

基于多谐波平衡法的滞回分数阶系统稳态动力响应

孔凡¹, 侯召旭¹, 徐军², 李书进¹

(1. 武汉理工大学土木工程与建筑学院, 湖北 武汉 430070; 2. 湖南大学土木工程学院, 湖南 长沙 410082)

摘要: 结构隔震和耗能减振装置有时会同时体现出动力特性的频率依赖和滞回关系, 分数阶导数模型能以较少的参数模拟力-位移关系的频率依赖性。采用谐波平衡法研究简谐激励下同时具有滞回特性和分数阶阻尼单元的系统稳态响应。利用激励和响应过程的 Fourier 级数展开并取谐波平衡后, 求得滞回响应和位移响应 Fourier 级数之间的关系; 将滞回微分方程写成余量的形式并结合 Galerkin 方法和 Levenberg-Marquardt 算法求得响应的 Fourier 级数; 分别对硬化和软化 Bouc-Wen 滞回系统的数值模拟显示所建议方法的精度。研究结果表明, 分数阶数和稳态位移幅值之间的关系依赖于系统和滞回参数以及激励频率。

关键词: 多谐波平衡; Bouc-Wen 滞回; Levenberg-Marquardt 算法; 分数阶导数

中图分类号: TU311.3; O322 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2021)03-0552-07

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2021.03.012

引言

极端灾害性荷载作用下的工程结构构件和节点常表现出明显的力-位移滞回关系, 该关系表明恢复力不仅依赖于运动当前状态, 而且依赖于其复杂的历史状态^[1]。实际上, 人们通常利用合理的结构设计, 期望在大震作用下结构的特殊部位(如框架结构的梁端)首先出现塑性铰从而耗散地震输入能量, 从而达到结构大震不倒的目的^[1]。此外, 一些用于结构隔震和耗能减振的控制装置, 也通常表现出明显滞回特性, 如约束屈曲支撑、铅芯橡胶隔震垫和黏滞阻尼器等装置^[2]。为了准确合理描述结构构件和控制装置中出现的滞回特性, 人们发展了多种滞回模型, 包括 Ramberg-Osgood 模型、多线性模型以及 Bouc-Wen 模型等^[3]。Bouc-Wen 模型具有接近实际情况的光滑曲线、仅用一个微分方程就可表现刚度退化和卸载拐点等复杂滞回特性, 以及与运动微分方程联合后形成易于求解的扩阶运动方程等优点。

另外, 许多应用于工程结构或控制装置中的材料都存在本构关系的频率相关效应, 即本构关系依赖于加载频率^[4]。传统上, 人们使用简单的 Kelvin 或 Maxwell 以及它们复杂的串并联形式^[5](标准线性固体模型, Standard Linear Solid Models, SLS)部分描述这种频率依赖特性。注意到, SLS 模型需要大量参数才能精确地同时拟合试验得到的储能和耗

能模量数据。在此过程中, SLS 模型的某些拟合参数易出现负值, 从而失去物理意义^[6]。反之, 分数阶导数^[7]模型以少量参数就能精确地描述本构关系的频率依赖性^[6], 引起了越来越多的关注。该模型的控制装置应用包括: 黏弹性阻尼^[8]、隔震装置^[9]、液体黏滞阻尼器^[10]、调谐液柱阻尼^[11], 调谐质量阻尼器^[12]等。

可见, 工程结构、控制装置和受控结构可能会同时出现力-位移关系的滞回和频率依赖特性。以一种新型的广泛应用于半主动控制装置的磁敏弹性体为例, 本质上作为一种橡胶黏弹性材料, 具有明显的本构频率依赖性^[13]。为此, Behrooz 等^[14]利用三参数 SLS 模型和 Bouc-Wen 滞回模型的并联形式、Eem 等^[15]采用 Maxwell 模型和 Ramberg-Osgood 滞回模型的并联形式模拟磁敏弹性体的力-位移关系。Behrooz 和 Eem 的研究均关注装置的滞回力学性能, 对黏弹性材料的频率依赖性却只以简单的 SLS 模型模拟。相反, 在分数阶导数非线性动力学研究方面, 人们往往较多关注分数阶导数线性^[16-17]或无记忆非线性^[18-19]动力系统, 对具有滞回特性的分数阶系统研究较少。文献调查显示只有少量研究^[20-21]关注滞回分数动力系统的随机和稳态动力响应。其中, 文献[20]通过等效线性化方法将滞回分数阶系统化为等效线性参数依赖于幅值的线性系统, 得到了滞回分数阶系统频率-响应幅值曲线。该曲线只具有主共振峰值, 而无法反应超谐共振峰值。

