

功率分流齿轮传动参数空间解域界及吸引域全局特性

林 何^{1,2,3}, 洪 灵², 刘 霞^{1,3}, 胥光申^{1,3}

(1. 西安工程大学机电工程学院, 陕西 西安 710048; 2. 西安交通大学机械结构强度与振动国家重点实验室, 陕西 西安 710049; 3. 西安工程大学西安市现代智能纺织装备重点实验室, 陕西 西安 710600)

摘要: 为揭示齿轮系统动力学全局解域特性, 建立了功率分流直齿轮系统非线性振动模型, 结合胞映射与区域分解思想构建了主要激振参数下的系统全局解域求解算法。求解了阻尼比分别与综合传动误差、啮合频率和齿侧间隙等参数配置下的平面解域界结构, 揭示了两参量解域区内的动态行为潜在趋势, 如倍周期分岔序列、混沌窗口带等的迁移演化。借助 Lyapunov 指数对不同误差幅值下分岔通道结构进行追踪, 验证了分岔节点与解域界子域临界点相吻合。数值求解多组阻尼比下的吸引域全局性态, 发现混沌吸引域与周期 1 吸引子吸引域间相互扩张与进退演变激烈, 二者胞域边界处系统局部平衡态势异常脆弱; 当阻尼比为 0.04 时吸引域行为相对敏感, 多吸引子共存现象突出。其结果可为齿轮系统振动优化及参数全局设计提供参考。

关键词: 机械振动; 功率分流传动; 胞映射; 解域界; 吸引域

中图分类号: TH113.1; TH132.41; O322 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2021)02-0235-08

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2021.02.003

引 言

在装备制造领域齿轮传动扮演了不可或缺的重要角色, 特别在航空航天、新能源汽车、风电机组及高速轨道交通装备等国民经济重点行业, 其需求更为强烈, 其中, 功率分流齿轮传动形式因其独特的结构布局在功重比及紧凑性等方面展现出突出优势, 正越来越受到重视^[1-2]。振动和噪声是衡量齿轮传动动态品质的显著要素, 通常当系统运行至“不良”参数激振区, 如间隙或时变刚度等的部分非线性激励响应带, 系统的瞬态碰振或混沌倾向将显著增大^[3]。实际中齿轮副的工作难以避免地遭受内、外部激励, 反映在振动模型中即多参量间的作用最终诱发系统复杂动态反馈, 如分岔、跳跃和混沌等。因此, 全面地开展齿轮副传动工况因素的监控对合理预测或规避无规则振动尤为必要。刘镇星等^[4]考虑了舰船摇摆环境下滑动轴承-齿轮副系统的动力学特性, 观测到较小齿隙下摇摆引起的挤齿现象。魏静等^[5]建立了针对齿廓修形与齿向修形

时斜齿轮传动刚度与误差非线性耦合模型, 分析了修形参数对系统动态特性的影响。Yang 等^[6]从裂纹扩展的角度, 求解了裂纹尺寸对 3 自由度齿轮系统非线性振动的影响。现有齿轮系统模型动力学研究大都建立在单一参数激励通道下, 因分析手段的差异, 对实际多源激励的协同影响未能深刻揭示, 同时响应结果的完整性呈现也受到局限。

胞映射思想最初由 Hsu 提出, 用于离散空间域胞化求解, 目前已扩展出插值胞映射、点映射-胞映射及广义胞映射图论法等诸多改进版本, 兼顾可行性的同时效率与精度也不断提升。在非线性动力学方面, 胞化离散不仅可对系统状态空间进行求解, 还可从不同维度方向自由配置受关注的参数区, 得到解域界细节^[7-9]。解域界分析以区域离散技术为基础, 结合胞映射揭示参数空间和状态空间特定目标域下的潜藏振动信息, 对指导齿轮系统减振控制与动载优化具有积极意义。Kahraman 和 Singh 借助 Poincaré 映射和相空间离散追踪了多组吸引子吸引域的共存行为^[10]。Farshidianfar 和 Saghafi 基于 Melnikov 方法数值计算了单对齿轮副在

收稿日期: 2019-08-24; **修订日期:** 2020-05-18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51805402); 陕西省自然科学基金基础研究计划项目(2019JQ-851); 陕西省教育厅专项科研计划(18JK0351); 西安市现代智能纺织装备重点实验室(2019220614SYS021CG043)

全局域中的同宿分岔和混沌迁移路径^[11-12],并对混沌参数带进行了综合性预测。林何等^[13]采用解域离散与 Lyapunov 指数等工具获取了并车螺旋锥齿轮系统两参量平面上的解域界和倍周期分岔分布形态。在齿轮动力学领域^[14-15],各类啮合激励参数是与系统动态响应和振动行为息息相关的关联要素,借助解域界和胞映射可将系统多源激励参数间共同作用下的动力学行为整体性态从更广层面高效、详尽地完成解析。本文对功率分流齿轮系统开展全局特性研究以不同维度参数域和特定初值状态域为研究对象,解域界直观呈现系统受激响应振动变化趋势,在二维视角下揭示全局分岔与混沌路径,相空间吸引域信息反馈出啮合振动对初始状况的敏感依赖性,揭示吸引子共存及吸引域演化等全局性态。

1 动力学模型与解域基础

1.1 功率分流齿轮系统振动模型

图 1 为功率分流齿轮系统动力学模型,主动轮为 g_0 ,从动轮为 g_1 和 g_2 ,对应的扭矩分别为 T_0, T_1 和 $T_2, r_i (i=0, 1, 2)$ 为各齿轮基圆半径, $b_j (j=1, 2)$ 为

