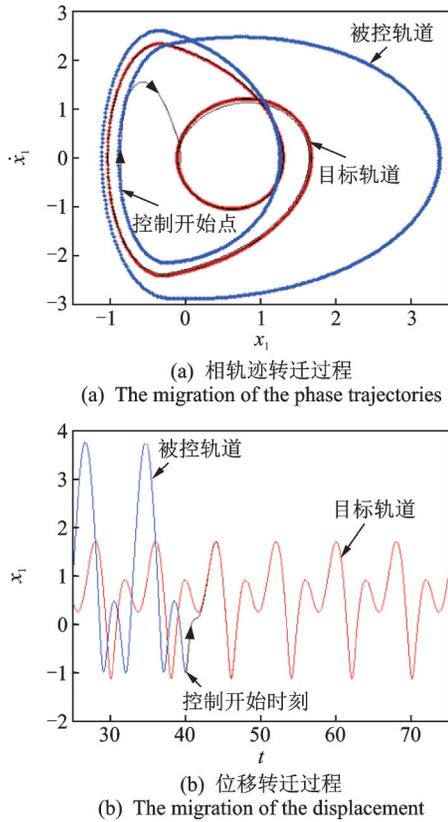


图6 1-2周期运动转迁至1-1周期运动的效果图
Fig. 6 The effect chart of 1-2 periodic motion migrating to 1-1 periodic motion

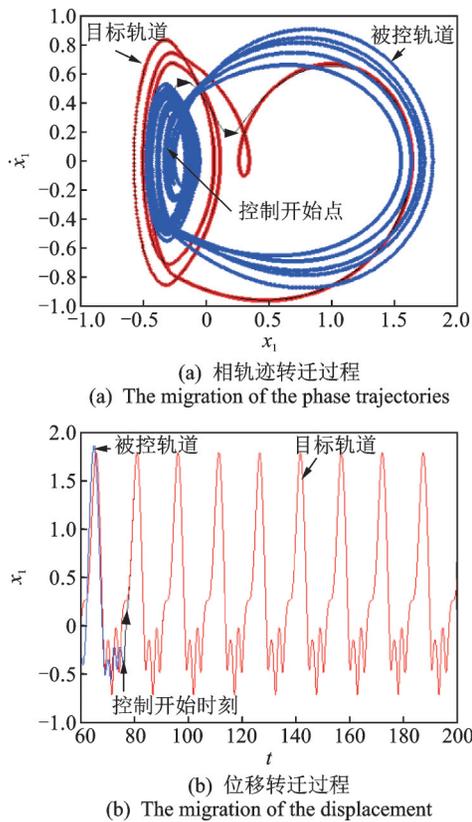


图7 混沌运动转迁至1-3周期运动的效果图
Fig. 7 The effect chart of chaotic motion migrating to 1-3 periodic motion

E_1 的影响较大,所以本文主要以反馈控制力 E_1 和控制时间来讨论不同的控制开始状态和参数对控制性能的影响,同时以 $\omega = 0.78544$ 处 1-1 周期运动转迁至 1-2 周期运动为例具体分析。由 5(d) 可看出,当控制未施加时系统被控轨道和目标轨道之间的距离变化规律具有周期性。选取一个周期内被控轨道和目标轨道之间距离 $e(t)$ 的局部最大值点(A 和 C)和最小值点(B 和 D),以及全局的最大值点(E)和最小值点(F)分别为控制开始状态进行控制(如图 8(a) 所示)。图 8(b) 为控制力 E_1 的时间历程图。从图 8(b) 可看出,不同的开始状态需要的控制力不同, $e(t)$ 最大时需要的控制力最大,而 $e(t)$ 最小时需要的控制力最小,所以在共存吸引子相互转迁的过程中应选择被控轨道和目标轨道之间距离最小时施加控制。

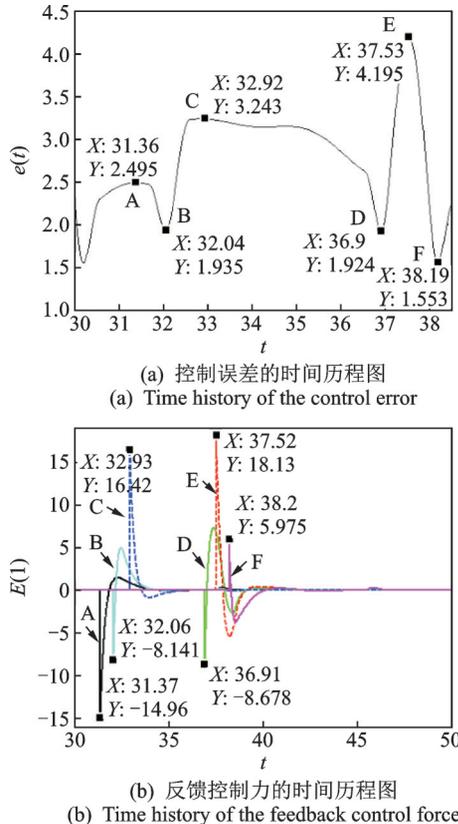


图8 不同控制开始位置对反馈控制力 E_1 的影响
Fig. 8 The effect of different control starting positions on feedback control force