考察动力系统在谐波激励下的稳态响应是理解系统动力特性重要的一环,因此,本文与文献[20]一样,关注谐波激励下滞回分数阶系统稳态响应。但是,本文与文献[20]采用的方法不同,本文采用谐波平衡法研究具有不同分数阶导数的滞回系统的稳态响应,以期得到频率-响应幅值的完整信息。首先,发展分数阶滞回系统的谐波平衡法,将滞回运动微分转化为一组代数方程;随后,利用Levenberg-Marquardt算法对与该代数方程对应的最小二乘问题求解;最后,考察硬化和软化的Bouc-Wen滞回系统,得到它们在不同分数阶数情况下的频率-响应幅值曲线。与时域逐步积分法的对比显示了所建议方法的精度。

1 分数阶滞回系统的谐波平衡法

考虑具有分数阶阻尼项的单自由度滞回动力系统

$$m\ddot{y}(t) + c_q {}^L D_t^q y(t) + \alpha ky(t) + (1-\alpha)kz(t) = w(t) \quad (1)$$

式中 m, k 分别为质量和线弹性刚度系数; $y(t), \ddot{y}(t)$ 分别为系统位移和加速度响应; $z(t)$ 为滞回位移; α 为屈服前后刚度比; c_q 为分数阶阻尼系数; ${}^L D_t^m$ 为 m 阶 Riemann-Liouville 意义上的分数阶导数,即

$${}^L D_t^m y(t) = \frac{1}{\Gamma(n-m)} D^n \cdot \int_a^t (t-\tau)^{n-m-1} y(\tau) d\tau \quad (2)$$

式中 $D = d/dt$; n 为正整数且满足 $n-1 < m < n$; $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数,定义为

$$\Gamma(n-m) = \int_0^\infty t^{n-m-1} e^{-t} dt, \quad n-m > 0 \quad (3)$$

特别地,当 $0 < m = q < 1$ 且 $a = 0$ 时,式(2)退化为

$${}^L D_t^q y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} D \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^q} y(\tau) d\tau \quad (4)$$

当因果系统满足零初始条件时(很多实际动力系统都满足),式(4)可写为 Caputo 意义上的分数阶导数,即

$${}^C D_t^q = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_0^t \frac{\dot{y}}{(t-\tau)^q} d\tau \quad (5)$$

下文为方便计,将 Caputo 分数阶导数简写为 D_t^q 并简称为分数阶导数。

另一方面,将位移响应和激励在 $(-\infty, \infty)$ 区间上进行周期延拓后,可将它们写为 Fourier 级数的形式:

$$y(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k \cos \omega_k t + D_k \sin \omega_k t) \quad (6)$$

$$z(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t) \quad (7)$$

$$w(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t) \quad (8)$$

注意到谐和函数的分数阶导数性质^[22]:

$$D_t^q \cos \omega t = \omega^q \cos \left(\omega t + \frac{\pi q}{2} \right) \quad (9)$$

$$D_t^q \sin \omega t = \omega^q \sin \left(\omega t + \frac{\pi q}{2} \right) \quad (10)$$

实质上,当 $q = 1$ 时,式(9)-(10)退化为整数阶导数的形式。将式(6)两边求分数阶和一阶导数后的表达式代入式(1)可得

$$\begin{aligned} & m \sum_{k=1}^N (-C_k \omega_k^2 \cos \omega_k t - D_k \omega_k^2 \sin \omega_k t) + \\ & k\alpha [C_0 + \sum_{k=1}^N (C_k \cos \omega_k t + D_k \sin \omega_k t)] + \\ & c_q \left[\frac{C_0}{\Gamma(1-q)t^q} + \sum_{k=1}^N C_k \omega_k^q \cos \left(\omega_k t + \frac{\pi q}{2} \right) + \right. \\ & \left. D_k \omega_k^q \sin \left(\omega_k t + \frac{\pi q}{2} \right) \right] + (1-\alpha)k[U_0 + \\ & \sum_{k=1}^N (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t)] = \\ & A_0 + \sum_{k=1}^N (A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t) \end{aligned} \quad (11)$$