齿侧间隙值的一半, c_j 表示啮合阻尼, $k_j(t)$ 表示时变啮合刚度, $e_j(t)$ 为基圆切向综合传动误差。假定系统分扭结构关于主动轮中心两侧理想对称,两从动轮物理结构属性相同,不考虑齿面间摩擦及润滑油膜受热膨胀等。

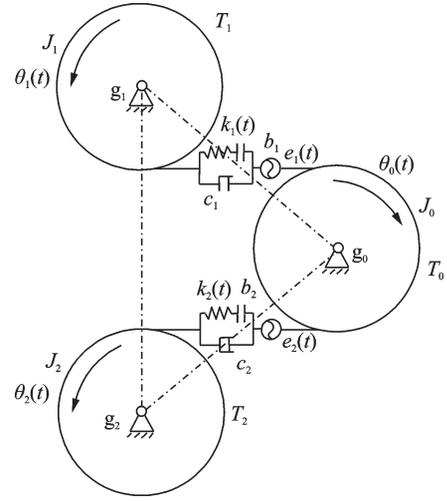


图 1 功率分流直齿轮系统动力学模型

Fig. 1 Dynamic model of power-split spur gear transmission

根据牛顿运动学定律建立如图 1 所示的系统啮合传动振动微分方程

$$\begin{cases} J_0 \frac{d^2 \theta_0(t)}{dt^2} + r_1 c_1 \left[r_0 \frac{d\theta_0(t)}{dt} - r_1 \frac{d\theta_1(t)}{dt} - \frac{de_1(t)}{dt} \right] + r_2 c_2 \left[r_0 \frac{d\theta_0(t)}{dt} - r_2 \frac{d\theta_2(t)}{dt} - \frac{de_2(t)}{dt} \right] + \\ r_1 k_1(t) [r_0 \theta_0(t) - r_1 \theta_1(t) - e_1(t)] + r_2 k_2(t) [r_0 \theta_0(t) - r_2 \theta_2(t) - e_2(t)] = T_0 \\ J_1 \frac{d^2 \theta_1(t)}{dt^2} - r_1 c_1 \left[r_0 \frac{d\theta_0(t)}{dt} - r_1 \frac{d\theta_1(t)}{dt} - \frac{de_1(t)}{dt} \right] - r_1 k_1(t) [r_0 \theta_0(t) - r_1 \theta_1(t) - e_1(t)] = -T_1 \\ J_2 \frac{d^2 \theta_2(t)}{dt^2} - r_2 c_2 \left[r_0 \frac{d\theta_0(t)}{dt} - r_2 \frac{d\theta_2(t)}{dt} - \frac{de_2(t)}{dt} \right] - r_2 k_2(t) [r_0 \theta_0(t) - r_2 \theta_2(t) - e_2(t)] = -T_2 \end{cases} \quad (1)$$

首先引入两侧齿轮啮合副间的相对位移以 $x_i(t) (i=1, 2)$ 表示,对 $x_i(t)$ 实施二阶求导得

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = r_0 \ddot{\theta}_0(t) - r_1 \ddot{\theta}_1(t) - \ddot{e}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) = r_0 \ddot{\theta}_0(t) - r_2 \ddot{\theta}_2(t) - \ddot{e}_2(t) \end{cases} \quad (2)$$

式(1)中部分系数项数值间存在较大数量级差异,为避免方程组求解迭代时产生病态,采取量纲一化方式解决。定义特征长度 b_c 为 1.0×10^{-4} m,量纲

一啮合频率为 ω ,量纲一时间为 τ ,有 $\tau = \omega_n t, \omega_n$ 为时间标称尺度,可推导出量纲一位移、速度和加速度 X, \dot{X} 和 \ddot{X} 分别为:

$$X = x/b_c, \quad \dot{X} = \dot{x}/(b_c \omega_n), \quad \ddot{X} = \ddot{x}/(b_c \omega_n^2)$$

联合动力学方程组(1)和(2)消除刚体位移,并根据 X, \dot{X} 和 \ddot{X} 对 x, \dot{x} 及 \ddot{x} 完成量纲一化转换,得到系统方程组为

$$\begin{cases} \ddot{X}_1 = \frac{r_0 T_0}{J_0 \omega_n^2 b_c} - \frac{r_0 r_1 k_1 f(X_1)}{J_0 \omega_n^2} - \frac{r_0 r_1 c_1 \dot{X}_1}{J_0 \omega_n} - \frac{r_0 r_2 k_2 f(X_2)}{J_0 \omega_n^2} - \frac{r_0 r_2 c_2 \dot{X}_2}{J_0 \omega_n} - \frac{r_1^2 k_1 f(X_1)}{J_1 \omega_n^2} - \\ \frac{r_1^2 c_1 \dot{X}_1}{J_1 \omega_n} + \frac{r_1 T_1}{J_1 \omega_n^2 b_c} - \ddot{e}_1(t) \\ \ddot{X}_2 = \frac{r_0 T_0}{J_0 \omega_n^2 b_c} - \frac{r_0 r_1 k_1 f(X_1)}{J_0 \omega_n^2} - \frac{r_0 r_1 c_1 \dot{X}_1}{J_0 \omega_n} - \frac{r_0 r_2 k_2 f(X_2)}{J_0 \omega_n^2} - \frac{r_0 r_2 c_2 \dot{X}_2}{J_0 \omega_n} - \frac{r_2^2 k_2 f(X_2)}{J_2 \omega_n^2} - \\ \frac{r_2^2 c_2 \dot{X}_2}{J_2 \omega_n} + \frac{r_2 T_2}{J_2 \omega_n^2 b_c} - \ddot{e}_2(t) \end{cases} \quad (3)$$

