

# 不等间距加筋圆柱壳的振动局域化研究

纪 刚, 李宗威, 周其斗

(海军工程大学舰船与海洋学院, 湖北 武汉 430033)

**摘要:** 对圆柱壳采取不等间距加筋配置将导致其振动在通频带局域化, 从而可实现对圆柱壳结构振动进行控制。将加筋圆柱壳模型的振动等效为耦合振子链的振动, 利用耦合振子链的无序局域化因子理论公式定量预报不等间距加筋圆柱壳的无序局域化因子; 与耦合振子链等效的圆柱壳振动参数由基于有限元结合波数分析技术所获得的加筋圆柱壳色散曲线给出; 与耦合振子链等效的圆柱壳无序参数由圆柱壳弯曲波动理论和统计理论给出。在给出不等间距加筋圆柱壳无序局域化因子的基础上, 开展了无序局域化因子影响规律的研究。针对不等间距加筋圆柱壳实例的数值分析表明, 利用不等间距加筋配置来实现圆柱壳结构振动局域化控制具有可行性, 所采取的无序局域化因子预报方法具有有效性。

**关键词:** 结构振动; 振动衰减; 加筋圆柱壳; 无序结构; 局域化

**中图分类号:** O327; U661.44; V214.3<sup>+</sup>6 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2021)03-0592-09

**DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2021.03.017

## 引 言

加筋圆柱壳是工程结构中广泛使用的结构形式, 如: 潜艇耐压壳结构、飞机舱室结构等。传统的加筋圆柱壳采用环向筋沿圆柱壳轴向等间距布置, 具有周期性结构特征: 相邻的两个加强筋之间的部分沿圆柱壳轴向周期复制, 因此, 结构振动控制领域通常关注等间距加筋圆柱壳的振动特性<sup>[1-5]</sup>。当加强筋间距为随机分布时, 原结构成为无序非周期结构, 即不等间距加筋圆柱壳。不等间距加筋圆柱壳是本文研究的重点。

有限长等间距加筋圆柱壳振动的典型特性是具有“模态聚集”现象<sup>[4]</sup>: 圆柱壳的自然频率聚集在某些频带, 这些频带称为“通频带”, 圆柱壳受激振动时, 整体振动的峰值频率聚集于通频带, 通频带模态密度大; 通频带之间为“止频带”, 模态密度小, 整体振动能量小。“模态聚集”现象是周期结构振动的典型特征<sup>[5-8]</sup>, 解释为<sup>[9]</sup>: 由于加强筋处存在阻抗的不一致, 两个加强筋之间的部分可能形成局部模态。在通频带, 局部模态将沿圆柱壳轴向自由无衰减传播, 形成模态传导波; 在止频带, 模态传导波只能沿壳体轴向呈指数衰减传播。在有限长等间距加筋圆柱壳中, 模态传导波传播时会在边界反射, 特定频率下, 传导波和反射波波长同圆柱壳长度满足相协条件,

从而可叠加形成模态和自然频率。由于模态传导波仅能在通频带自由无衰减传播, 因此有限长等间距加筋圆柱壳的自然频率将聚集在通频带。从振动控制角度看, 应当尽可能使激振频率处于止频带, 此时振动能量因不能远距离传播而被局限于振源附近, 即振动被“局域化”。

当加强筋采取不等间距布置时, 结构将不存在严格意义的通频带<sup>[10]</sup>: 在所有频带内, 振动传递随传播距离的增加而呈指数衰减, 表现为振动局域化特征。振动局域化效应是无序非周期结构的典型特征, 它与波在无序结构中的随机散射相关: 由于无序结构的单元属性具有随机、无序分布特征, 因而模态传导波在传播过程中会产生无序散射, 即使在通频带, 能量也会因反射作用而被限制于激振源附近。从振动波形的空间分布上看, 结构无序性所带来的振动局域化效果类似于结构中因存在阻尼而形成的振动局域化效果, 但无序局域化并非由能量耗散引起, 因而结构无序化设计是一种通过结构设计控制振动传播的措施。不等间距加筋是无序结构设计的典型案例, 开展不等间距加筋圆柱壳的振动局域化研究对工程振动控制设计具有重要的意义。

无序局域化现象首次由 Anderson 在研究电子传播规律时发现<sup>[11]</sup>, 在晶体中掺入杂质后, 电子传播能力下降。Hodges 等利用无限耦合振子链和带振子的无限弦链模型证实在结构动力学领域中也存在

无序局域化效应<sup>[10,12]</sup>。无序结构所导致的振动局域化程度可采用局域化因子定量表述,它定量给出了传播量沿传播方向的指数衰减率<sup>[10,12-14]</sup>。

Hodges等<sup>[12]</sup>采取量级展开的方法给出了局域化因子的近似表达式,表明局域化因子同耦合-无序度之比相关。Pierre等针对有限弹簧振子耦合摆模型从模态分析层面解释了无序结构所导致的振动局域化效应,说明了振动局域化效应在模态上体现为局部模态,并给出了振动强局域化发生的条件<sup>[15-18]</sup>。在理论分析方法上,这些文献多采用波动分析法,因为这些模型都是一维波传播模型,动力学表达比较简单,容易通过解析分析并定量给出局域化因子,从而判断无序局域化的发生。为针对加筋板、壳模型这类二维振动问题开展无序局域化研究,Photiadis采取“将二维振动问题分解为在一个方向的振动模式沿另一个方向传播”的分析方式实现“降维”<sup>[19-20]</sup>。由于板、壳结构控制方程较弹簧振子链、梁模型更为复杂,因此Photiadis的主要工作量在于理论推导和工程近似表达上,结果表明,板、壳结构模型同弹簧振子耦合摆模型等一维波传播模型的控制方程具有类比性。