对式(11)两边求谐和平衡得到如下代数方程组:

$$\begin{aligned} & (-m\omega_k^2 + k\alpha + c_q \omega_k^q \cos \frac{\pi q}{2}) C_k + \omega_k^q c_q \cdot \\ & \sin \frac{\pi q}{2} D_k + F_k^c + (1-\alpha)kU_k = A_k \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & -c_q \omega_k^q \sin \frac{\pi q}{2} C_k + (-m\omega_k^2 + k\alpha + c_q \omega_k^q \cdot \\ & \cos \frac{\pi q}{2}) D_k + F_k^s + (1-\alpha)kV_k = B_k \end{aligned} \quad (13)$$

$$k\alpha C_0 + (1-\alpha)kU_0 + F_0^c = A_0 \quad (14)$$

式中 $k = 1, 2, \dots, N$, 且:

$$F_k^c = \frac{c_q C_0}{\Gamma(1-q)} \frac{2}{T} \int_0^T \frac{1}{t^q} \cos \omega_k t dt \quad (15)$$

$$F_k^s = \frac{c_q C_0}{\Gamma(1-q)} \frac{2}{T} \int_0^T \frac{1}{t^q} \sin \omega_k t dt \quad (16)$$

$$F_0^c = \frac{c_q C_0}{\Gamma(1-q)} \frac{2}{T} \int_0^T \frac{1}{t^q} dt \quad (17)$$

式(12)-(14)的矩阵形式为

$$\frac{1}{k(\alpha-1)} (C_1 C + F - A) = U \quad (18)$$

式中 $A = [A_0 \ A_1 \ B_1 \ \dots \ A_N \ B_N]^T$, $C = [C_0 \ C_1 \ D_1 \ \dots \ C_N \ D_N]^T$, $F = [F_0^c \ F_1^c \ F_1^s \ \dots \ F_N^c \ F_N^s]^T$, $U =$

$$[U_0 \ U_1 \ V_1 \ \dots \ U_N \ V_N]^T, C_1 = \begin{bmatrix} k\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{1,1} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & C_{1,N} \end{bmatrix} \text{ 和}$$

$$C_{1,k} = \begin{bmatrix} -m\omega_k^2 + k\alpha + c_q\omega_k^q \cos \frac{\pi q}{2} & c_q\omega_k^q \sin \frac{\pi q}{2} \\ -c_q\omega_k^q \sin \frac{\pi q}{2} & -m\omega_k^2 + k\alpha + c_q\omega_k^q \cos \frac{\pi q}{2} \end{bmatrix}.$$

式(18)表明了滞回位移 $z(t)$ 的 Fourier 级数向量 U 可表示为位移 $y(t)$ 的 Fourier 级数向量 C 的形式。然而,这两个级数向量都未知,需引进它们之间的第二个关系式。为此,引入 $y(t)$ 和 $z(t)$ 之间的第二个关系式,即形如

$$\dot{z}(t) = z_0(\dot{y}, z, t) \quad (19)$$

的滞回微分方程。将式(19)进一步写成余量的形式,即

$$r(t) = \dot{z}(t) - z_0(\dot{y}, z, t) \quad (20)$$

利用 Galerkin 法将余量式(20)在 Fourier 基上投影,可得到第二个 U 与 C 之间的关系式,随后将此关系式代入式(18)后可将向量 U 消除,即可得到以 C 为未知量的方程

$$P(C) = 0 \quad (21)$$

式中 $P = \{P_0 \ Q_0 \ P_1 \ Q_1 \ \cdots \ P_N \ Q_N\}^T$ 为余量 $r(t)$ 的 Fourier 级数。求解式(21)可得位移响应的 Fourier 级数,对响应的 Fourier 级数作 Fourier 逆变换后可得位移响应时程。

2 代数方程数值求解的 Levenberg-Marquardt 算法

式(21)的求解可通过许多数值算法实现,本文采用一种高效的 Levenberg-Marquardt (LM) 算法。LM 算法最早由 Marquardt^[23]于 1963 年提出,是一种应用广泛的非线性最小二乘算法,可视为最速下降法和线性化方法(泰勒级数)的一种组合;可参阅相关数值计算参考书目。它将代数方程转化为求解最小二乘的形式,即

$$\min f(C) = \|P(C)\|^2 = P^T P \quad (22)$$

其最优解可通过迭代方式求解

$$C^{(k+1)} = C^{(k)} - \{J^T[C^{(k)}]J[C^{(k)}] + \varphi^{(k)}I\}^{-1}J[C^{(k)}]^T P[C^{(k)}] \quad (23)$$

式中 φ 为依条件判断而变化的 LM 参数,括号内的上标 k 表示迭代数; I 为单位方阵; J 为 Jacobian 矩阵

$$J = \frac{\partial P}{\partial C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_0}{\partial C_0} & \frac{\partial P_0}{\partial C_1} & \frac{\partial P_0}{\partial D_1} & \cdots & \frac{\partial P_0}{\partial D_N} \\ \frac{\partial P_1}{\partial C_0} & \frac{\partial P_1}{\partial C_1} & \frac{\partial P_1}{\partial D_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial D_N} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial C_0} & \frac{\partial Q_1}{\partial C_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial D_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial D_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_N}{\partial C_0} & \frac{\partial Q_N}{\partial C_1} & \frac{\partial Q_N}{\partial D_1} & \cdots & \frac{\partial Q_N}{\partial D_N} \end{bmatrix} \quad (24)$$

