

一类双层高静低动刚度隔振系统动力学特性和应用局限性研究

李云云^{1,2}, 周徐斌^{1,2}, 陈卫东¹, 刘兴天²

(1. 南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室, 江苏 南京 210016;

2. 上海卫星工程研究所空间机热一体化技术实验室, 上海 201109)

摘要: 高静低动刚度隔振系统低频隔振性能优越, 双层隔振系统对高频振动衰减迅速。将二者结合, 提出基于欧拉屈曲梁负刚度调节器的一类双层高静低动刚度隔振系统, 该类双层高静低动刚度隔振系统的特点是上下层的负刚度调节器安装于同一基础。对该系统进行了静力学分析, 给出了此类隔振系统的负刚度适用范围; 采用积极隔振模型, 建立了双层高静低动刚度隔振系统的动力学方程, 并使用谐波平衡法求解了系统动力学响应, 根据上下层刚度之间存在的约束关系, 且上下层刚度不能同时达到准零刚度等限制条件, 给出了上下层线性刚度系数的有效取值范围, 围绕有效取值范围的边界讨论上下层刚度系数对系统隔振性能的影响, 并将其与普通的双层线性隔振系统的隔振性能进行比较。此外, 还定义了双层非线性隔振系统的力传递率, 研究了外激励幅值和阻尼比的大小对动力学响应和隔振性能的影响。结果表明, 上下层分别使用负刚度来获取准零刚度隔振系统带来的性能迥异, 上层刚度完全线性, 下层为准零刚度时系统的隔振性能最好。

关键词: 双层隔振; 动力学; 高静低动刚度; 负刚度; 传递率

中图分类号: O328 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2021)02-0364-08

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2021.02.017

引言

无论是自然科学^[1-2]还是工程应用^[3-4], 都对振动环境提出了越来越高的要求^[5]。近年来, 高静低动刚度隔振系统, 因既能提供较大的静载荷支撑能力, 又具有极低的固有频率, 引起国内外学者的广泛关注。高静低动刚度隔振系统的基本原理是正负刚度机构并联, 当正负刚度恰好互相抵消时系统能够达到准零刚度^[6]。Molyneux^[7]最早提出了三弹簧准零刚度模型, 水平弹簧组成负刚度结构。针对该模型, Carrella 等^[8]用 Duffing 方程描述了系统的动力学模型, 确定了响应的最大振幅和跳变频率的解析表达式; 文献[9-11]采用扩展平均法对模型的频率响应特性进行了优化, 并总结了周期、混沌等复杂的动力学现象。单层准零刚度结构的隔振器构型多样, Wang 等^[12]提出了准零刚度(quasi zero stiffness)座椅悬架来提高车辆的隔振性能; Han 等^[13]通过电磁不对称磁齿结构实现负刚度, 验证了该结构优良的隔振效果; Zheng 等^[14]利用由两个同轴环形磁铁排斥性产生负扭转刚度来抵消橡胶弹簧的正刚度, 揭示了扭转磁簧几何参数对隔振性能

的影响。Zhou 等^[15]采用凸轮-滚子-弹簧机构概念, 研究了外激力和阻尼对力传递率的影响。

因更快的高频衰减速度, 双层高静低动隔振系统也得到了一定关注。Li 等^[16]研究了双层准零刚度结构的隔振浮筏系统, 该系统可以实现更宽的隔振频带; Gattia 等^[17]研究了由一层准零刚度隔振器和一层线性隔振器串联组成的二自由度系统, 讨论了在主共振曲线内建立独立共振曲线的两种典型情况; Zhou 等^[18]也对类似结构开展了研究, 负刚度调节器采用一对相互排斥的永磁体与线圈弹簧并联, 讨论了使刚度在小于线圈弹簧的位移范围内最大化的条件。Lu 等^[19]在双层线性隔振系统中引入非线性刚度来提高其隔振性能, 推导了系统的力传递率表达式, 并分析了不同层引入非线性刚度对力传递率的影响。理论研究表明只有在下层中引入非线性刚度能够提升系统的隔振效率。Lu 等^[20]还提出了改进的双层非线性系统隔振模型, 模型中将上层的非线性刚度连接到了中间质量而非基础上, 力传递率和位移传递率的分析结果表明, 在上、下两层引入合适的非线性刚度能够使该隔振系统兼具较低的起始隔振频率和较高的高频衰减速率。系统引入非线性

性除了刘兴天等^[21]所提的增加横向弹簧外还可以采用非线性库伦摩擦阻尼器。Wang 等^[22]将具有负刚度的凸轮滚子弹簧机构引入到双层线性隔振系统中,增加质量比或降低垂向弹簧的刚度比都能够减小力传递率,增加上、下两层的阻尼会缩短直至消除谐振分支,但是会降低高频的隔振性能。在研究类似双层隔振结构时,大多数学者都默认上下层弹簧之间是相互独立的,这样的假设具有一定局限性。

本文主要对一类负刚度调节结构共用一个基础的双层高静低动刚度隔振系统进行分析,由于这类系统的总刚度可以看作是下层系统总刚度(下层系统线性刚度与非线性刚度并联)与线性刚度串联,再与非线性刚度并联组成。采用这样组合方式的系统上下层刚度不独立,它会使上下两层刚度之间存在一定的约束关系,需要满足整体刚度不能小于 0 的条件。就该约束条件得出刚度有效取值范围,针对其边界及内部区域,研究了线性刚度和非线性刚度对系统隔振性能的影响,最后讨论了外激励幅值和阻尼比大小对系统隔振性能的影响。