式中 $\ddot{e}(\tau) = E\omega^2 \sin(\omega\tau + \varphi)$, φ 为初始相位角, E 为量纲一误差幅值。

齿侧间隙分段函数 $f(X_i)$ ($i=1, 2$) 的表达式为

$$f(X_i) = \begin{cases} X_i - \frac{b}{2}, & X_i > \frac{b}{2} \\ 0, & X_i \leq \left| \frac{b}{2} \right| \\ X_i + \frac{b}{2}, & X_i < -\frac{b}{2} \end{cases} \quad (i=1, 2) \quad (4)$$

式中 b 为量纲一齿侧间隙。

结合式(3)和(4)整理后的系统振动方程组变成关于量纲一时间 τ 的二阶微分方程组, 其矩阵形式为

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + Kf(X, \tau) = F \quad (5)$$

式中 M, K 和 C 为量纲一化后的系统质量、刚度和阻尼矩阵, F 为载荷列矢量, $f(X, \tau)$ 表示齿侧间隙分段函数。

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{r_0 r_1 c_1}{J_0 \omega_n} - \frac{r_1^2 c_1}{J_1 \omega_n} & -\frac{r_0 r_2 c_2}{J_0 \omega_n} \\ -\frac{r_0 r_1 c_1}{J_0 \omega_n} & -\frac{r_0 r_2 c_2}{J_0 \omega_n} - \frac{r_2^2 c_2}{J_2 \omega_n^2} \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} -\frac{r_0 r_1 k_1}{J_0 \omega_n^2} - \frac{r_1^2 k_1}{J_1 \omega_n^2} & -\frac{r_0 r_2 k_2}{J_0 \omega_n^2} \\ -\frac{r_0 r_1 k_1}{J_0 \omega_n^2} & -\frac{r_0 r_2 k_2}{J_0 \omega_n^2} - \frac{r_2^2 k_2}{J_2 \omega_n^2} \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{r_0 T_0}{J_0 \omega_n^2 b_c} + \frac{r_1 T_1}{J_1 \omega_n^2 b_c} - \ddot{e}_1(t) \\ \frac{r_0 T_0}{J_0 \omega_n^2 b_c} + \frac{r_2 T_2}{J_2 \omega_n^2 b_c} - \ddot{e}_2(t) \end{bmatrix}.$$

考虑到 Runge-Kutta 法求解原理特点, 将含激励项的二阶微分方程式(5)降阶为一阶状态方程, 主要对二阶导变量 \ddot{X}_1 和 \ddot{X}_2 和一阶导变量 \dot{X}_1 和 \dot{X}_2 做变量代换, 构造出的一阶微分方程组为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = \frac{r_0 T_0}{J_0 \omega_n^2 b_c} - \frac{r_0 r_1 k_1 f(y_1)}{J_0 \omega_n^2} - \frac{r_0 r_1 c_1 y_2}{J_0 \omega_n} - \frac{r_0 r_2 k_2 f(y_3)}{J_0 \omega_n^2} - \frac{r_0 r_2 c_2 y_4}{J_0 \omega_n} - \frac{r_1^2 k_1 f(y_1)}{J_1 \omega_n^2} - 2\xi_1 y_2 + \frac{r_1 T_1}{J_1 \omega_n^2 b_c} - \ddot{e}_1(t) \\ \dot{y}_3 = y_4 \\ \dot{y}_4 = \frac{r_0 T_0}{J_0 \omega_n^2 b_c} - \frac{r_0 r_1 k_1 f(y_1)}{J_0 \omega_n^2} - \frac{r_0 r_1 c_1 y_2}{J_0 \omega_n} - \frac{r_0 r_2 k_2 f(y_3)}{J_0 \omega_n^2} - \frac{r_0 r_2 c_2 y_4}{J_0 \omega_n} - \frac{r_2^2 k_2 f(y_3)}{J_2 \omega_n^2} - 2\xi_2 y_4 + \frac{r_2 T_2}{J_2 \omega_n^2 b_c} - \ddot{e}_2(t) \end{cases} \quad (6)$$

式中 $\xi_1 = \xi_2 = \xi$, $\xi = c_1 / (2M\omega)$, M 为啮合副等效质量; 状态变量 y_1, y_2, y_3 和 y_4 分别对应于 X_1, \dot{X}_1, X_2 和 \dot{X}_2 。

1.2 解域求解基础

在区域分解算法基础上, 选取参数域 γ 范围为 $[\alpha^0, \alpha'] \times [\beta^0, \beta']$ (如图 2 所示), 其中 α^0 和 α' 分别为参数区间 α 两侧域界值, β^0 和 β' 分别为参数区间 β 上下域界值。参数胞域 γ 在 α 和 β 方向上可分割为规则矩形胞单元, 各胞元编号标识为 c_{ij} ($i=0, 1, \dots, m; j=0, 1, \dots, n$), 以 α 维度为例, 相邻胞间参数间隔为 $h_j = (\alpha' - \alpha^0) / n$, 故以起始胞 α^0 递推, α 向第 k 个胞的数值信息为 $\alpha_k = \alpha^0 + k \times h_j$ 。