在试验研究方面,典型的例子包括:Hodges等<sup>[12]</sup>开展了具有带质量的张紧弦受激振动试验,测量了周期质量分布和无序质量分布系统中振动的衰减因子,证实了质量无序分布将导致振动局域化。Bouzit等<sup>[21]</sup>利用多跨梁激振试验进一步验证了局域化在无序结构中的可发生性。Photiadis等采用声全息技术(NAH)测量了等间距和不等间距加筋圆柱壳的受激振动场,并通过波形分析与参数辨识技术给出了不等间距加筋模型的局域化因子,结果表明不等间距加筋模型的局域化因子明显大于等间距加筋模型的局域化因子,证实了局域化主要来源于无序加强筋布置<sup>[22]</sup>。试验研究的主要困难在于如何有效分离阻尼对无序局域化的干扰。

本文将针对以常规潜艇耐压壳为原型结构的有限长加筋圆柱壳开展振动无序局域化研究,重点获取不等间距加筋圆柱壳振动的无序局域化因子,并以此为基础开展无序局域化因子的影响规律研究。为定量预报不等间距模型的无序局域化因子,对加筋圆柱壳开展了有限元分析和波数分析,为获取等效耦合振子链参数,将加筋圆柱壳的径向振动等效为耦合振子链振动;基于圆柱壳弯曲波动理论和统计理论给出等效的耦合振子链无序程度参数;最后利用耦合振子链的无序局域化因子理论公式预报不等间距加筋圆柱壳模型的无序局域化因子。由于所采用的有限元技术、波数分析技术均为成熟技术,因而能规避针对加筋圆柱壳进行复杂解析分析的困

难,对类似问题的工程化应用具有指导意义。本文的分析基于数值仿真模型给出,可有效排除试验分析中阻尼对无序局域化的干扰,有关结论可为实际工程结构振动控制设计提供支撑。

## 1 耦合振子链的无序局域化因子

耦合振子链的无序局域化因子将用于支撑对加筋圆柱壳的无序局域化因子预报。耦合振子链如图1所示,当耦合弹簧刚度 $k_c=0$ 时,系统退化为系列独立解耦的弹簧振子系统,各振子的质量均为 $m$ ,第 $i$ 个振子的对地弹簧刚度为 $k_i=k_s+\epsilon_i$ , $\epsilon_i$ 是小参数,代表了各对地弹簧刚度在平均刚度 $k_s$ 基础上的扰动值。当耦合弹簧刚度 $k_c \neq 0$ 时,整个耦合系统的动力关系可表达为递归形式<sup>[23]</sup>

$$\begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{-m\omega^2 + k_i}{k_c} + 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ x_i \end{pmatrix}$$

$$\text{或} \quad \mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{T}_i \mathbf{X}_i \quad (1)$$

式中 $x_i$ 代表第 $i$ 个振子质量的位移复数幅值, $\omega$ 为圆频率, $i$ 为振子序号索引, $i \in (-\infty, +\infty)$ , $\mathbf{X}_i = (x_{i-1}, x_i)^T$ (上标“T”代表求转置)表征了第 $i$ 个单元的状态,它由第 $i-1$ 个振子和第 $i$ 个振子的位移复数幅值共同表征,第 $i$ 个单元的状态通过状态传递矩阵 $\mathbf{T}_i$ 变换为第 $i+1$ 个单元的状态。

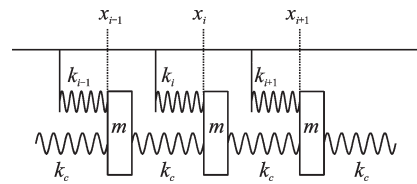


图1 耦合振子链模型

Fig. 1 Coupled oscillator chain model

文献[23-25]对该问题进行了深入研究,主要结论为:

当各对地弹簧刚度 $k_i$ 相同,即 $\epsilon_i=0$ , $k_i=k_s$ 时,系统是周期系统,此时,当圆频率 $\omega$ 处于通频带内时,系统对输入的能量能以不衰减的波的形式沿系统传播,其中波数 $k$ 和圆频率 $\omega$ 满足色散关系

$$1 + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2V} = \cos k \quad (2)$$

式中 $\omega_0$ 为解耦振子的固有圆频率, $V$ 被称为耦合系数,表达式为

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{k_s}{m} \\ V = \frac{k_c}{m} \end{cases} \quad (3)$$

其中,通频带频率由

$$\left|1+\frac{\omega_0^2-\omega^2}{2V}\right|\leqslant 1$$

(4)

给出。

若对地弹簧刚度受到不规则扰动,即 $\epsilon_i\neq 0$ ,则系统是无序非周期系统,此时系统对输入的能量将以指数衰减形式沿系统传播。记第1个振子的能量为 $B_1$ ,传播至第 $N$ 个振子时的能量为 $B_N$ ,则

$$\gamma_N=-\frac{1}{2N}\ln\left|\frac{B_N}{B_1}\right|$$

(5)

式中 $\gamma_N$ 称为局域化因子,它反映了非周期无序系统相邻单元对输入能量的平均指数衰减率。针对 $N\rightarrow\infty$ 情形,文献[23-25]给出了局域化因子的近似表达式

$$\gamma=\lim_{N\rightarrow\infty}\gamma_N\approx\frac{1}{2}\frac{\sigma^2(\omega_i^2)}{4V^2-(\omega^2-\omega_0^2-2V)^2}$$

(6)

式中 $\omega_i=\sqrt{k_i/m}$ 是各独立解耦弹簧振子的固有频率。对于非周期无序系统, $\omega_i^2$ 服从均匀概率分布,概率密度函数为

$$\rho(\omega_i^2)=\begin{cases}\frac{1}{D}, & \omega_i^2\in\left[\omega_0^2-\frac{D}{2},\omega_0^2+\frac{D}{2}\right] \\ 0, & \text{others}\end{cases}$$

(7)

式中 $D$ 为 $\omega_i^2$ 的散布范围, $\sigma^2(\omega_i^2)=D^2/12$ 是 $\omega_i^2$ 的标准方差。式(6)说明,无序局域化因子同耦合系数 $V$ , $\omega_0^2$ 及 $\sigma^2(\omega_i^2)$ (或 $D$ )相关。