1 双层高静低动刚度隔振系统静力学分析

1.1 双层高静低动刚度隔振系统模型

本文提出的双层高静低动刚度隔振模型如图 1 所示。在双层线性隔振系统的上下层分别并联一对欧拉屈曲梁负刚度调节器, m , k 和 c 分别表示被隔振质量、线性弹簧刚度与黏性阻尼系数;下角标 1, 2 代表结构上层和下层。

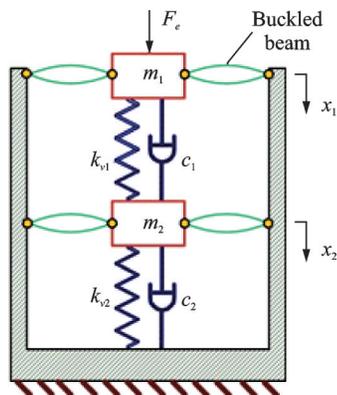


图 1 双层高静低动刚度隔振系统结构示意图

Fig. 1 Structural schematic diagram of two-stage high-static-low-dynamic stiffness vibration isolation system

假设受压的欧拉梁仅在水平方向上产生变形,当被隔振质量沿垂向(x 方向)运动时,变形后的欧拉梁所提供的垂向回复力可以近似为

$$F_n = -\frac{P_e k_1}{L} x + P_e k_3 \left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (1)$$

式中 L 为欧拉梁未变形时的长度, P_e 为两端铰支中间初始挠度为零的欧拉梁临界失稳载荷, k_1 和 k_3 是与系统参数相关的常数项。具体表达式见参考文献[23]。

1.2 静力学分析

为便于分析隔振系统的静力学特性,给出的系统结构简图如图 2 所示,可以看出,下层隔振系统通过线性弹簧串联上层质量,上下层负刚度调节机构和下层隔振系统共用一个基础。设作用在 m_1 上的激励力为 F_{m1} , 分别对 m_1, m_2 进行受力分析,并进行无量纲化处理,得到以下方程:

$$\tilde{F}_{m1} + \lambda_1 k_{11} \tilde{x}_1 - \tilde{x}_1 - \lambda_1 k_{31} (\tilde{x}_1)^3 + \tilde{x}_2 = 0 \quad (2a)$$

$$\tilde{x}_1 + \lambda_2 k_{12} \tilde{x}_2 - \lambda_2 k_{32} (\tilde{x}_2)^3 - (1 + \epsilon) \tilde{x}_2 = 0 \quad (2b)$$

引入以下参数:

$$\tilde{F}_{m1} = \frac{F_{m1}}{k_{v1} L}, \epsilon = \frac{k_{v2}}{k_{v1}}, \tilde{x}_1 = \frac{x_1}{L}, \tilde{x}_2 = \frac{x_2}{L},$$

$$\lambda_1 = \frac{P_{e1}}{k_{v1} L}, \lambda_2 = \frac{P_{e2}}{k_{v2} L}$$

其中, \tilde{F}_{m1} 表示无量纲力, ϵ 表示结构下层和结构上层线性弹簧的刚度比, \tilde{x} 表示无量纲位移, λ 表示欧拉梁与弹簧的刚度比。

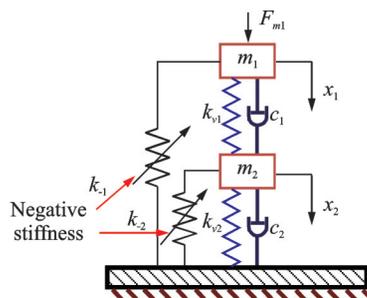


图 2 双层高静低动刚度隔振系统结构简图

Fig. 2 Structural simplified diagram of two-stage high-static-low-dynamic stiffness vibration isolation system

分别对上下层回复力求一阶导数,可得无量纲刚度表达式

$$\begin{cases} K_{total1} = \kappa_{11} + 3\kappa_{31} \tilde{x}_1^2 \\ K_{total2} = \kappa_{12} + 3\kappa_{32} \tilde{x}_2^2 \end{cases} \quad (3)$$

式中 $\kappa_{11} = (1 - \lambda_1 k_{11})$ 和 $\kappa_{12} = (\epsilon - \lambda_2 k_{12})$ 分别代表结构上下层总刚度的线性项; $\kappa_{31} = \lambda_1 k_{31}$ 和 $\kappa_{32} = \lambda_2 k_{32}$ 分别代表结构上下层总刚度的非线性项。

对于双层高静低动刚度隔振系统,系统在平衡位置的总刚度 $K_{total,n}$ 需要满足非负的要求。据此可以得到 κ_{11} 和 κ_{12} 的约束关系式(假定 $\epsilon=1$)

$$K_{total,n} = \frac{1}{1/\kappa_{12} + 1} + \kappa_{11} - 1 \geq 0 \quad (4)$$

根据式(4),结合 $\kappa_{11}, \kappa_{12} \in [0, 1]$ 的取值范围,可以得到图 3 所示的 κ_{11}, κ_{12} 有效取值区域图。

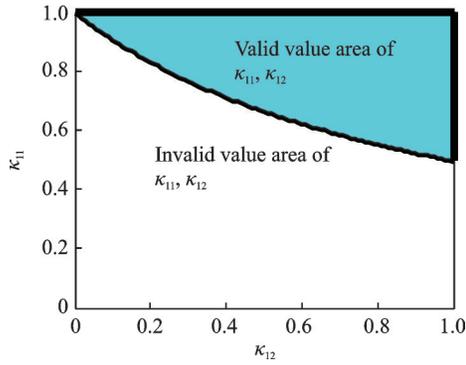


图3 κ_{11}, κ_{12} 取值区域图

Fig. 3 Value area diagram of κ_{11}, κ_{12}

图3中的深色区域为 κ_{11} 和 κ_{12} 的有效取值区域,它的上边界和右边界分别对应结构上层刚度线性($\kappa_{11}=1, \kappa_{31}=0$)和下层刚度线性($\kappa_{12}=1, \kappa_{32}=0$)的情况。值得注意的是,在有效取值区域内,当 $\kappa_{12}=0$ 时,结构下层实现准零刚度,但此时结构上层刚度只能为线性($\kappa_{11}=1$),无法同时实现准零刚度。