域 γ 中参数胞离散动力学信息分布为

$$\gamma \rightarrow \begin{bmatrix} (\alpha_0, \beta_0) & (\alpha_0, \beta_1) & \dots & (\alpha_0, \beta_j) \\ (\alpha_1, \beta_0) & (\alpha_1, \beta_1) & \dots & (\alpha_1, \beta_j) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\alpha_i, \beta_0) & (\alpha_i, \beta_1) & \dots & (\alpha_i, \beta_j) \end{bmatrix} \quad (7)$$

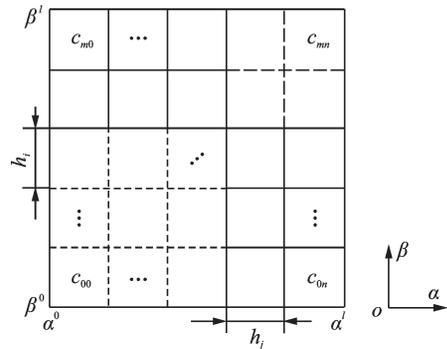


图 2 解域胞化离散平面

Fig. 2 Cellular discrete plane of solution domain

对于任意一点集 $Q \subset \mathbb{R}^n$, n 为正整数, 存在一点 $X^{(i)} \in Q$, 即 $X^{(i)}$ 是 Q 中的一点, 假设 $X^{(i)}$ 的第 j 个分量为 $X_j^{(i)}$ ($j=1, 2, \dots, n$); 同样存在另外一元素 Y_j 为点 Y 的第 j 个分量, 那么可通过下式确定点 Y 与点集 Q 之间的关系

$$\rho(Y, Q) = \min(\text{dis}(Y, X^{(i)})), \quad i=1, 2, \dots, m;$$

$$\text{dis}(Y, X^{(i)}) = \max |Y_j - X_j^{(i)}|, \quad j=1, 2, \dots, n \quad (8)$$

式中 $\rho(Y, Q)$ 表示 Y 与 Q 之间的范数, $\text{dis}(Y, X^{(i)})$ 表示分量 $Y_j, X_j^{(i)}$ 之间距离的最大值。

给定一极小值 ϵ_1 , 如果 $\text{dis}(Y, X^{(i)})$ 满足

$$\rho(Y, Q) < \epsilon_1 \quad (9)$$

则表明点 Y 同样位于点集 Q 所在的吸引域内。

单一维度上的胞序列 $c = \{c_1, c_2, \dots, c_i\}$, 各胞下相轨迹在 Poincaré 截面上相交出系列映射点集, 解

域归属由吸引子周期运动属性界定,如 k 周期时下述映射法则成立

$$f^0(X_i, c_i) \rightarrow f^1(X_i, c_i) \rightarrow \dots \rightarrow f^k(X_i, c_i) \quad (k=0, 1, \dots, n) \quad (10)$$

式中 f 为映射法则, k 为周期数目。

若域内某一胞 (x_i, \dot{x}_i) 与其周围邻胞 (x_{i+1}, \dot{x}_j) , (x_i, \dot{x}_{j+1}) 和 (x_{i+1}, \dot{x}_{j+1}) 等呈现不同动力学性态,则意味着此处为子域边界,胞元 (x_i, \dot{x}_i) 即为边界胞。

在式(5)中首先对感兴趣空间离散胞化,明确各维度上的总吸引胞数目及域边界条件,如 $\alpha_i \in [-\alpha, \alpha], \beta_j \in [-\beta, \beta]$ 。从 0 时刻开始计算直至系统步入稳态,选定一 Poincaré 截面截取吸引子轨线,由状态截点 (X_j, \dot{X}_j) 计算轨道映射偏差,取相轨迹的相邻 4 次映射偏差,即从 X_j 和 \dot{X}_j 上计算差值 d_i 和 \dot{d}_i ($i=0, 1, 2, 3$) 并与给定值 $\epsilon_1 = 1.0 \times 10^{-3}$ 和 $\epsilon_2 = 1.0 \times 10^{-4}$ 做比较,如果连续 4 次 d_i 与 \dot{d}_i 均小于 ϵ_1 和 ϵ_2 ,进一步通过循环叠加即可确定吸引域周期性态,最终解出吸引域全局结构,对任意第 j 步相邻 4 轮差值的计算式为

$$d_n = \|X_j^{T-n} - X_j^{T-(n+1)}\|, \dot{d}_n = \|\dot{X}_j^{T-n} - \dot{X}_j^{T-(n+1)}\| \quad (n=0, 1, 2, 3) \quad (11)$$

周期胞收敛后即可停止迭代,若循环映射次数超过一定限度 ($\geq 10^3$) 则视为混沌态。为确保数值算法的准确性,对混沌吸引子额外增加 5 次验证计算,参数空间解域界求解流程如图 3 所示。

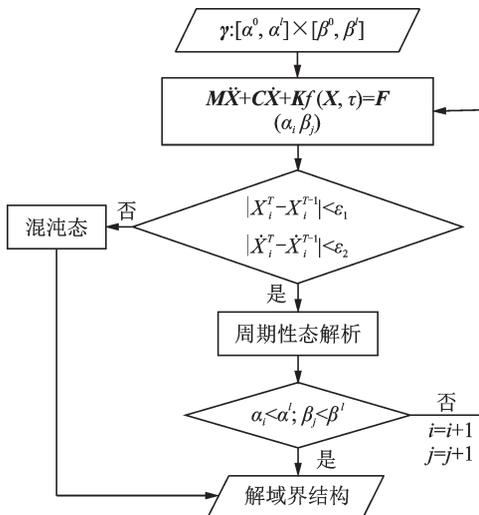


图 3 参数域解域界求解流程

Fig. 3 Calculation diagram of parameterized solution domain

2 全局解域特性

假定从动轮 g_1, g_2 几何结构与物理属性完全相同;主、从动轮齿数分别为 32, 105, 转动惯量分别为

$0.003 \text{ kg}\cdot\text{m}^2, 0.197 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, 模数为 3, 平均啮合刚度为 $k = 7.8 \times 10^8 \text{ N/m}$; 输入扭矩 $T_0 = 188 \text{ N}\cdot\text{m}$; 阻尼比取 $\xi \in [0.01, 0.18]$; 量纲一齿侧间隙取 $b \in [0.1, 0.4]$; 量纲一啮合频率取 $\omega \in [0.1, 0.5]$ 。