式(24)右边矩阵中的元素为余量 $r(t)$ 的 Fourier 系数对未知量 $y(t)$ 的 Fourier 系数的导数,可用 $\partial r/\partial C_k$ 和 $\partial r/\partial D_k$ 的快速 Fourier 变换得到:

$$\frac{\partial r(t)}{\partial C_k} = \frac{\partial r(t)}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial C_k} + \frac{\partial r(t)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial C_k} + \frac{\partial r(t)}{\partial \dot{z}} \frac{\partial \dot{z}}{\partial C_k} \quad (25)$$

$$\frac{\partial r(t)}{\partial D_k} = \frac{\partial r(t)}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial D_k} + \frac{\partial r(t)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial D_k} + \frac{\partial r(t)}{\partial \dot{z}} \frac{\partial \dot{z}}{\partial D_k} \quad (26)$$

式(25)-(26)右边的偏导数为:

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial C_k} = -\omega_k \sin \omega_k t \quad (27)$$

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial D_k} = \omega_k \cos \omega_k t \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial C_k} & \frac{\partial z}{\partial D_k} \\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial C_k} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial D_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_k t & \sin \omega_k t \\ -\omega_k \sin \omega_k t & \omega_k \cos \omega_k t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial U_k}{\partial C_k} & \frac{\partial U_k}{\partial D_k} \\ \frac{\partial V_k}{\partial C_k} & \frac{\partial V_k}{\partial D_k} \end{bmatrix} \quad (29)$$

式(29)右边的未知量可根据式(18)求得,即

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial U_k}{\partial C_k} & \frac{\partial U_k}{\partial D_k} \\ \frac{\partial V_k}{\partial C_k} & \frac{\partial V_k}{\partial D_k} \end{bmatrix} = \frac{C_{1,k}}{k(\alpha - 1)} \quad (30)$$

最后,只剩下余量对位移及速度的偏导数 $\partial r/\partial \dot{z}$, $\partial r/\partial z$ 和 $\partial r/\partial \dot{y}$,很明显

$$\frac{\partial r}{\partial \dot{z}} = 1 \quad (31)$$

而 $\partial r/\partial z$ 和 $\partial r/\partial \dot{y}$ 均依赖于二阶滞回微分方程的具体形式。例如,对于广泛使用的 Bouc-Wen 滞回模型

$$\dot{z} = \dot{y} [A - |z|^n (\gamma \operatorname{sgn}(\dot{y}) \operatorname{sgn}(z) + \beta)] \quad (32)$$

可得:

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \dot{y} |z|^{n-1} [\gamma \operatorname{sgn}(\dot{y}) + \beta \operatorname{sgn}(z)] \quad (33)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \dot{y}} = -A + |z|^{n-1} z [\gamma \operatorname{sgn}(\dot{y}) + \beta \operatorname{sgn}(z)] \quad (34)$$

式中 β, γ, n, A 均为控制滞回环形状的模式参数。

3 数值算例

利用与逐步积分法得到的相关结果对比验证所建议方法的适用性和精度。作为演示,本算例采用具有微分形式的 Bouc-Wen 滞回模型,但本文发展的方法同时也适用其他滞回关系。注意到,具有 Bouc-Wen 滞回的整数阶动力系统响应的数值解可通过增量形式的 Newmark-Newton-Raphson (NNR) 迭代法实现,其本质是将动力方程转化为增量静力方程,难点在于切线性变刚度的求解和滞回模型拐点的处理。在此基础上,为求解 Bouc-Wen

滞回的分数阶动力系统响应,作者发展了一种基于Riemann-Liouville离散分数阶导数的NNR方法:其中,与Newmark-1/6法处理加速度项对应,在对离散式(5)右边积分时,须假定离散区间内的速度呈线性变化。限于篇幅和行文重点,该增量形式的数值方法兹不赘述,拟另文发表。

首先,考察所建议方法在特定参数设置下计算得到的动力响应时程和滞回环。选取动力系统参数 $m=1, \zeta_0=0.1, \omega_n=1, q=0.5$; 滞回参数 $\beta=0.5, n=1, A=1, \alpha=0.1, \gamma=0.5$; 激励参数 $w_0=1, \omega=1, w(t)=w_0 \sin(\omega t)$ 。系统质量和刚度参数选取时体现了振子的“归一化”; 阻尼参数选取时体现了工程系统的小阻尼特性; 滞回参数选取时体现了明显的滞回效应。图1(a)-(c)所示为在上述参数设置情况下所建议方法和逐步积分法得到的 $y(t)$, $z(t)$ 和滞回环对比。由图1(a)和(b)可知:除了位移时程的开始阶段,多谐波平衡法得到的平稳响应能很好地吻合逐步积分法得到的结果; 时程开始的误差由多谐波平衡法忽略初始条件导致。