2 双层高静低动刚度隔振系统动力学分析

引入以下参数:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{v1}}{m_1}}, \tau = \omega_n t, \tilde{x} = \frac{d\tilde{x}}{d\tau}, \ddot{\tilde{x}} = \frac{d^2\tilde{x}}{d\tau^2}, \mu = \frac{m_2}{m_1},$$

$$\zeta_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_n}, \zeta_2 = \frac{c_2}{2m_2\omega_n}, \Omega = \frac{\omega}{\omega_n}, \tilde{F}_e = \frac{F_e}{k_{v1}L}$$

其中, τ 表示无量纲时间, μ 为质量比, \tilde{F}_e 表示无量纲激励力幅值, Ω 表示激励频率和上层线性系统(去除负刚度调节机构后的系统)的无阻尼固有频率之比, ζ_1 和 ζ_2 表示上下层线性系统的阻尼比。

双层高静低动刚度隔振系统的动力学方程组可写为

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_{v1}x_2 + P_e k_{31}\left(\frac{x_1}{L}\right)^3 + (k_{v1} - k_{11})x_1 = F_e \cos\omega t \\ m_2\ddot{x}_2 - c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + c_2\dot{x}_2 + k_{v1}(x_2 - x_1) + P_e k_{32}\left(\frac{x_2}{L}\right)^3 + (k_{v2} - k_{12})x_2 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

对方程组(5)无量纲化处理后可得

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{x}}_1 + 2\zeta_1\dot{\tilde{x}}_1 - 2\zeta_1\dot{\tilde{x}}_2 + \kappa_{11}\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 + \kappa_{31}\tilde{x}_1^3 = \tilde{F}_e \cos\Omega\tau \\ \mu\ddot{\tilde{x}}_2 + 2\zeta_1\dot{\tilde{x}}_2 - 2\zeta_1\dot{\tilde{x}}_1 + 2\mu\zeta_2\dot{\tilde{x}}_2 - \tilde{x}_1 + \kappa_{12}\tilde{x}_2 + \tilde{x}_2 + \kappa_{32}\tilde{x}_2^3 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

使用谐波平衡法求解方程组(6),设解为:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = X_1 \cos(\Omega\tau + \theta_1) \\ \tilde{x}_2 = X_2 \cos(\Omega\tau + \theta_2) \end{cases} \quad (7)$$

将式(7)代入到方程组(6)中,由对应的正、余弦项系数相等可得下方程

$$\begin{cases} -\Omega^2 X_1 \cos\theta_1 - 2\zeta_1\Omega X_1 \sin\theta_1 + \kappa_{11}X_1 \cos\theta_1 + \frac{3}{4}\kappa_{31}X_1^3 \cos\theta_1 - \tilde{F}_e + 2\zeta_1\Omega X_2 \sin\theta_2 - X_2 \cos\theta_2 = 0 \\ X_2 \sin\theta_2 + 2\zeta_1\Omega X_2 \cos\theta_2 + \kappa_{11}X_1 \sin\theta_1 - \frac{3}{4}\kappa_{31}X_1^3 \sin\theta_1 + \Omega^2 X_1 \sin\theta_1 - 2\zeta_1\Omega X_1 \cos\theta_1 = 0 \\ -\Omega^2 \mu X_2 \cos\theta_2 - 2\zeta_1\Omega X_2 \sin\theta_2 + 2\zeta_1\Omega X_1 \sin\theta_1 - 2\mu\zeta_2\Omega X_2 \sin\theta_2 - X_1 \cos\theta_1 + X_2 \cos\theta_2 + \kappa_{12}X_2 \cos\theta_2 + \frac{3}{4}\kappa_{32}X_2^3 \cos\theta_2 = 0 \\ -2\mu\zeta_2\Omega X_2 \cos\theta_2 + X_1 \sin\theta_1 - X_2 \sin\theta_2 - \frac{3}{4}\kappa_{32}X_2^3 \sin\theta_2 + \Omega^2 \mu X_2 \sin\theta_2 - 2\zeta_1\Omega X_2 \cos\theta_2 + 2\zeta_1\Omega X_1 \cos\theta_1 - \kappa_{12}X_2 \sin\theta_2 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

求解式(8)可以得到双层高静低动刚度隔振系统的响应。取 $\kappa_{12}=0, \zeta_1=\zeta_2=0.015, \mu=0.2, \tilde{F}_e=0.01$,求解得到系统响应幅频关系曲线如图4所示。可以看出,解析解与采用龙格库塔法直接积分得到的数值解具有极高的吻合程度,可以认为谐波平衡法具有较高的准确性。

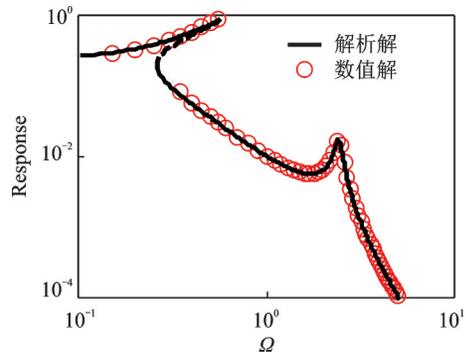


图4 双层隔振系统解析解和数值解对比图

Fig. 4 Analytical solution and numerical solution comparison diagram of two-stage vibration isolation system