2

加筋圆柱壳模型与耦合振子链模型的参数等效

本节将针对不等间距加筋圆柱壳的径向振动进行局域化因子预报,给出利用耦合振子链局域化因子公式(6)预报加筋圆柱壳局域化因子的方法,为此,需要给出加筋圆柱壳同耦合振子链等效的参数 $V$ , $\omega_0^2$ 及 $\sigma^2(\omega_i^2)$ 。

2.1

加筋圆柱壳模型

加筋圆柱壳模型如图2所示。圆柱壳主尺度、板厚、环向加强筋及后续预报中使用的材料参数如表1所示。

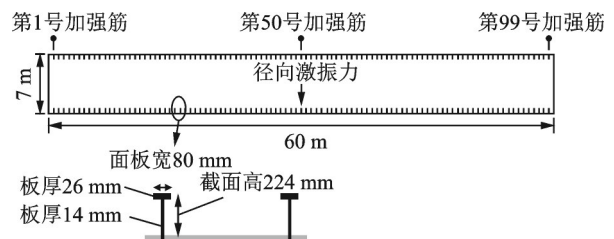


图2 加筋圆柱壳模型

Fig. 2 Framed cylindrical shell model

表 1 加筋圆柱壳尺寸及材料参数

Tab. 1 Dimension and material parameters of the framed cylindrical model

| 参数及材料名称                    | 量值                    |
|----------------------------|-----------------------|
| 圆柱壳总长/m                    | 60                    |
| 圆柱壳直径/m                    | 7                     |
| 圆柱壳板厚/m                    | 0.03                  |
| 环向加强筋数量/个                  | 99                    |
| 平均加筋间距/m                   | 0.6                   |
| 环向加强筋截面形式                  | T 截面梁                 |
| 环向加强筋截面总高/m                | 0.224                 |
| 环向加强筋面板宽/m                 | 0.08                  |
| 环向加强筋面板厚/m                 | 0.026                 |
| 环向加强筋腹板厚/m                 | 0.014                 |
| 壳体及加强筋材料                   | 钢材                    |
| 钢材密度/(kg·m <sup>-3</sup> ) | 7.8×10 <sup>3</sup>   |
| 钢材弹性模量/Pa                  | 2.05×10 <sup>11</sup> |
| 钢材泊松比                      | 0.3                   |

对等间距加筋圆柱壳,加强筋沿壳体轴向等间距布置,相邻加强筋间距 $a$ 为常数,记作 $\bar{a}$ , $\bar{a}=0.6$  m。对不等间距加筋圆柱壳,加强筋总数不变,但每个加强筋的轴向位置将受不规则扰动而布置,扰动量服从均匀概率分布,第 $r$ 个加强筋轴向具体位置 $x_r$ 满足概率密度函数

$$P(x_r)=\begin{cases}\frac{1}{\Delta x}, & |x_r-r\bar{a}|<\frac{\Delta x}{2} \\ 0, & \text{others}\end{cases}$$

(8)

式中 $P(x_r)$ 是随机变量 $x_r$ 的概率密度函数, $\Delta x$ 为输入参数,反映了加强筋受不规则扰动的程度。由于每个加强筋位置 $x_r$ 是随机变量,因此相邻加强筋间距 $a=x_{r+1}-x_r$ 也是随机变量,文献[22]证明,随机变量 $a$ 的均值仍为 $\bar{a}$ ,标准方差为 $\sigma^2(a)=(\Delta x)^2/6$ 。

为开展等间距和不等间距加筋圆柱壳振动局域化分析,都需对模型激振。后续有限元计算中,激振力以径向、简谐点力方式在圆柱壳中部(第50号加强筋处)激振,圆柱壳自由悬浮,如图2所示。通过变换不同的激振频率参数,可以获得不同激振频率的结果。

2.2

等间距加筋圆柱壳模型振动参数的等效

首先针对等间距加筋圆柱壳模型进行激振频率响应有限元分析,可获得圆柱壳的径向振动速度场,记作 $v(\phi,x,f)$ ,为圆柱壳轴向位置 $x$ 、周向位置 $\phi$ 和频率 $f$ 的函数。

径向速度场将用于波数分析。波数分析技术的基本思路是<sup>[2-3]</sup>:对每一频率 $f=\omega/(2\pi)$ ,将圆柱壳的径向振动场分解为系列行进波叠加,用公式表示为

$$v(\phi, x, f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} [V^{\cos}(n, k_x, f) \cos n\phi + V^{\sin}(n, k_x, f) \sin n\phi] e^{jk_x x} dk_x \right\} \quad (9)$$

式中  $V^{\cos}$  和  $V^{\sin}$  给出了各行进波分量的复数幅值, 每一分量的频率、轴向波数、周向模式和对称模式由  $f, k_x, n$  和上标“cos”、“sin”表示。  $V^{\cos}$  和  $V^{\sin}$  具体计算为

$$\begin{aligned} A(\phi, k_x, f) &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} v(\phi, x, f) e^{-jk_x x} dx, \\ V^{\cos}(n, k_x, f) &= \frac{1}{\delta \times \pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(\phi, k_x, f) \cos n\phi d\phi, \\ V^{\sin}(n, k_x, f) &= \frac{1}{\delta \times \pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(\phi, k_x, f) \sin n\phi d\phi, \\ \delta &= \begin{cases} 2, & n=0 \\ 1, & n=1, 2, \dots \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

式中  $L$  是圆柱壳轴向长度。

记  $W(n, k_x, f)$  为

$$W(n, k_x, f) = |V^{\cos}|^2 + |V^{\sin}|^2 \quad (11)$$

则  $W(n, k_x, f)$  为频率  $f$  下, 有截面周向模式  $n$  和轴向波数  $k_x$  的行进波分量所具有的振动能量。若将  $W(n, k_x, f)$  对  $k_x$  积分

$$E_n(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(n, k_x, f) dk_x \quad (12)$$