图 9-10 为控制力 E_1 和控制持续时间随控制参数 ($r=1$) 变化图,图中不同的颜色代表反馈控制力 E_1 的最大幅值和控制持续时间。从图 9 可看出,随着参数 u_1 的增大, E_1 逐渐减小;随着参数 u_2 的增大, E_1 逐渐增大;控制时间随参数 u_2 的增大而减小,随参数 u_1 的增大先减小后增大。所以合理的控制参数对实现有效控制有着非常重要的意义。

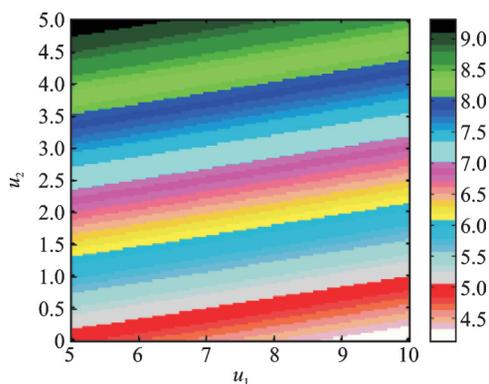
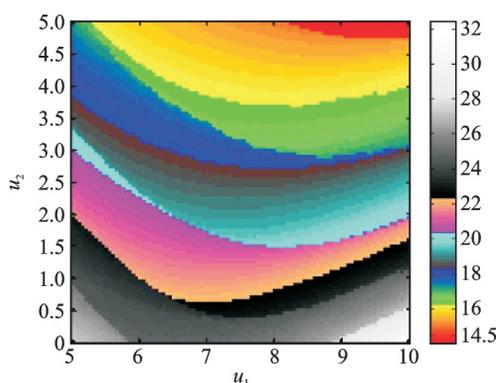
图9 反馈控制力 E_1 随控制参数变化图Fig. 9 The graph of feedback control force E_1 with different control parameters

图10 控制时间随控制参数变化图

Fig. 10 The graph of control duration with different control parameters

6 结 论

本文针对两自由度含弹性约束碰撞振动系统的吸引子共存现象,利用线性反馈控制方法对共存吸引子实现了相互转迁控制,同时对线性反馈控制方法的稳定性和可行性进行了分析,可以得到如下结论:

(1)在不改变原系统周期运动特性的情况下,基于原碰撞微分系统的线性反馈控制方法可实现吸引子之间的相互转迁。吸引子之间的相互转迁一方面可使系统工作在振幅较小的周期运动上;另一方面可控制擦边、鞍结等分岔和混沌运动的发生,为系统运动状态控制提供新的思路。

(2)在共存吸引子相互转迁过程中,应选择被控轨道和目标轨道之间距离最小时开始施加控制;合理的控制参数可有效节省反馈控制力和控制时间。利用优化算法对控制参数进行优化是本文继续研究的方向。

参考文献:

[1] 金栋平,胡海岩.碰撞振动及其典型现象[J].力学进

展,1999,29(2):155-164.

Jin Dongping, Hu Haiyan. Vibro-impacts and their typical behaviors of mechanical systems[J]. Advances in Mechanics, 1999, 29(2): 155-164.

[2] 丁旺才,谢建华.碰撞振动系统分岔与混沌的研究进展[J].力学进展,2005,35(4):513-524.

DING Wangcai, Xie Jianhua. Advances of research on bifurcations and chaos in vibro-impact system[J]. Advances in Mechanics, 2005, 35(4): 513-524.

[3] Shaw S W, Holmes P. A periodically forced piece-wise linear oscillator[J]. Journal of Sound and Vibration, 1983, 90(1): 129-155.

[4] Kundu Soumya, Banerjee Soumitro, Ing James, et al. Singularities in soft-impacting systems[J]. Physica D, 2012, 241(22): 553-565.

[5] 张惠,丁旺才,李飞.两自由度含间隙和预紧弹簧碰撞振动系统动力学分析[J].工程力学,2011,28(3):209-217.

ZHANG Hui, DING Wang-cai, LI Fei. Dynamics of a two-degree-of-freedom impact system with clearance and pre-compressed spring[J]. Engineering Mechanics, 2011, 28(3): 209-217.