2.1 力传递率定义和表达式

将系统的力传递率定义为: $T_f = f_r/\tilde{F}_e$,其中 f_r 表示隔振系统传递到基础上的力幅值。传递力可以写为

$$f = -\lambda_1 k_{11}\tilde{x}_1 + \lambda_1 k_{31}\tilde{x}_1^3 + 2\mu\zeta_2\dot{\tilde{x}}_2 + (\epsilon - \lambda_2 k_{12})\tilde{x}_2 + \lambda_2 k_{32}\tilde{x}_2^3 \quad (9)$$

将式(7)代入式(9),化简处理得到传递力幅值为

$$f_{ir} = \left\{ \left[(\kappa_{11} - 1)X_1 + \frac{3}{4}\kappa_{31}X_1^3 \right] \cos\theta_1 - 2\Omega\mu\zeta_2 X_2 \sin\theta_2 + \left(\kappa_{12}X_2 + \frac{3}{4}\kappa_{32}X_2^3 \right) \cos\theta_2 \right\}^2 + \left\{ - \left[(\kappa_{11} - 1)X_1 + \frac{3}{4}\kappa_{31}X_1^3 \right] \sin\theta_1 - 2\Omega\mu\zeta_2 \cdot X_2 \cos\theta_2 - \left(\kappa_{12}X_2 + \frac{3}{4}\kappa_{32}X_2^3 \right) \sin\theta_2 \right\}^2 \frac{1}{2} \quad (10)$$

根据式(10),可得力传递率表达式

$$T_f = \frac{f_{ir}}{\tilde{F}_e} = \left\{ \left[(\kappa_{11} - 1)X_1 + \frac{3}{4}\kappa_{31}X_1^3 \right] \cos\theta_1 - 2\Omega\mu\zeta_2 X_2 \sin\theta_2 + \left(\kappa_{12}X_2 + \frac{3}{4}\kappa_{32}X_2^3 \right) \cos\theta_2 \right\}^2 + \left\{ - \left[(\kappa_{11} - 1) + \frac{3}{4}\kappa_{31}X_1^3 \right] \sin\theta_1 - 2\Omega\mu\zeta_2 X_2 \cdot \cos\theta_2 - \left(\kappa_{12}X_2 + \frac{3}{4}\kappa_{32}X_2^3 \right) \sin\theta_2 \right\}^2 \frac{1}{2} / \tilde{F}_e \quad (11)$$

2.2 κ_{11}, κ_{12} 的取值对隔振性能的影响

为研究 κ_{11}, κ_{12} 对力传递率的影响,取图 3 中 κ_{11}, κ_{12} 有效取值区域的上边界、下边界和右边界上的点进行研究。系统参数设为: $\tilde{F}_e=0.01, \zeta_1=\zeta_2=0.015, \mu=0.2$ 。

2.2.1 上下层刚度沿上边界变化

如图 5 所示,在 κ_{11}, κ_{12} 有效取值区域上边界选取 $(\kappa_{12}=0, 0.1, 0.4, 1; \kappa_{11}=1)$ 4 个点,分析当上层刚度线性时,改变下层刚度对系统力传递率的影响。

从图 6 所示的传递率曲线可以看出,随着 κ_{12} 减

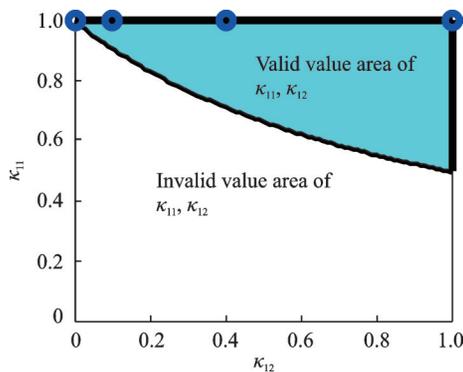


图 5 κ_{11}, κ_{12} 有效取值区域上边界选取点图

Fig. 5 Diagram of selected points on upper boundary in valid value area of κ_{11}, κ_{12}

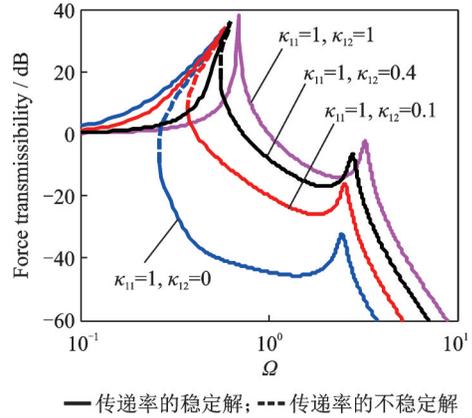


图 6 上边界上 κ_{11}, κ_{12} 不同组合下的力传递率图

Fig. 6 The force transmissibility curves under different combinations of κ_{11}, κ_{12} on upper boundary

小,即结构下层由线性过渡到准零刚度的过程中,力传递率曲线的第一个峰逐渐右弯,不稳定解区间变大,第二个峰向低频偏移,并且峰值显著降低;相比于双层线性隔振系统,下层达到准零刚度时系统的起始隔振频率大幅降低,并且在高频处隔振效率大幅改善,在下层引入负刚度会提升系统的隔振性能。

从传递力幅值的角度对力传递率的变化情况进行说明。当结构上层刚度为线性时,系统传递力幅值的表

达式变为: $f_{ir} = \sqrt{(2\Omega\mu\zeta_2 X_2)^2 + \left(\kappa_{12}X_2 + \frac{3}{4}\kappa_{32}X_2^3 \right)^2}$,