则  $E_n(f)$  给出了给定频率  $f$  下圆柱壳截面以周向模式  $n$  振动的总能量。此外, 还可给出“给定周向振动模式  $n$  下的截面振动能量沿轴向的分布”, 表达式为

$$\begin{aligned} E_x^n(x, f) &= \frac{1}{2\pi} \left[ \left| \int_0^L V^{\cos}(n, k_x, f) e^{jk_x x} dx \right|^2 + \right. \\ &\quad \left. \left| \int_0^L V^{\sin}(n, k_x, f) e^{jk_x x} dx \right|^2 \right] \end{aligned} \quad (13)$$

利用  $W(n, k_x, f)$  可针对各离散的  $n$  绘制“行进波分量振动能量-轴向波数-频率”色谱图(即  $W_n-k_x-f$  色谱图), 利用该色谱图可给出等间距加筋圆柱壳的色散曲线, 反映截面以  $n$  模式振动时, 振动能量沿轴向传播的频率特性。

图3是针对  $n=5$  时给出的  $W_n-k_x-f$  色谱图, 图中具有因振动能量较大而呈现的“亮色曲线”, 这些曲线即为圆柱壳截面以  $n=5$  模式振动时, 振动能量沿轴向传播的色散曲线。“亮色曲线”来源于共振, 与壳体模态和自然频率相关。文献[9]表明, 当有限媒质中的自由行进波在边界反射并满足协调条件时, 将会形成模态和自然频率现象, 由于自由行进波的传播必需满足色散关系, 因此, 图3中的“亮色曲线”对应于色散曲线。对加筋圆柱壳, 只有在通频带才具有自由行进波, 所以由“亮色曲线”反映的色散曲线给出了通频带范围。

通常对给定周向模式, 色散曲线不止一根, 说明

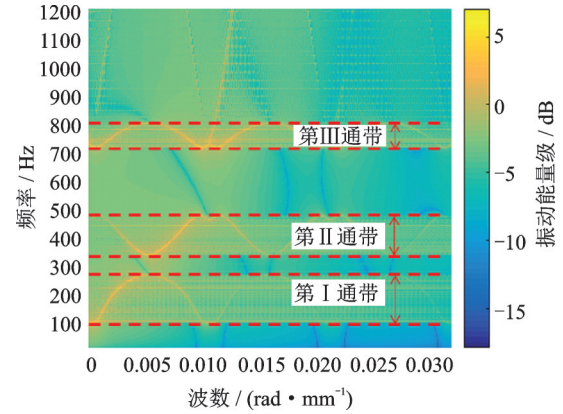


图3 用于获取色散线的  $W_n-k_x-f$  色谱图 ( $n=5$ )

Fig. 3  $W_n-k_x-f$  contour map used for acquiring dispense curve ( $n=5$ )

圆柱壳具有多个通频带, 它来源于相邻加强筋之间壳体的不同轴向振动模式, 如图3所示, 这类似于周期多跨梁中的波传递特性<sup>[26]</sup>。

利用色散曲线可获得加筋圆柱壳的等效耦合振子链振动参数: 将加筋圆柱壳的某一根色散曲线视作等效耦合振子链的色散曲线, 利用式(2)可辨识给出等效的  $V$  和  $\omega_0^2$  参数。对某一具体通频带, 若其上、下限频率为  $\omega_+ = 2\pi f_+$  和  $\omega_- = 2\pi f_-$ , 则相应的等效参数为:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{\omega_+ + \omega_-}{2}, \\ V &= \frac{\omega_+^2 - \omega_-^2}{4} = \\ &= \frac{(\omega_+ - \omega_-)(\omega_+ + \omega_-)}{4} = \frac{\omega_0 \Delta\omega}{2} \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{f_+ + f_-}{2}, \\ V &= (f_+^2 - f_-^2)\pi^2 = 2\pi^2 f_0 \Delta f \end{aligned} \quad (14)$$

式中  $\Delta\omega = \omega_+ - \omega_-$  (或  $\Delta f = f_+ - f_-$ ) 为通频带的带宽。该做法称之为单通带假定<sup>[22]</sup>, 其本质是将加筋圆柱壳在不同通频带的振动分别等效为耦合振子链的振动, 加筋圆柱壳的通频带中心频率即为解耦弹簧振子的固有频率, 等效耦合度与通频带带宽和通频带中心频率相关。

为保证参数等效的操作精度, 还将给出“圆柱壳截面以周向模式  $n$  振动的总能量随频率的变化”曲线(即  $E_n-f$  曲线)。图4给出了当  $n=5$  时的  $E_n-f$  曲线, 从该曲线可更清晰地判断通频带的中心频率和通频带带宽。

### 2.3 不等间距加筋圆柱壳模型振动参数等效与局域化因子预报

当圆柱壳加强筋轴向位置受不规则扰动布置

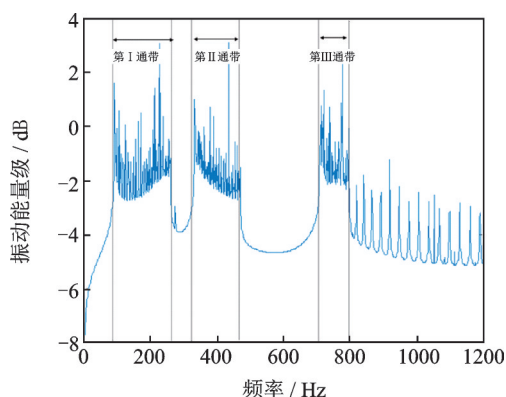


图4  $E_n$ - $f$ 曲线用于提高参数辨识精度 ( $n=5$ )

Fig.4  $E_n$ - $f$  curve used to improve the parameter identification ( $n=5$ )