2.1 参数空间解域界

将 ξ 和 E 构成的参数域划分为一系列规则矩形胞,各维度方向分割 300 个胞,以参数胞几何中心代表的数值实施计算。取 $\xi \times E$ 有限域 $[0.05, 0.18] \times [0.05, 0.21]$, 得到参数解域界如图 4 所示,图中 P_i 代表周期态为 i 。解域界内部是由聚集的 1, 2, 3, 4 和 8 周期的参数胞构成,这些参数胞预示着系统的稳态行为和态势。可以看出 P1 和 P2 状态参数胞占据了较大片域,具有良好的稳定性,后续的 4 周期胞历经短暂参数带直接转为 8 周期响应胞,再由 8 周期通道快速进入混沌域,这一过程与倍周期分岔规律相一致,同时也揭示了分岔通道的分布结构。当阻尼比增加到 0.08 时,解域界中出现了 P3 响应区,促使混沌区提前出现并呈扩大趋势。从 $\xi \times E$ 域中竖直方向可以看出阻尼比在从 0.05 增至 0.18 的过程中,周期状态间的转变更为显著,表明系统振动行为对阻尼比变化敏感。

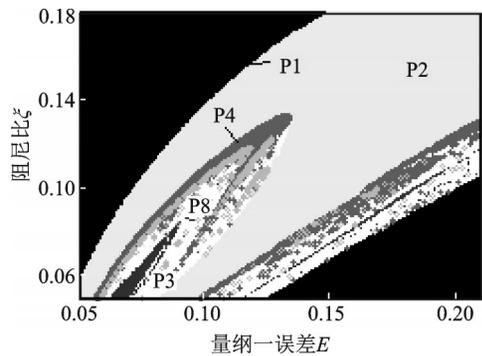


图 4 阻尼比与综合误差构成的解域界

Fig. 4 Solution domains of damping ratio and synthetical transmission error

从图 4 中选取 $E = 0.1, \xi \in [0.05, 0.18]$ 工况参数,由图 5 可知啮合运动在阻尼比减小时经历了倍周期分岔,依次出现 1 周期、2 周期、4 周期, ..., 混沌等转变;此后,混沌域内局部区再次生成倍周期分岔窗口,阻尼比的减小使啮合运动复杂化。混沌区响应的无规则性还导致了啮合副正反向振动,啮合位移存在负值, $X > -1$ 表明未产生齿背冲击。图 6 中两条最大 Lyapunov 指数曲线定量表征了周期区 ($\lambda_1 < 0$) 与混沌区 ($\lambda_1 > 0$) 的参数域范围以及振动的非线性强度, λ_1 值越大表明非线性振动越强, λ_1 曲

线与分岔节点相吻合,二者共同验证了图 4 中解域界结果的准确性。

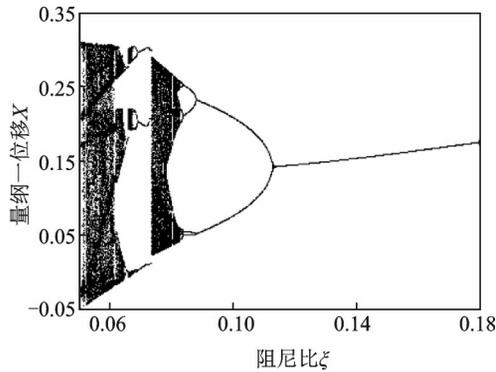


图 5 啮合运动分岔结构

Fig. 5 Bifurcation structure of meshing vibration

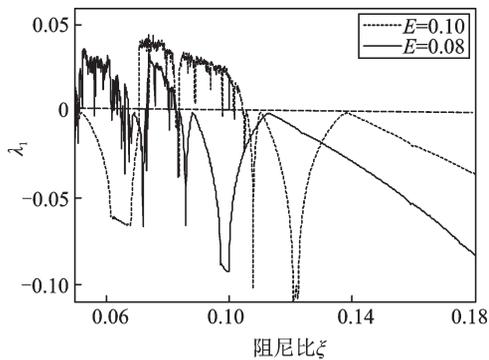


图 6 最大 Lyapunov 指数

Fig. 6 Largest Lyapunov exponent

图 7 中解域界由 $\xi \times \omega \in [0.05, 0.18] \times [0.2, 0.6]$ 构成,域内 1 周期和 2 周期为稳定后的主要状态,其中 ξ 较大或 ω 较小时系统易趋向简单周期运动。1 周期胞域内出现不稳定混沌,在阻尼比方向呈狭长带;随着啮合频率的增大,系统运动状态切换更频繁并最终转入混沌域,解域界直观细致地展示了系统状态的变化。图 8 为 ξ 和 b 构成的解域界,随阻尼比增大啮合振动变化层次性较明显,当 $b > 0.2$ 时, ξ 在 $[0.07, 0.1]$ 区间以混沌振动为主,该参数域界上边界胞较为光滑,阻尼比方向呈周期倍化演变且状态转换未出现周期性跨越,同时齿侧间隙相比阻尼比对系统状态改变的驱动性要弱。从 $\xi \times b$ 中分别取胞值 $(0.15, 0.3)$, $(0.12, 0.3)$, $(0.115, 0.3)$ 和 $(0.08, 0.3)$, 在图 9 中分别得到 P1, P2, P4 和混沌吸引子,与 $\xi \times b$ 解域界结果相一致。