不难看出,随着结构下层响应幅值 X_2 的三次项系数逐渐变大,一次项系数逐渐减小为零,从而对系统的传递率造成影响。

2.2.2 上下层刚度沿右边界变化

在 κ_{11}, κ_{12} 有效取值区域右边界选取 $(\kappa_{12}=1; \kappa_{11}=0.5, 0.6, 0.8, 1)$ 4 个点(如图 7 所示),分析当下层刚度线性时,上层刚度对系统力传递率的影响。从图 8 所示的传递率曲线中可以看出,随着 κ_{11} 减小,即结构上层刚度非线性逐渐增强的过程中,传递率曲线的第一个峰向低频移动,幅值先减小后增大,并出现了不稳定解,而第二个峰几乎没有变化;从隔振的角度来看,在结构上层刚度引入非线性后,除了会使低频隔振性能降低外,还会造成第二个共振峰之后的隔振效率大幅减缓,削弱系统高频隔振性能。

类似地,对传递力幅值进行分析,结构上层非线性的增强实质上是关于响应幅值 X_1 的三次项系数增大,使传递力的非线性增强。由于在高频区 X_1, X_2 都是随 κ_{11} 减小而增大的,因此在三项次项系数的影响下,总力传递率反而增大。

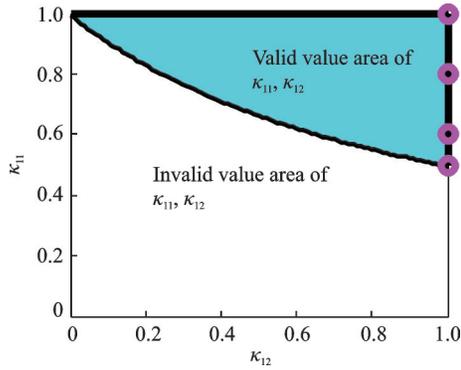


图7 κ_{11}, κ_{12} 有效取值区域右边界选取点图

Fig. 7 Diagram of selected points on right boundary in valid value area of κ_{11}, κ_{12}

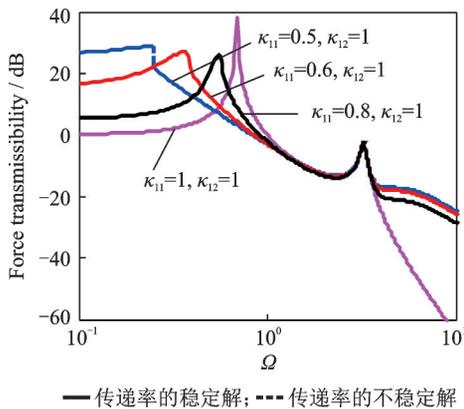


图8 右边界上 κ_{11}, κ_{12} 不同组合下的力传递率图

Fig. 8 The force transmissibility curves under different combinations of κ_{11}, κ_{12} on right boundary

2.2.3 上下层刚度沿下边界变化

在 κ_{11}, κ_{12} 有效取值区域下边界分别取 $(\kappa_{12}, \kappa_{11}) = (0, 1), (0.1, 0.9091), (0.3, 0.7692), (1, 0.5)$ 4 个点(如图9所示)。此时对应的是上下层刚度同为非线性的情况,系统的力传递率曲线如图10所示。随着 κ_{11} 减小, κ_{12} 增大, 结构上层刚度由线性逐渐过渡至准零刚度, 下层刚度则逐渐线性化。从图10中可以看出, 系统的第一个共振峰先向低频移动后向高频移动, 峰值也是先减小后增大, 第二个共振峰向高

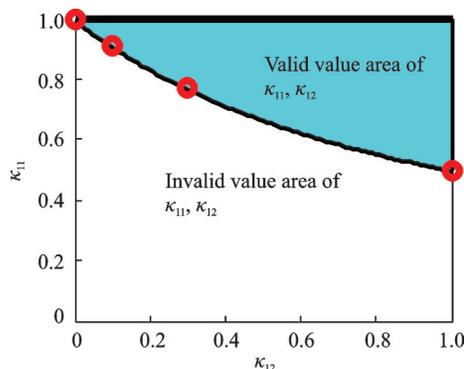


图9 κ_{11}, κ_{12} 有效取值区域下边界选取点图

Fig. 9 Diagram of selected points on lower boundary in valid value area of κ_{11}, κ_{12}

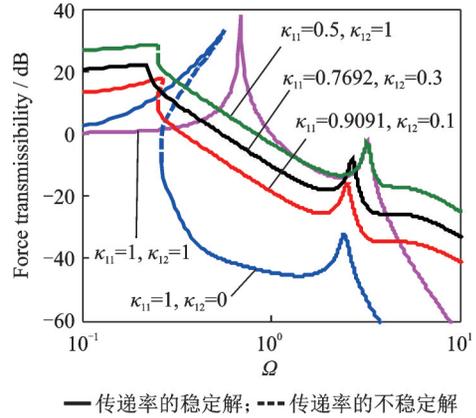


图10 下边界上 κ_{11}, κ_{12} 不同组合下的力传递率图

Fig. 10 The force transmissibility curves under different combinations of κ_{11}, κ_{12} on lower boundary

频移动, 峰值逐渐变大; 从隔振性能的角度来看, κ_{12}, κ_{11} 取 $(0, 1)$ 时对应的结构(上层线性, 下层准零刚度)在高频衰减速率方面表现最好, 但是由于具有强非线性, 跳跃区间过大会不利于低频隔振。