时,不等间距加筋圆柱壳成为非周期无序系统。后续将结合圆柱壳弯曲波动理论进一步获得等效耦合振子链模型的  $\sigma^2(\omega_i^2)$ ,进而利用式(6)预报给定周向模式下的轴向传播波局域化因子。

将相邻加强筋间的部分等效为弹簧振子单元,对本文所选取参数的圆柱壳模型,可以合理假定解耦单元的固有频率是加强筋间距的单值函数

$$\omega_i = \omega_i(a), \text{ 且 } \omega_0 = \omega_i(\bar{a}) \quad (15)$$

那么标准方差  $\sigma^2(\omega_i^2)$  为

$$\begin{aligned} \sigma^2(\omega_i^2) &= \int P(\omega_i^2)(\omega_0^2 - \omega_i^2)^2 d\omega_i^2 = \\ &= \int P(a)[\omega_0^2 - \omega_i^2(a)]^2 da \approx \\ &= \int P(a) \left[ 2\omega_i \frac{d\omega_i}{da} (a - \bar{a}) \right]^2 da \approx \\ &= (2\omega_0 \frac{d\omega_0}{da})^2 \frac{\Delta x^2}{6} \end{aligned} \quad (16)$$

其中,最后两个“ $\approx$ ”利用了  $\omega_i(a)$  和  $\omega_i^2(a)$  在平均间距  $\bar{a}$  处的泰勒展开近似。

为求  $d\omega_0/da$ , 首先利用链式求导法给出

$$\frac{d\omega_0}{da} = \frac{d\omega_0}{dk_x} \frac{dk_x}{da} \quad (17)$$

为求  $dk_x/da$ , 假定在特定的通频带内,轴向波在一个加强筋间距  $a$  内传播的相位变化为常数  $C$ , 即  $k_x a = C$ , 则

$$a \cdot dk_x + k_x \cdot da = 0 \text{ 或 } \frac{dk_x}{da} = -\frac{k_x}{a} \quad (18)$$

$d\omega_0/dk_x$  是圆柱壳中沿轴向的群速度分量  $c_{gx}$ , 它与圆柱壳中螺旋波群速度  $c_{gh}$  的关系为<sup>[9]</sup>:  $c_{gx} = c_{gh} \cos\theta$ ,  $\theta$  是螺旋波与轴向的夹角(螺旋角); 圆柱壳螺旋波群速度与相速度的关系为<sup>[9]</sup>:  $c_{gh} = 2c_{ph} = 2\omega_0/k_h$ ,  $c_{ph}$  是圆柱壳螺旋波相速度,  $k_h$  为圆柱壳螺旋波弯曲波数,  $k_h$  与轴向波数  $k_x$  的关系为<sup>[9]</sup>:  $k_x = k_h \cos\theta$ ; 以上关系可以给出

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_0}{dk_x} &= c_{gx} = c_{gh} \cos\theta = 2c_{ph} \cos\theta = \\ &= 2 \frac{\omega_0}{k_h} \cos\theta = \frac{2\omega_0 \cos^2\theta}{k_x} \end{aligned} \quad (19)$$

由此

$$\frac{d\omega_0}{da} = \frac{d\omega_0}{dk_x} \frac{dk_x}{da} = \frac{2\cos^2\theta}{a} \quad (20)$$

因而取0阶近似有

$$\sigma^2(\omega_i^2) \approx \frac{8}{3} \omega_0^4 \cos^4\theta \left( \frac{\Delta x}{\bar{a}} \right)^2 \quad (21)$$

以上各式中,  $\cos\theta$  可利用圆柱壳中周向波数  $(n\pi)/(k_h R)$ 、轴向波数  $k_x$  和螺旋波数  $k_h$  的关系计算为<sup>[9]</sup>

$$\cos\theta = \frac{k_x}{k_h} = \left[ 1 - \left( \frac{n}{k_h R} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (22)$$

式中  $n$  为周向模式,  $R$  为圆柱壳半径。当圆柱壳相对厚度较薄时,可忽略曲度效应,  $k_h$  可利用平板色散关系近似给出<sup>[9]</sup>

$$k_h = \left\{ \frac{\rho h \omega_0^2}{E h^3 / [12(1-\nu^2)]} \right\}^{\frac{1}{4}} \quad (23)$$

式中  $\rho$  为圆柱壳材料密度,  $E$  为弹性模量,  $\nu$  为泊松比,  $h$  为圆柱壳板厚度。

在获得  $\sigma^2(\omega_i^2)$  后,局域化因子可由式(6)给出为

$$\begin{aligned} \gamma(\omega) &\approx \frac{4}{3} \frac{\omega_0^4}{\omega_0^2 \Delta\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2 - \omega_0 \Delta\omega)^2} \times \\ &\quad \left( \frac{\Delta x}{\bar{a}} \right)^2 \cos^4\theta \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} \gamma(f) &\approx \frac{4}{3} \frac{f_0^4}{f_0^2 \Delta f^2 + (f^2 - f_0^2 - f_0 \Delta f)^2} \times \\ &\quad \left( \frac{\Delta x}{\bar{a}} \right)^2 \cos^4\theta \end{aligned} \quad (24)$$

可见,局域化因子与通频带中心频率  $\omega_0$  (或  $f_0$ )、通频带带宽  $\Delta\omega$  (或  $\Delta f$ )、加强筋布置的不规则程度  $\Delta x/\bar{a}$  和激振频率  $\omega$  (或  $f$ ) 等参数相关。它是通过统计理论给出的结果,反映了具有相同统计参数的、大量不等间距加强筋圆柱壳模型的平均衰减规律,给出了用于局域化振动控制的圆柱壳加筋布置设计方向。

### 3 不等间距加筋圆柱壳的局域化因子预报结果与规律分析

为了定量给出局域化因子,针对以图1模型为基础生成的、具有不同加强筋布置参数的不等间距加筋圆柱壳进行了局域化因子预报。

首先针对等间距加筋圆柱壳模型进行参数等效。为获取波数频率谱,以1 Hz为步长,针对2~1200 Hz进行了等间距加筋圆柱壳的激振频率响应有限元分析,然后进行波数分析,分别针对 $n=0, 1, \dots, 30$ 阶周向模式给出 $W_n-k_x-f$ 色谱图和 $E_n-f$ 曲线,