随后,考察分数阶数对软化 Bouc-Wen 系统响应幅值的影响。除分数阶数外,其他模型及激励参数与上例相同。图2所示为多谐波平衡法和逐步积分法计算得到的响应 $y(t)$ 和 $z(t)$ 幅值与分数阶数之间的关系曲线。由图2可见:所建议方法与时域逐步积分法吻合较好; $y(t)$ 的幅值随着 q 的增大而减小, $z(t)$ 的幅值随着 q 的增大稍有减小但几乎保持不变。图3给出了 $q=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ 时的滞回环。由图3可知,滞回环的饱满程度随着 q 的增大而减小。

接着,考察分数阶数对硬化 Bouc-Wen 系统响应幅值的影响。此时,取滞回参数 $\gamma=0.35, \beta=-0.65$, 其他系统、滞回和激励参数与上例同。图4所示为多谐波平衡法和逐步积分法计算得到的响应 ($y(t)$ 和 $z(t)$) 幅值与分数阶数之间的关系曲线。由图可知,在该情况下, $y(t)$ 和 $z(t)$ 幅值均随着 q 的增大而增大,前者增大幅值更加明显。图5所示为 $q=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ 时系统的滞回环。可见,所有滞回环均呈现明显的硬化特性,分数阶数对硬化滞回环的影响较软化滞回环时小。

分数阶数对硬化和软化系统响应幅值的影响不同。为深入考察这一点,本文利用谐波平衡法和逐步积分法得到了分数阶数 $q=0.2, 0.6, 1$ 的情况下,上述软化和硬化系统的激励频率-响应幅值曲线,如图6和7所示。由图6-7可见,在所有情况下,谐波平衡法均能很好地吻合逐步积分法给出的结果。此外,应注意到,文[20]利用线性化方法研究滞

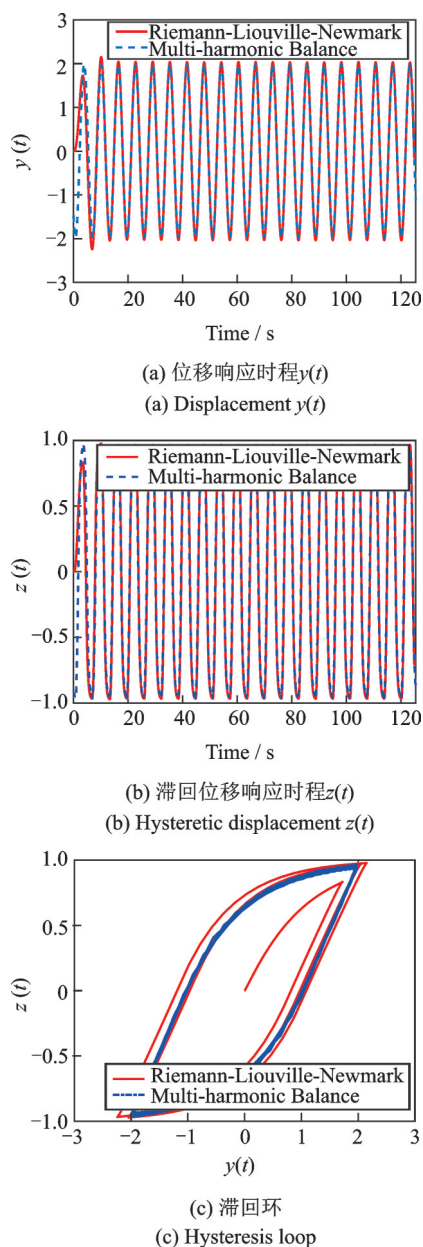


图1 多谐波平衡法和逐步积分法计算得到的响应对比
Fig. 1 Response comparison between the results obtained by the multi-harmonic balance method and those obtained by the step-by-step method

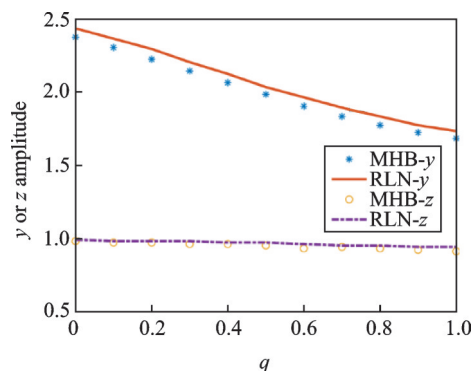


图2 分数阶数不同时软化 Bouc-Wen 系统的谐和响应幅值
Fig. 2 Response amplitudes of a softening Bouc-Wen system endowed with different fractional orders