2.3 激励幅值和阻尼比对隔振性能的影响

在考察外激励幅值 \tilde{F}_e 和阻尼比 ζ 对隔振性能的影响时, 将研究对象选为结构某一层刚度为线性的特殊情况: 上层线性刚度下层准零刚度 ($\kappa_{11}=1, \kappa_{12}=0$); 上层刚度非线性下层刚度线性 ($\kappa_{11}=0.5, \kappa_{12}=1$)。

2.3.1 激励幅值对力传递率的影响

首先研究结构上层刚度线性下层准零刚度的情况, 取 $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.015$, 所得不同激励幅值 \tilde{F}_e 下的力传递率曲线如图11所示。图11中, 减小激励幅值会使第一个共振峰向低频移动, 且峰值明显减小; 对第二个共振峰没有影响, 高频段的传递率曲线能够弯曲重合。系统的起始隔振频率随着激励幅值的减小而逐渐降低, 并且不稳定解频率区间也在逐渐缩短, 可见系统的非线性程度是在减弱的。可以预见的是,

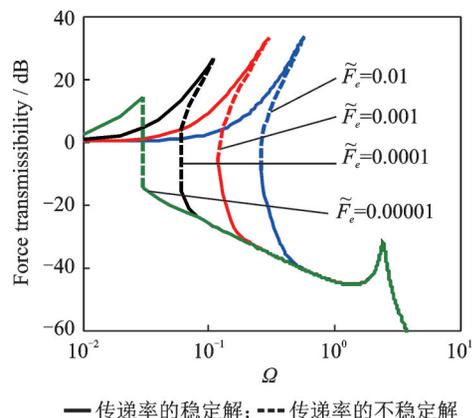


图11 $\kappa_{11}=1, \kappa_{12}=0$ 时, 不同激励幅值下的力传递率图

Fig. 11 The force transmissibility curves under different excitation amplitudes when $\kappa_{11} = 1$ and $\kappa_{12} = 0$

当激励幅值小到一定程度时,传递率曲线的共振峰将会消失,由此说明上层刚度线性下层准零刚度的结构在隔离微幅力激励方面具有很强的优势。

另一方面,上层刚度非线性下层刚度线性时的传递率曲线如图 12 所示,可以发现减小激励幅值会使第一个共振峰向低频移动,曲线的右弯程度减弱,但是峰值会增大;面对不同幅值的力激励,系统的起始隔振频率并未发生改变,隔振频段的传递率曲线互相重合,说明此种结构适用于隔离幅值较大的激励。

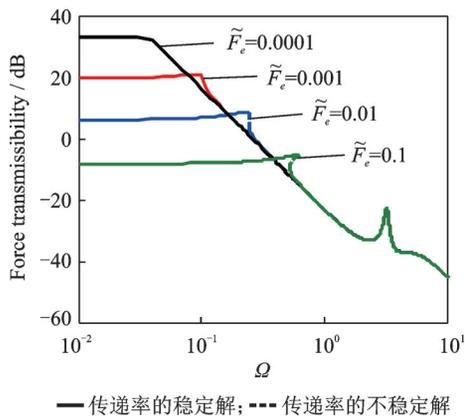


图 12 $\kappa_{11}=0.5, \kappa_{12}=1$ 时,不同激励幅值下的力传递率图
Fig. 12 The force transmissibility curves under different excitation amplitudes when $\kappa_{11}=0.5$ and $\kappa_{12}=1$

2.3.2 阻尼比大小对力传递率的影响

激励幅值取 $\tilde{F}_e = 0.01$, 针对上述两种不同的结构, 阻尼比对系统力传递率的影响如图 13 和 14 所示。这里本文只考虑了上下层阻尼比相同的情况, 可以看出增大阻尼比能够抑制两类隔振系统的第一个力传递率共振峰, 改善低频隔振性能, 但是高频处的传递率衰减速率都会降低。对于上层刚度线性, 下层准零刚度的结构, 其力传递率的第二个峰不会得到抑制, 并且两个峰之间的传递率会增大。而对于上层刚度非线性, 下层刚度线性的结构, 其第二个

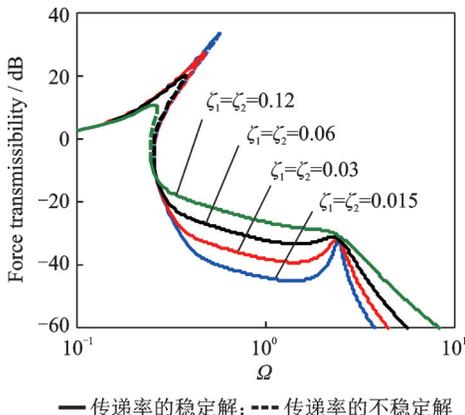


图 13 $\kappa_{11}=1, \kappa_{12}=0$ 时,不同阻尼比下的力传递率图
Fig. 13 The force transmissibility curves under different damping ratio when $\kappa_{11}=1$ and $\kappa_{12}=0$

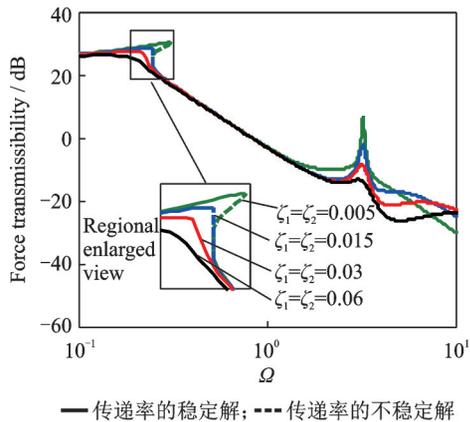


图 14 $\kappa_{11}=0.5, \kappa_{12}=1$ 时,不同阻尼比下的力传递率图
Fig. 14 The force transmissibility curves under different damping ratio when $\kappa_{11}=0.5$ and $\kappa_{12}=1$