用于识别色散曲线,进而利用式(14)获得各通频带等效参数 $\omega_0^2$ 和 $V$ 。图5和6分别给出了典型周向模式下的 $W_n-k_x-f$ 色谱图和与之对应的 $E_n-f$ 曲线。由图可见,当 $n$ 较大时,不同通带的区分度更为鲜明,这是由于 $n$ 较大的振动具有更高的模态聚集度。

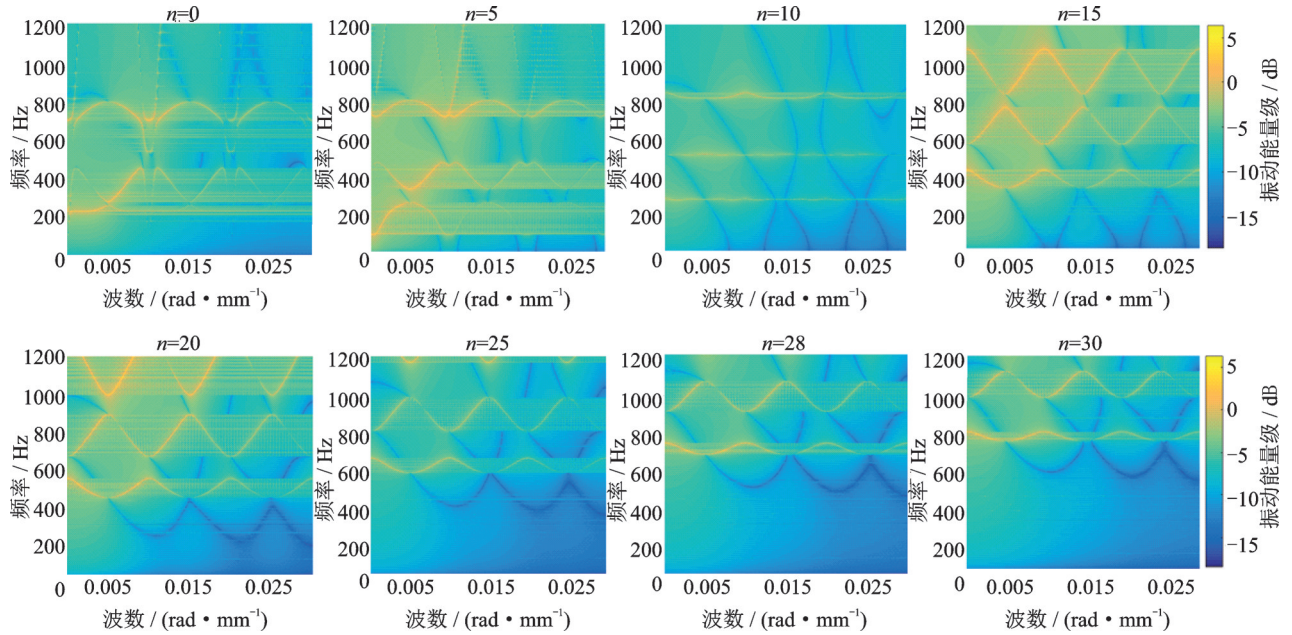


图5 典型周向模式下的 $W_n-k_x-f$ 色谱图

Fig. 5  $W_n-k_x-f$  contour maps of some typical circumferential modes

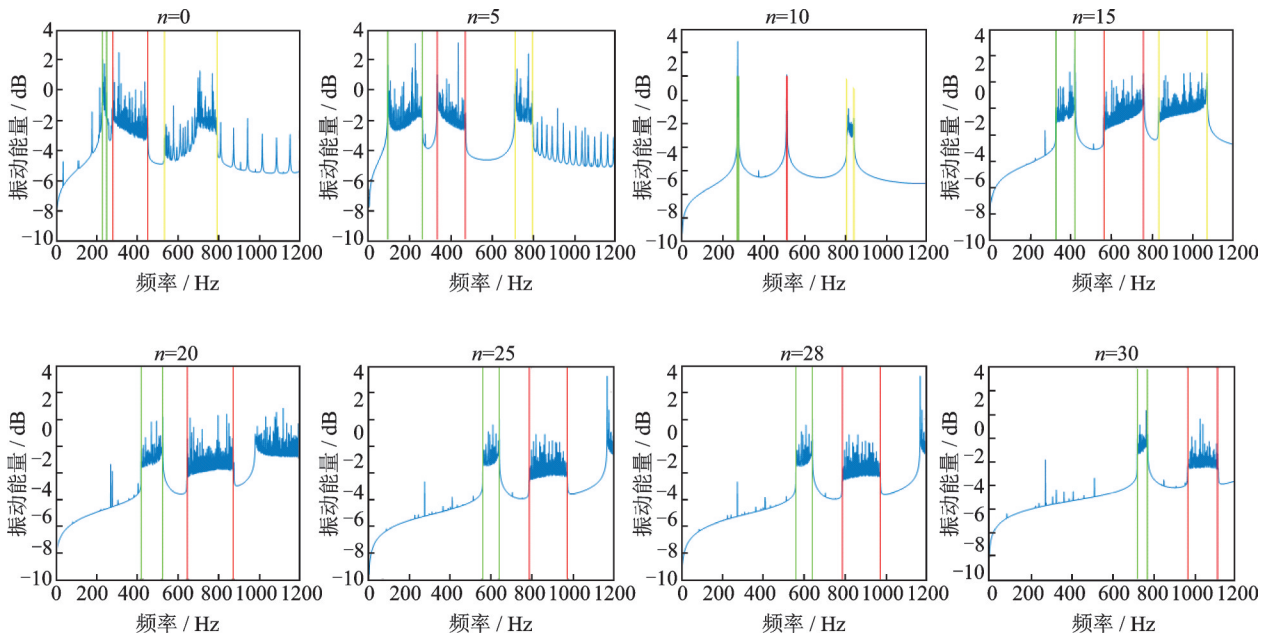


图6 典型周向模式下的 $E_n-f$ 曲线

Fig. 6  $E_n-f$  curves of some typical circumferential modes

在获得各通频带等效参数 $V$ 和 $\omega_0^2$ (或 $f_0^2$ )后,分别以给定的加强筋布置不规则程度参数 $\Delta x/\bar{a}$ 为输入,利用式(24)进行局域化因子预报。图7给出了 $n=20$ 时, $\Delta x/\bar{a}=20\%$ 的局域化因子在第I, II通频带随频率变化的曲线,利用该图可直接由周向模式 $n$ 和频率 $f$ 读取对应的局域化因子值。由图可