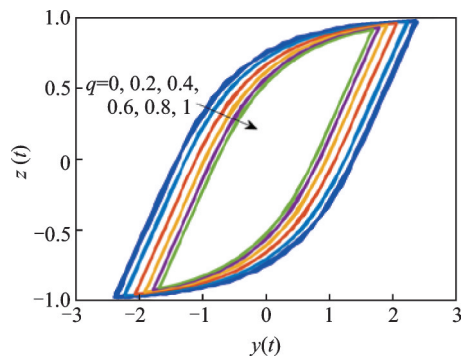


图3 分数阶数不同时软化 Bouc-Wen 系统的滞回环
Fig. 3 Hysteretic loops of a softening Bouc-Wen system endowed with different fractional orders

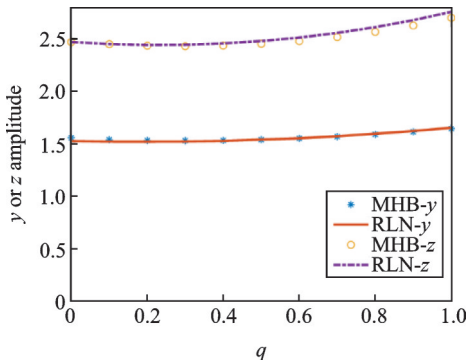


图4 分数阶数不同时硬化 Bouc-Wen 系统的谐和响应幅值
Fig. 4 Response amplitudes of a hardening Bouc-Wen system endowed with different fractional orders

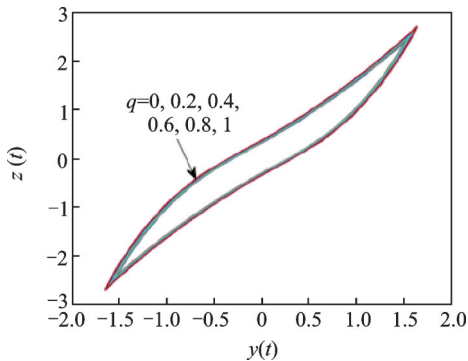


图5 分数阶数不同时硬化 Bouc-Wen 系统的滞回环
Fig. 5 Hysteretic loops of a hardening Bouc-Wen system endowed with different fractional orders

回分数阶系统的频率响应曲线,只能得到主共振峰值,无法得到超谐共振峰值;而本文采用的谐波平衡法能同时得到主共振和超谐共振峰值。文[24]采用增量谐波平衡法和平均法研究了分数阶硬 Duffing 振子的频率响应曲线,也得到类似的结论。由图 6-7 可见:软特性 Bouc-Wen 分数阶系统的激励频率-响应幅值曲线左侧较陡;反之,硬特性 Bouc-Wen 分数阶系统的激励频率-响应幅值曲线右侧较陡。本例采用的激励频率($\omega=1$)处于图 6 所示软特性峰值

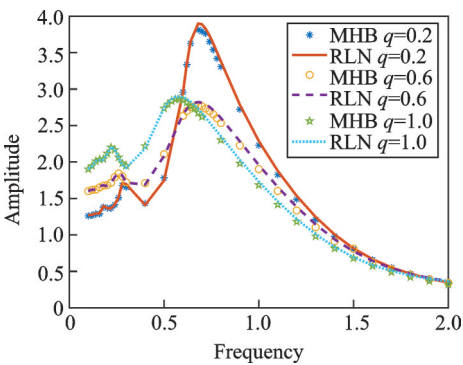


图6 分数阶数不同时软化 Bouc-Wen 系统的激励频率-响应幅值曲线
Fig. 6 Excitation frequency-response amplitude curve for a softening Bouc-Wen systems with different fractional orders

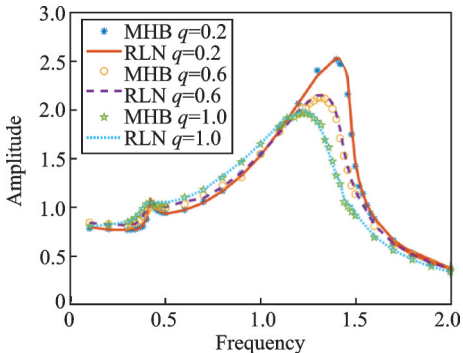


图7 分数阶数不同时硬化 Bouc-Wen 系统的激励频-响应幅值曲线
Fig. 7 Excitation frequency-response amplitude curve for a hardening Bouc-Wen systems with different fractional order