2.2 状态空间吸引域

状态空间全局特性揭示系统在不同初值条件下长期运动趋势。在 $X \times \dot{X} \in [-3, 3] \times [-3, 3]$

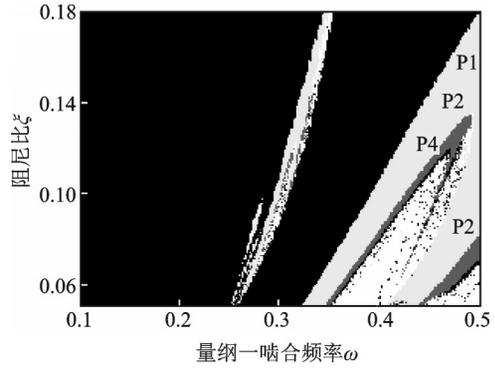


图 7 阻尼比与啮合频率构成的解域界

Fig. 7 Solution domains of damping ratio and meshing frequency

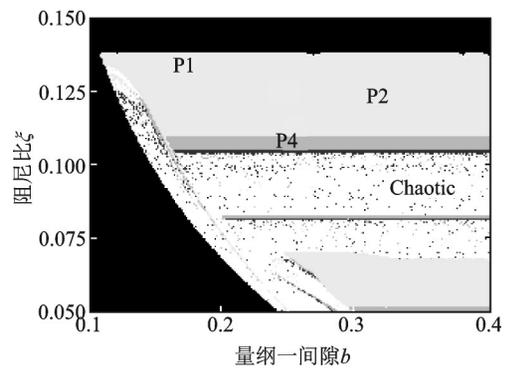


图 8 阻尼比与齿侧间隙构成的解域界

Fig. 8 Solution domains of damping ratio and backlash

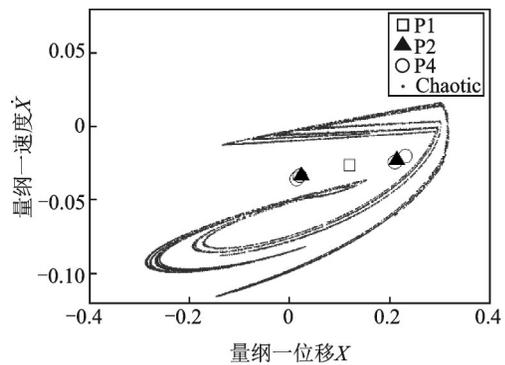


图 9 解出的部分吸引子

Fig. 9 Some attractors calculated

区域内取 400×400 个正规胞,在图 4 混沌态子域中取 ξ 为 0.1, E 为 0.205 时测试吸引域性态(如图 10 所示)。全局域主要由 1 周期吸引域(空白区)和混沌吸引域(灰色区)构成,二者基本覆盖整个求解区,域边界光滑连续,域内外层次分明,两侧存在跳变的可能,因外层为 1 周期域,故域外胞稳定性更好。符号 B 表示域边界,即 1 周期吸引域与混沌吸引域的边界胞构成,总数量为 2479,此时中心区域吸引域演变更为激烈,两吸引域间交错嵌入现象明显。计算知混沌胞的占比为 40.36%,对比解域界图 4 知子域骤变会导致系统状态急剧转变,致使局

部平衡态势异常脆弱,吸引子在受碰激发时极易趋向更稳定轨道上。

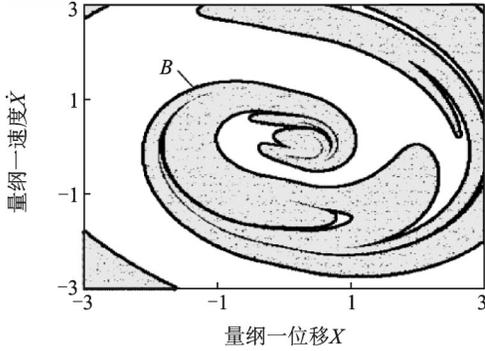


图10 阻尼比为0.1时吸引子吸引域

Fig. 10 Basin of attraction when damping ratio is 0.1

改变 ξ 至0.02时全局吸引域如图11所示,相比 ξ 为0.1时吸引域间更加嵌入,但主要敏感空间有所缩小,覆盖区由之前的 $[-3, 3] \times [-3, 3]$ 收缩至 $[-1, 1] \times [-1, 1]$,全局域仍以1周期域和混沌域构成,两者状态胞的数量分别为89760和71000,此时,两吸引域交错更深且接触范围更广,表明低阻尼时系统响应状态是较敏感的,起始状态受干扰时易从一个吸引域转入另一个吸引域。

当 ξ 增大为0.03时(如图12所示),相空间中仅存在混沌域和P1吸引域,各吸引域均有向外发散扩充态势,混沌吸引域螺旋结构相较于 ξ 为0.02时更宽,结构趋向简单,各吸引域胞集变得更为集中,此时P1吸引子与混沌吸引子间相互转移敏感性下降,表明系统对初始条件具有更强的抗干扰能力。