见,在特定的通频带,局域化因子随频率变化不大;在不同通频带,局域化因子数值不同,更高频率的通频带局域化因子具有更大值,即圆柱壳给定模式的截面振动沿轴向衰减更快,局域化效应更显著。

图8给出了当 $n=20$ 时,在第I, II通频带中, $\Delta x/\bar{a}$ 对局域化因子的影响规律:局域化因子由它在

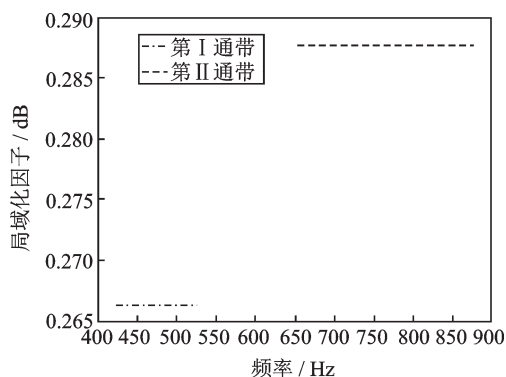


图7 局域化因子随频率的变化曲线( $n=20$ ,  $\Delta x/\bar{a}=20\%$ )

Fig. 7 Localization factor curve as a function of frequency ( $n=20$ ,  $\Delta x/\bar{a}=20\%$ )

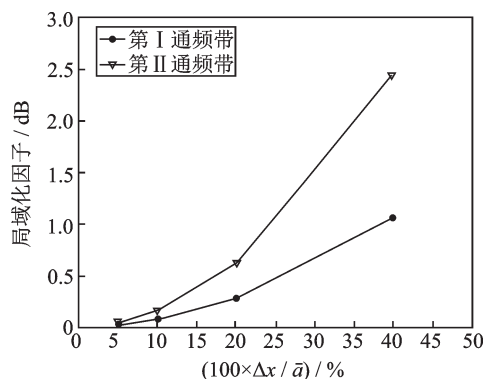


图8 第I和第II通频带平均局域化因子随 $\Delta x/\bar{a}$ 的变化曲线( $n=20$ )

Fig. 8 The curves of averaged localization factor in pass band I and II versus  $\Delta x/\bar{a}$  ( $n=20$ )

各通频带的平均值给出,图中以曲线的形式给出了 $\Delta x/\bar{a}=5\%$ ,  $10\%$ ,  $20\%$ ,  $40\%$ 的“通频带平均局域化因子”。由图可见,无论在哪个通频带, $\Delta x/\bar{a}$ 越大将导致“通频带平均局域化因子”越大。

图9给出了“通频带平均局域化因子”随周向模

式 $n$ 的变化规律。图中以散点的形式给出了当 $\Delta x/\bar{a}=10\%$ 时、各周向模式下的通频带平均局域化因子。对给定的周向模式 $n$ ,可能会存在多个通频带,因此会具有多个不同的“通频带平均局域化因子”。文献[20,22]曾得出结论:高阶周向振动模式容易产生更为显著的局域化效应,该结论可从图9的结果得以验证:随着周向模式 $n$ 的增加,通频带平均局域化因子通常更大。该结论结合公式(6)可以间接说明,圆柱加筋单元之间的相对耦合强度是随周向模式 $n$ 的增加而降低的。

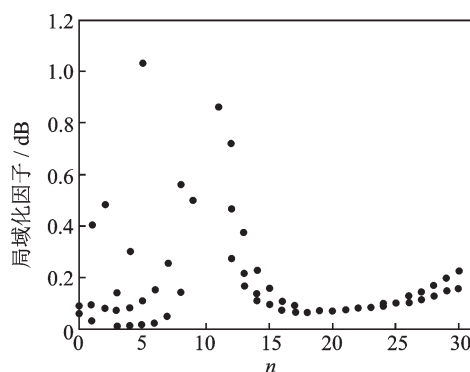


图9 通频带平均局域化因子随周向模式 $n$ 的变化 ( $\Delta x/\bar{a}=10\%$ )

Fig. 9 The localization factors averaged in pass band versus circumferential mode  $n$  ( $\Delta x/\bar{a}=10\%$ )

#### 4 不等间距加筋圆柱壳的局域化效果验证

为验证不等间距加筋布置带来的振动局域化效果,以不同的 $\Delta x/\bar{a}$ 为参数建立了不等间距加筋圆柱壳模型实例,对之进行了振动分析,并与等间距加筋圆柱壳模型的结果进行了对比。 $\Delta x/\bar{a}$ 参数分别为5%,