右侧,分数阶数增大时响应幅值呈明显递减趋势;同时,激励频率处于图 7 所示硬特性峰值左侧,分数阶数增大时响应幅值呈小幅增加趋势。由以上分析不难得出:对于特定滞回系统,分数阶数对响应幅值的影响与激励频率大小有密切关系。例如,对于如图 6 所示的软特性分数阶系统,与 $\omega=1$ 时的情况不同,当激励频率 $\omega=0.5$ 时,响应幅值随分数阶数的增加而增加。另外,分数阶数对响应幅值的影响还与滞回参数有关,如本例所示软或硬特性系统参数。值得注意的是,当系统阻尼和滞回耗能较小时,非线性系统的激励频率-响应幅值曲线易出现分岔现象,进而导致更加复杂的分数阶数和响应幅值之间的关系。

现对所提出方法在参数设置和计算效率方面作如下评述。首先,在计算式(24)所示的 Jacobian 矩阵时,每个迭代步均涉及时域和频域之间的相互转化,必须进行 Fourier 变换^[25]。因此,使用快速 Fourier 变换(Fast Fourier Transform, FFT)及其逆变换能加快速度。其次,系统非线性的存在,可能会产生

高频响应;因此,在设置响应上限截止频率时,须覆盖响应可能的频率区间。本文采用的上限截止频率大于10倍激励频率。最后,频率泄露可能影响收敛速度并降低计算精度。为此,在设置采样频率时,建议在激励频率上取离散频率点,即激励频率为离散频率步长的整数倍。计算每个激励频率点的响应幅值时,均须综合考虑上述要求,合理指定计算参数。例如,采用与图1相同的系统参数设置,选取上限截止频率 $\omega_u=10$,频域内采样间隔 $\Delta\omega=0.1$,共 $N=100$ 个采样点。此时,第10个频率离散点等于激励频率。试算表明,仅5次迭代就可达到预定收敛目标,耗时0.07 s。

本文结合 Riemman-Liouville 定义的离散格式和 Newmark-Newton-Raphson 迭代方法在时域中求解 Bouc-Wen 分数阶导数系统的动力响应。Riemman-Liouville 离散格式中,当前积分步的运动状态须表示为之前所有离散时间点运动状态的加权和。其中,每个历史时间点的权重须及时更新,大大降低了计算效率。此外,与整数阶非线性动力系统的 Newton-Raphson 迭代方法一样,更新切线刚度与寻找滞回位移拐点也增加了时域方法的计算量。计算经验表明:时域方法的计算时长比时间离散点数增长更快;同时,须采用非常小的时间步长以保证计算精度。例如,采用与上述频域方法相同的系统参数设置,使时域方法达到与频域方法相同的计算精度时,计算耗时0.71 s。

4 结论与展望

本文发展了谐和激励下滞回分数阶动力系统平稳解的谐波平衡法。首先,利用谐波平衡法将滞回分数阶微分方程转化为了一组以响应 Fourier 级数为未知量的非线性代数方程;利用 Levenberg-Marquardt 算法求解了与非线性代数方程对应的最小二乘问题,得到了响应 Fourier 级数。研究表明,谐波平衡法得到的响应时程、滞回环、频率-幅值曲线均与逐步积分法得到的相关结果吻合较好。该方法能同时得到滞回分数阶系统频率-幅值曲线的主共振和超谐共振峰值。

对具有不同滞回特性的系统,考察了分数阶数对响应幅值大小的影响。文中给出了在特定软特性和硬特性参数的情况下,激励频率等于线性系统自振频率时,分数阶数对响应幅值影响的规律。研究发现,分数阶数对响应幅值影响较复杂,与系统特性、滞回特性、激励频率均有一定关系;拟另文发表。

进一步的工作可在其他滞回模型、多自由度系

统以及滞回分数阶系统的混沌和分岔等方面展开。

参考文献:

- [1] 李杰,李国强.地震工程学导论[M].北京:地震出版社,1992.
- [2] 欧进萍.结构振动控制[M].北京:科学出版社,2003.
- [3] 潘鹏,张耀庭.建筑抗震设计理论与方法[M].北京:科学出版社,2017.
- [4] Xu Z-D, Wang D-X, Shi C-F. Model, tests and application design for viscoelastic dampers[J]. Journal of Vibration and Control, 2011, 17: 1359-1370.
- [5] Xu Z-D. Earthquake mitigation study on viscoelastic dampers for reinforced concrete structures[J]. Journal of Vibration and Control, 2007, 13: 29-43.
- [6] Di Paola M, Pirrotta A, Valenza A. Visco-elastic behavior through fractional calculus: An easier method for best fitting experimental results[J]. Mechanics of Materials, 2011, 43(12): 799-806.
- [7] Oldham K, Spanier J. The Fractional Calculus Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order[M]. Elsevier, 1974.
- [8] Xu Z-D, Xu C, Hu J. Equivalent fractional Kelvin model and experimental study on viscoelastic damper[J]. Journal of Vibration and Control, 2015, 21(13): 2536-2552.
- [9] Hwang J, Wang J. Seismic response prediction of HDR bearings using fractional derivative Maxwell model[J]. Engineering Structures, 1998, 20: 849-856.
- [10] Makris N, Dargush G, Constantinou M. Dynamic analysis of generalized viscoelastic fluids[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1993, 119: 1663-1679.
- [11] Di Matteo A, Iacono F L, Navarra G, et al. Innovative modeling of tuned liquid column damper motion[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2015, 23: 229-244.
- [12] Rüdinger F. Tuned mass damper with fractional derivative damping[J]. Engineering Structures, 2006, 28: 1774-1779.
- [13] Li Y, Li J. On rate-dependent mechanical model for adaptive magnetorheological elastomer base isolator[J]. Smart Materials and Structures, 2017, 26: 045001.
- [14] Behrooz M, Wang X, Gordaninejad F. Modeling of a new semi-active/passive magnetorheological elastomer isolator[J]. Smart Materials and Structures, 2014, 23: 045013.
- [15] Eem S H, Jung H J, Koo J H. Modeling of magnetorheological elastomers for harmonic shear deformation[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2012, 48: 3080-3083.

- [16] Chang T S, Singh M P. Seismic analysis of structures with a fractional derivative model of viscoelastic dampers[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2002, 1: 251-260.
- [17] Singh M P, Chang T S, Nandan H. Algorithms for seismic analysis of MDOF systems with fractional derivatives[J]. Engineering Structures, 2011, 33: 2371-2381.
- [18] Failla G, Pirrotta A. On the stochastic response of a fractionally-damped Duffing oscillator[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012, 17: 5131-5142.
- [19] Chen L, Wang W, Li Z, et al. Stationary response of Duffing oscillator with hardening stiffness and fractional derivative[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2013, 48: 44-50.
- [20] Spanos P D, Di Matteo A, Pirrotta A. Steady-state dynamic response of various hysteretic systems endowed with fractional derivative elements[J]. Nonlinear Dynamics, 2019, 98(4): 3113-3124.
- [21] Di Matteo A, Spanos P D, Pirrotta A. Approximate survival probability determination of hysteretic systems with fractional derivative elements[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2018, 54: 138-146.
- [22] Trenčevski K, Tomovski Ž. On fractional derivatives of some functions of exponential type[J]. Publikacije Elektrotehničkog fakulteta-serija: Matematika, 2002, (13): 77-84.
- [23] Marquardt D W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters[J]. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 1963, 11(2): 431-441.
- [24] Shen Y J, Wen S F, Li X H, et al. Dynamical analysis of fractional-order nonlinear oscillator by incremental harmonic balance method [J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 85: 1457-1467.
- [25] Wong C W, Ni Y Q, Lau S L. Steady-state oscillation of hysteretic differential model. I: Response analysis [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1994, 120(11): 2271-2298.

Steady-state response determination of a hysteretic system endowed with fractional elements via a multi-harmonic balance method

KONG Fan¹, HOU Zhao-xu¹, XU Jun², LI Shu-jin¹

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China;

2. College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract: Civil structures and its energy dissipation devices often exhibit hysteretic and frequency-dependent behavior. In this regard, the fractional derivative model can be used for frequency-dependent force-displacement relationship with very few parameters. The paper presents a multi-harmonic balance method for determining steady-state response of a hysteretic system endowed with fractional elements. Specifically, the Fourier series expansion both for the excitation and response and utilizing the multi-harmonic balancing on both sides of the equation of motion, leads to a relationship between the Fourier coefficients of the excitation and that of the response. Next, recasting the hysteretic differential equation into a residue form and projecting it on the Fourier basis leads an algebraic equation with unknown response Fourier coefficients. The Levenberg-Marquardt algorithm is used to obtain the unknowns. Pertinent numerical examples including a softening and hardening Bouc-Wen system with different fractional order demonstrate the accuracy of the proposed method.

Key words: multi-harmonic balance; Bouc-Wen hysteresis; Levenberg-Marquardt algorithm; fractional derivative

作者简介: 孔 凡(1984-),男,博士,副教授,硕士生导师。E-mail: kongfan@whut.edu.cn