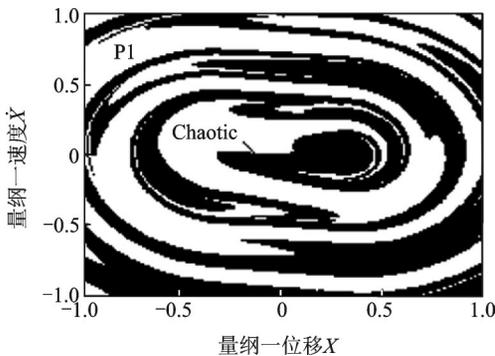


图11 阻尼比为0.02时全局吸引域

Fig. 11 Global basin of attraction when damping ratio is 0.02

进一步增大 ξ 为0.04,由图13和14可见混沌吸引域分布于4周期吸引域内侧,此时域边界分形特征清晰,这些镶嵌于4周期吸引域内部的初值将在稳态时促使系统收敛入混沌态。状态变化主要集中在4周期吸引域的外围,1周期吸引域在整个域中所占比达40.77%,混沌胞全局占比约10.97%,从

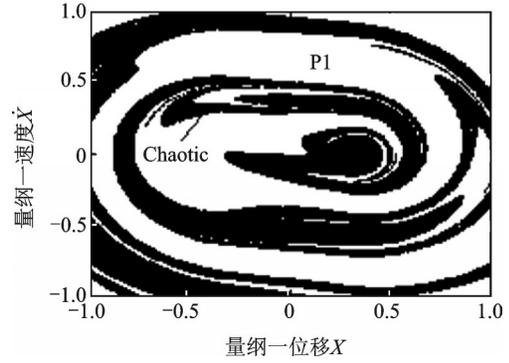


图12 阻尼比为0.03时全局吸引域

Fig. 12 Global basin of attraction when damping ratio is 0.03

动载特性角度知1周期具有更好的稳定性,因为其胞元构成区域相对集中且未出现其他散乱的高周期干扰胞。4周期吸引域范围内还出现了少量不稳定的2周期吸引胞,分布较为散乱,大部分散落在4周期域内部。由于存在4周期、混沌和2周期吸引子共存聚集,此状态域内系统更易出现波动,少量2周期胞在受激时易被吸引到临近的域内,促使原吸引子失稳再迁移。继续计算 ξ 为0.05时,发现阻尼比的增大迫使4周期吸引域加速退化,1周期吸引域和混沌域不同程度地扩张。可见阻尼比越大系统振动越易收敛到稳定的1周期上,即增大阻尼比可在一定程度上抑制齿轮系统发生多周期或混沌振动。

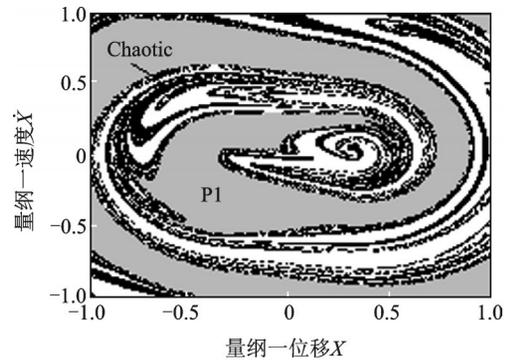


图13 阻尼比为0.04时全局吸引域

Fig. 13 Global basin of attraction when damping ratio is 0.04

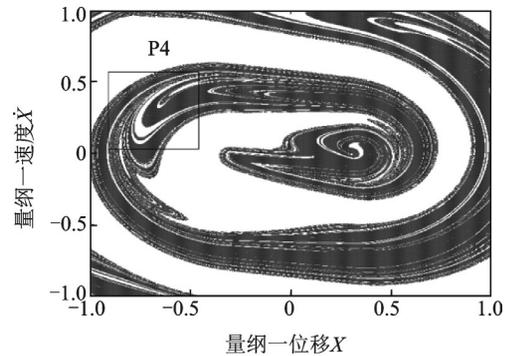


图14 阻尼比为0.04时P4吸引域

Fig. 14 P4 basin of attraction when damping ratio is 0.04

3 结 论

(1)基于区域分解技术与胞映射思想构建了齿轮系统参数空间解域界求解数值算法,并给出了其求解流程。

(2)解域界对混沌窗口带、分岔节点及子域边界等结构信息给出了准确预测,综合传动误差与阻尼比构成的解域界中模拟出了倍周期分岔序列演化发展历程。齿侧间隙与阻尼比构成的解域界中齿侧间隙相较于阻尼比对系统状态改变的驱动性要弱。

(3)解域边界处系统状态局部平衡较为脆弱,阻尼比增大,混沌吸引子吸引域不断退化,1周期吸引子吸引域进而扩张,全局吸引域边界分形特征趋向简单,增大阻尼比可抑制齿轮系统对初值条件的敏感依赖性。

参考文献:

[1] Roozegar M, Angeles J. A two-phase control algorithm for gear-shifting in a novel multi-speed transmission for electric vehicles[J]. *Mechanical Systems & Signal Processing*, 2018, 104:145-154.

[2] 向玲,高楠,唐亮,等. 支承刚度变化下风电齿轮传动系统的非线性动力学特性[J]. *振动与冲击*, 2019, 38(01): 111-117.
Xiang Ling, Gao Nan, Tang Liang, et al. Nonlinear dynamic characteristics of wind turbine gear transmission system with varying support stiffness [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2019, 38(01): 111-117.