[6] 乐源,缪鹏程.一类碰撞振动系统的激变和拟周期-拟周期阵发性[J].振动与冲击,2017,36(7):1-7.

YUE Yuan, MIAO Pengcheng. Crisis and quasiperiod-quasiperiod intermittency in a vibro-impact system[J]. Journal of Vibration and Shock, 2017, 36(7): 1-7.

[7] Leine R I, Nijmeijer H. Dynamics and Bifurcation of Non-Smooth Mechanical Systems [M]. Berlin: Springer, 2004: 101-118.

[8] 徐慧东,谢建华.一类两自由度分段线性非光滑系统的分岔与混沌[J].振动工程学报,2008,21(3):279-285.

XU Hui-dong, XIE Jian-hua. Bifurcation and chaos of a two-degree-of-freedom non-smooth system with piece-wise-linearity[J]. Journal of Vibration Engineering, 2008, 21(3): 279-285.

[9] 任传波,周继磊.一类非连续阻尼力分段线性系统的分岔研究[J].力学学报,2011,43(6):1191-1195.

Ren Chuanbo, Zhou Jilei. Bifurcation research for piece-wise linear system involved in discontinuous damping force[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2011, 43(6): 1191-1195.

[10] 贾启芬,于雯,刘习军.汽车悬架系统的分段线性非线性振动机理的研究[J].工程力学,2005,22(1):88-92.

JIA Qi-fen, YU Wen, LIU Xi-jun. Dynamic characteristics of bilinear suspension system of vehicles[J]. Engineering Mechanics, 2005, 22(1): 88-92.

[11] 李健,张思进.非光滑动力系统胞映射计算方法[J].

- 固体力学学报, 2007, 28(1):93-96.
- Li Jian, Zhang Sijin. Cell-mapping computation method for non-smooth dynamical systems[J]. ACTA Mechanica Sinica, 2007, 28(1):93-96.
- [12] Antonio S E Chong, Yuan Yue, Pavlovskaja Ekaterina, et al. Global dynamics of a harmonically excited oscillator with a play: Numerical studies[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2017, 94 (7) : 98-108.
- [13] Jackson Atlee E, Grosu I. An open-plus-closed-loop (OPCL) control of complex dynamic systems [J]. Physica D, 1995, 85(1-2): 1-9.
- [14] Shen Jian-he, Chen Shu-hui. An open-plus-closed-loop control for chaotic Mathieu-Duffing oscillator [J]. Applied Mathematics and Mechanics (English Edition), 2009, 30(1): 19-21.
- [15] 柴 凯,楼京俊,朱石坚,等. 两自由度非线性隔振系统的吸引子迁移控制[J]. 振动与冲击, 2018, 37(22): 10-16.
- CHAI Kai, LOU Jingjun, ZHU Shijian, et al. Attractor migration control of a two-degree-of-freedom nonlinear vibration isolation system [J]. Journal of Vibration and Shock, 2018, 37(22): 10-16.
- [16] 赵建学,俞 翔,柴 凯,等. 准零刚度隔振系统吸引子迁移控制研究[J]. 振动与冲击, 2018, 37(22): 220-224.
- ZHAO Jianxue, YU Xiang, CHAI Kai, et al. Attractor migration control of a vibration isolation system with quasi zero stiffness[J]. Journal of Vibration and Shock, 2018, 37(22): 220-224.

Attractor migration control of a two-degree-of-freedom vibro-impact system with soft constraints

LI De-yang^{1,2}, DING Wang-cai², DING Jie², WEI Xiao-juan²

(1. School of Materials Science and Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China;

2. School of Mechatronic Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In the premise of not changing periodic solutions to the original system and with considering multiple coexistent attractor in the vibro-impact system, attractor migration control of a two-degree-of-freedom vibro-impact system with soft constraints is studied by using the linear feedback control method. Firstly, the two-degree-of-freedom vibro-impact system with soft constraints is established, the existing condition of the periodic impact motion is deduced. The stability, bifurcation and the cause of the multiple coexistent attractor of the system are analyzed by Floquet theory. Then, the numerical experiments verify that a reasonable linear feedback control method can effectively control the migration of different attractors in such non-smooth vibro-impact systems. Finally, the influence of different control positions and parameters on the control performance is discussed.

Key words: nonlinear vibration; nonsmooth systems; multiple coexistent attractor; linear feedback control; bifurcation

作者简介: 李得洋(1986-),男,讲师。电话:18919195902;E-mail:lidayang666@163.com

通讯作者: 丁旺才(1964-),男,教授。电话:(0931)4956173;E-mail:Dingwc@mail.lzjtu.cn