峰能够得到有效的抑制。

综上所述,无论对哪一种结构,系统的阻尼比都不应取得太小或太大,需要平衡低频和低频处的隔振需求来选取合适的阻尼比。

3 单双层高静低动刚度隔振系统隔振性能对比

为进一步说明双层高静低动刚度隔振系统设计的必要性和其隔振性能的优越性,现以前文分析所得到的最优双层高静低动刚度隔振系统(上层刚度线性,下层准零刚度)与双层线性隔振系统以及单层准零刚度隔振系统进行对比。双层隔振系统参数仍取: $\tilde{F}_e = 0.01, \zeta_1 = \zeta_2 = 0.015, \mu = 0.2$ 。保持单层隔振系统具有相同的参数,求解三类隔振系统的力传递率,结果如图 15 所示。可以看出双层高静低动刚度隔振系统兼顾了单层准零刚度隔振系统和双层线性隔振系统的优势,具有更宽的隔振频带以及更快的高频衰减速率。与单层准零刚度隔振系统相比,本

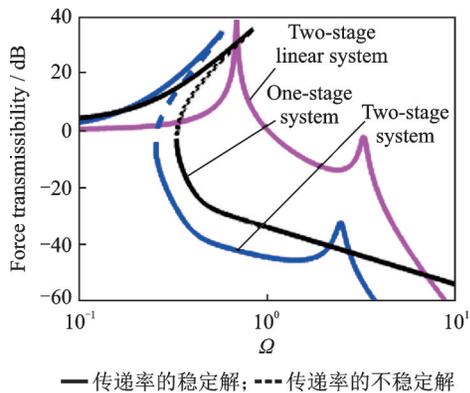


图 15 单双层高静低动刚度系统的力传递率图
Fig. 15 The force transmissibility curves of one-stage and two-stage high-static-low-dynamic stiffness vibration isolation system

文提出的双层高静低动刚度隔振系统的起始隔振频率进一步降低,并且高频衰减速率从 -40 dB/dec 提升到了 -60 dB/dec 。

4 结 论

本文提出了一种由欧拉屈曲梁负刚度调节器与双层线性隔振系统并联构成的双层高静低动刚度隔振系统。对隔振系统进行了静力学分析,采用谐波平衡法求解了系统在简谐力激励下的幅频曲线,并针对不同层的刚度非线性组合进行了力传递率的比较分析。总结全文可以得到以下结论:

(1)当上下层线性弹簧刚度大小相等且上下层负刚度调节器共用一个基础时,结构上下层刚度存在约束关系,不能同时达到准零刚度;

(2)双层高静低动刚度隔振系统的隔振性能要优于单层高静低动刚度隔振系统以及等价双层线性隔振系统。并且当结构上层刚度线性,下层准零刚度时系统的隔振性能最好;

(3)激励幅值对高频段的力传递率没有影响,只会改变低频段的力传递率;阻尼比则主要对第一个共振峰产生影响,基本不影响第二个共振峰值。通过选取合适的阻尼比,采用上层刚度线性,下层准零刚度的结构能够获得极宽的隔振频带和可观的高频衰减速率。

本文提出的一类双层高静低动刚度模型受限于上下层刚度的约束关系,不能同时达到准零刚度。通过将上层负刚度调节器改为安装在下层质量上,可以消除这种约束,在后续的研究中可针对该结构的隔振系统进行对比。

此外,本文讨论集中在理论分析,后续可进行隔振试验,对理论的准确性和全面性进行完善。

参考文献:

- [1] Shapiro B, Adhikari R X, Aguiar O, et al. Cryogenically cooled ultra low vibration silicon mirrors for gravitational wave observatories [J]. *Cryogenics*, 2017, 81: 83-92.
- [2] Matchard F, Lantz B, Mason K, et al. Advanced LIGO two-stage twelve-axis vibration isolation and positioning platform. Part 2: Experimental investigation and tests results [J]. *Precision Engineering*, 2015, 40(3): 287-297.
- [3] 郑洪波,覃会,胡芳,等.基于动态插值自适应方法的时变轴系纵向振动主动控制[J]. *振动与冲击*, 2018, 37(21): 171-176.
Zheng Hongbo, Qin Hui, Hu Fang, et al. Longitudinal vibration active control for a time-varying shafting system based on a dynamic interpolation adaptive algorithm [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2018, 37(21): 171-176.
- [4] 王博,张振东,于海生,等.发动机起动引起的混合动力汽车振动分析与控制[J]. *汽车工程*, 2019, 41(2): 184-190.
Wang Bo, Zhang Zhendong, Yu Haisheng, et al. Analysis and control on vibration resulted from engine start of hybrid electric vehicle [J]. *Automotive Engineering*, 2019, 41(2): 184-190.
- [5] 孟光,周徐斌.卫星微振动及控制技术进展[J]. *航空学报*, 2015, 36(8): 2609-2619.
Meng Guang, Zhou Xubin. Progress review of satellite micro-vibration and control [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2015, 36(8): 2609-2619.
- [6] Aabuzhev P, Gritchin A. *Vibration Protection and Measuring Systems with Quasi-zero Stiffness* [M]. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1989.
- [7] Molyneux W. *Supports for vibration isolation* [R]. Great Britain: Aeronautical Research Council, 1957.
- [8] Carrella A, Michael J Brennan, Tim P Waters. Force transmissibility of a nonlinear vibration isolator with high-static-low-dynamic-stiffness[C]. ENOC-2008, Saint Petersburg, Russia, 2008.
- [9] Cao Qingjie, Wiercigroch Marian, Ekaterina E Pavlovskaja, et al. Archetypal oscillator for smooth and discontinuous dynamics [J]. *Physical Review. E. Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 2006, 74(2): 046218.
- [10] Cao Qingjie, Wiercigroch Marian, Ekaterina E Pavlovskaja, et al. The limit case response of the archetypal oscillator for smooth and discontinuous dynamics [J]. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 2008, 43: 462-473.
- [11] Hao Zhifeng, Cao Qingjie. The isolation characteristics of an archetypal dynamical model with stable-quasi-zero-stiffness [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, 340: 61-79.
- [12] Wang Yong, Li Shunming, Cheng Chun, et al. Adaptive control of a vehicle-seat-human coupled model using quasi-zero-stiffness vibration isolator as seat suspension [J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2018, 32(7): 2973-2985.
- [13] Han Chao, Liu Xueguang, Wu Muyun, et al. A new approach to achieve variable negative stiffness by using an electromagnetic asymmetric tooth structure [J]. *Shock and Vibration*, 2018, (11): 11.
- [14] Zheng Yisheng, Zhang Xinong, Luo Yajun, et al. Analytical study of a quasi-zero stiffness coupling using a torsion magnetic spring with negative stiffness [J]. *Mechan-*