[3] 桂永方,朱如鹏,靳广虎,等. 间隙非线性圆柱齿轮分流传动系统动力学与均载特性分析[J]. *振动与冲击*, 2014, 33(18): 177-184.
Gui Yongfang, Zhu Rupeng, Jin Guanghu, et al. Dynamic and load sharing characteristic analysis of a nonlinear cylindrical gear split-torque transmission system with backlash[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2014, 33(18): 177-184.

[4] 刘镇星,刘占生,于香宇,等. 舰船摇摆作用下滑动轴承-齿轮副系统动力学分析[J]. *机械工程学报*, 2018, 54(17): 226-234.
Liu Zhenxing, Liu Zhansheng, Yu Xiangyu, et al. Dynamic analysis of journal bearing-gear system under swing movement of the ship [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2018, 54(17): 226-234.

[5] 魏静,王刚强,秦大同,等. 考虑修形的斜齿轮系统非线性激励与动力学特性研究[J]. *振动工程学报*,

2018, 31(4):561-572.
Wei Jing, Wang Gangqiang, Qin Datong, et al. Nonlinear excitation and dynamic characteristics of helical gear system with considering modification [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2018, 31(4):561-572.

[6] Yang Yi, Xia Wenkai, Han Jianming, et al. Vibration analysis for tooth crack detection in a spur gear system with clearance nonlinearity [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2019, 157: 648-661.

[7] Sun Jianqiao, Xiong Furui. Cell mapping methods beyond global analysis of nonlinear dynamic systems [J]. *Advances in Mechanics*, 2017, 47: 150-177.

[8] Li Zhigang, Jiang Jun, Li Jing, et al. A subdomain synthesis method for global analysis of nonlinear dynamical systems based on cell mapping [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 95(1):715-726.

[9] 徐伟,岳晓乐,韩群. 胞映射方法及其在非线性随机动力学中的应用[J]. *动力学与控制学报*, 2017, 15(3): 12-20.
Xu Wei, Yue Xiaole, Han Qun. Cell mapping method and its applications in nonlinear stochastic dynamical systems [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2017, 15(3):12-20.

[10] Kahraman A, Singh R. Non-linear dynamics of a spur gear pair [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, 142(1): 49-75.

[11] Farshidianfar A, Saghafi A. Global bifurcation and chaos analysis in nonlinear vibration of spur gear systems [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 75(4): 783-806.

[12] Saghafi A, Farshidianfar A. An analytical study of controlling chaotic dynamics in a spur gear system [J]. *Mechanism & Machine Theory*, 2016, 96:179-191.

[13] 林何,王三民,董金城. 并车螺旋锥齿轮传动动力学参数二维域界结构分析[J]. *航空动力学报*, 2017, 32(8): 2017-2024.
Lin He, Wang Sanmin, Dong Jincheng. Two-dimensional domain structure of dynamical parameters of combining spiral gear transmission [J]. *Journal of Aerospace Power*, 2017, 32(8):2017-2024.

[14] 唐进元,熊兴波,陈思雨. 基于图胞映射方法的单自由度非线性齿轮系统全局特性分析[J]. *机械工程学报*, 2011, 47(5): 59-65.
Tang Jinyuan, Xiong Xingbo, Chen Siyu. Analysis of global character of single degree of freedom nonlinear gear system based on digraph cell mapping method [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2011, 47(5): 59-65.

[15] Gou Xiangfeng, Zhu Lingyun, Chen Dalin. Bifurcation and chaos analysis of spur gear pair in two-parameter

plane [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 79 (3) : 2225- 2235.

Global characteristics of basin of attraction and parameterized solution domain of power-split gear transmission

LIN He^{1,2,3}, HONG Ling², LIU Xia^{1,3}, XU Guang-shen^{1,3}

- (1. School of Mechanical and Electrical Engineering, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China;
2. State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structures, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;
3. Xi'an Key Laboratory of Modern Intelligent Textile Equipment, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710600, China)

Abstract: In order to investigate the global characteristics of dynamic solutions of gear systems, a nonlinear dynamical model of the power-split spur gear transmission is established, and the calculation algorithm regarding global solutions under main excitation parameters is deduced based on cell mapping method (CMM) as well as domain decomposition method (DDM). Parametric planar solution domains constructed by damping ratio respectively with synthetically transmission error, mesh frequency and backlash are computed, and the potential global evolution behaviors within solution domains are exhibited, such as period-doubling bifurcation cascades, chaotic window zones. The bifurcation routes inside solution domain with respect to varied error magnitudes are tracked by applying largest Lyapunov exponent, which demonstrate that bifurcation nodes are in consistent with the subdomain boundary points presented in parameterized solution domain. By numerically calculating the global behaviors of the basin of attraction under multiple damping ratios, it is shown that mutual expansion and retrogression between the chaotic basin of attraction and the period 1 basin of attraction are remarkably, and the local equilibrium of the cells nearby the boundary is extremely unstable. The basin of attraction is sensitively while the damping ratio reaches 0.04, and multiple attractors coexisting phenomenon exhibits significantly. The result could provide references for vibration optimization or even global design of dynamic parameters for gear system.

Key words: mechanical vibration; power-split gear transmission; cell mapping method; parameterized solution domain; basin of attraction

作者简介: 林 何(1985-),男,副教授。电话:(029)62779107;E-mail: linhe@xpu.edu.cn

通讯作者: 胥光申(1964-),男,教授。电话:(029)62779109;E-mail: xugs988@126.com