- ical Systems and Signal Processing, 2018, 100:135-151.
- [15] Zhou Jiayi, Wang Xinlong, Xu Daolin, et al. Nonlinear dynamic characteristics of a quasi-zero stiffness vibration isolator with cam-roller-spring mechanisms [J]. Journal of Sound and Vibration, 2015, 346 : 53-69.
- [16] Li Yingli, Xu Daolin. Force transmissibility of floating raft systems with quasi-zero-stiffness isolators [J]. Journal of Vibration and Control, 2018, 24(16): 3608-3616.
- [17] Gattia Gianluca, Kovacic Ivana, Brennan Michael J. On the response of a harmonically excited two degree-of-freedom system consisting of a linear and a nonlinear quasi-zero stiffness oscillator [J]. Journal of Sound and Vibration, 2010, 329:1823-1835.
- [18] Zhou Jiayi, Wang Kai, Xu Daolin, et al. Vibration isolation in neonatal transport by using a quasi-zero-stiffness isolator [J]. Journal of Vibration and Control, 2018, 24 (15): 3278-3291.
- [19] Lu Z, Brennan M J, Yang T, et al. An investigation of a two-stage nonlinear vibration isolation system [J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332(6): 1456-1464.
- [20] Lu Z, Yang T, Brennan M J, et al. On the performance of a two-stage vibration isolation system which has geometrically nonlinear stiffness [J]. ASME Journal of Vibration and Acoustics, 2014, 136(6): 064501.
- [21] 刘兴天, 陈树海, 王嘉登, 等. 几何非线性摩擦阻尼隔振系统动力学行为研究 [J]. 力学学报, 2019, 51(2): 371-379.
- Liu Xingtian, Chen Shuhai, Wang Jiadeng, et al. Analysis of the dynamic behavior and performance of a vibration isolation system with geometric nonlinear friction damping [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2019, 51(2): 371-379.
- [22] Wang X, Zhou J, Xu D, et al. Force transmissibility of a two-stage vibration isolation system with quasi-zero stiffness [J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 87: 633-646.
- [23] 刘兴天. 基于欧拉屈曲梁负刚度调节器的高静低动刚度隔振器研究 [D]. 上海: 上海交通大学, 2013.
- Liu Xingtian. Research on high-static-low-dynamic stiffness isolator with Euler buckled beam negative stiffness corrector [D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2013.

Dynamic characteristics and application restrictions of a two-stage vibration isolation system with high-static-low-dynamic stiffness

LI Yun-yun^{1,2}, ZHOU Xu-bin^{1,2}, CHEN Wei-dong¹, LIU Xing-tian²

(1. State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structure, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China; 2. Laboratory of Space Mechanical and Thermal Integrative Technology, Shanghai Institute of Satellite Engineering, Shanghai 201109, China)

Abstract: The low-frequency vibration isolation performance of the vibration isolation system with high-static-low-dynamic stiffness is superior to linear system, and the two-stage vibration isolation system attenuates high-frequency vibration rapidly. Combining the two advantages, a two-stage vibration isolation system with high-static-low-dynamic stiffness based on Euler buckled beam negative stiffness corrector is proposed. The static analysis of the system is carried out. The dynamic equations of the two-stage isolation system with high-static-low-dynamic stiffness is established by using the active vibration isolation model, and the dynamic response of system is solved by using the Harmonic Balance Method. There is a restriction when using the two-stage vibration isolation system. The restriction is that there is a constraint relationship between the upper and lower stiffness, and the upper and lower stiffness cannot achieve quasi-zero stiffness at the same time when using the system. Moreover, the effective range of the linear stiffness coefficient of the upper and lower stiffness is given. The influence of the upper and lower stiffness coefficients on the vibration isolation performance of the system is discussed in detail in terms of the boundary of the effective range, and its vibration performance is compared with that of the ordinary two-stage linear vibration isolation system. The results show that the vibration isolation performance of the system is the best when the upper stiffness is completely linear and the lower stiffness is quasi-zero stiffness. Furthermore, the force transmissibility of the two-stage nonlinear vibration isolation system is defined and the influence of system parameters on dynamic response and vibration isolation performance is studied.

Key words: two-stage vibration isolation; dynamics; high-static-low-dynamic stiffness; negative stiffness; force transmissibility

作者简介: 利云云(1993-),女,硕士研究生。电话:13341725778; E-mail:1461832786@qq.com

通讯作者: 陈卫东(1962-),男,研究员。电话:13705174335; E-mail:chenwd@nuaa.edu.cn