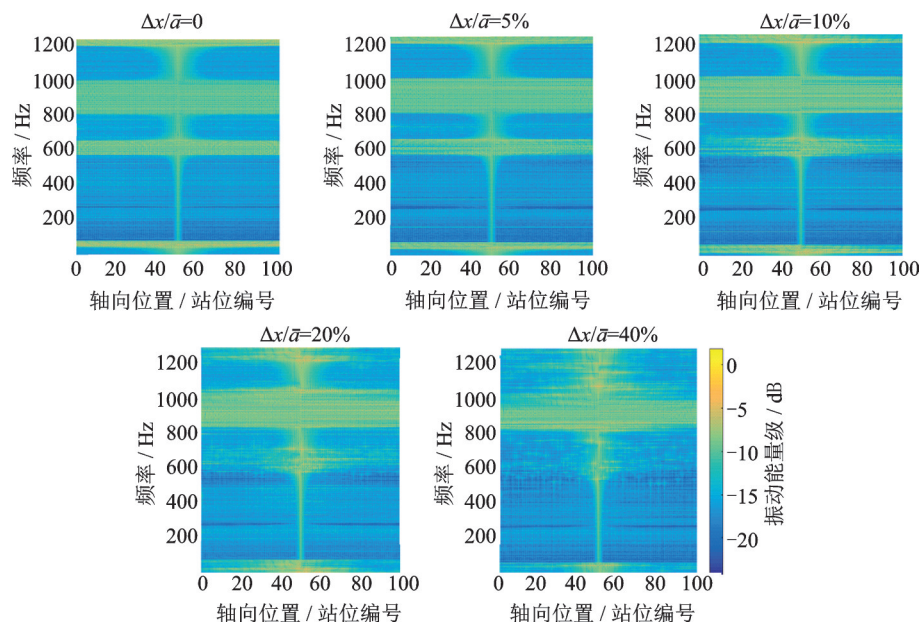
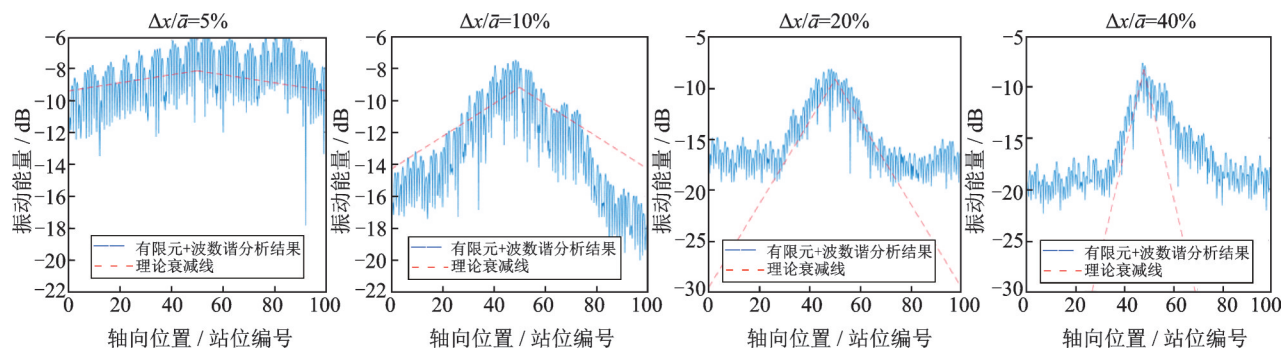


图10  $E_n^x f x$  色谱图( $n=25$ )

Fig. 10 Contour map of  $E_n^x f x$  ( $n=25$ )

图11 振动能量轴向分布曲线同理论衰减线的比较( $n=25, f=590\text{ Hz}$ )Fig. 11 Comparisons of axial distributions of vibration energy acquired by numerical and theoretical results( $n=25, f=590\text{ Hz}$ )

10%, 20% 和 40%, 具体实例的加强筋位置可在等间距模型的基础上利用基于式(8)的随机函数程序给出。

图10给出了当周向模式  $n=25$  时, 等间距与不等间距模型的  $E_x-f$  色散图。由图可见, 在激振源截面处(第50号加强筋位置处)的振动能量最大。对等间距模型(即  $\Delta x/\bar{a}=0$ ), 当激振频率在通频带时, 振动能量可传递至整个壳体, 从而在云图中形成“亮带”, 亮带的宽度即为通频带带宽。对不等间距模型, 不等间距加强筋布置导致了通频带局域化特征, 该特征随着  $\Delta x/\bar{a}$  值的增大而表现更为显著。图11对比了周向振动模式  $n=25$ 、激振频率为 590 Hz 时的振动能量轴向分布曲线和理论衰减线。由图可见, 理论衰减线是倾斜直线, 斜率即为局域化因子值。采用有限元模型给出的振动能量轴向分布曲线具有空间震荡特征, 但理论衰减线依然能很好地描述振动能量沿轴向的衰减规律。

## 5 结 论

本文以加筋圆柱壳为研究对象, 给出了预报不等间距加筋圆柱壳振动局域化因子的方法, 开展了不等间距加筋圆柱壳的局域化因子规律研究, 验证了预报方法的正确性。具体结论如下:

1. 采用有限元分析结合波数分解技术获得等间距加筋圆柱壳振动的色散曲线, 采用参数等效手段将加筋圆柱壳的振动参数等效为耦合振子链的振动参数, 基于圆柱壳弯曲波动理论和统计理论给出不等间距加筋圆柱壳的无序度参数, 进而利用耦合振子链模型的局域化因子公式预报给出不等间距加筋圆柱壳的振动局域化因子。该方法有效规避了对加筋圆柱壳模型进行复杂的解析分析, 实现了对加筋圆柱壳开展无序局域化定量分析的工程化应用。

2. 对不等间距加筋圆柱壳局域化因子的预报结果分析表明: 无序局域化因子的数值在特定的通频带内随频率变化不大, 近似为常数; 不同通频带的局域化因子数值不同, 更高频率的通频带所对应的局

域化因子具有更大值; 局域化因子同加强筋布置的不规则程度相关, 越不规则将导致“通频带平均局域化因子”越大; 周向模式阶数越高, 将导致局域化因子越大。

3. 通过不等间距加强筋圆柱壳的实例分析证实了“采用不等间距加强筋设计来实现加筋圆柱壳振动局域化”的可行性, 验证了本文所采取的局域化预报方法和所得规则的正确性。

## 参考文献:

- [1] 陈美霞, 张 聪, 邓乃旗, 等. 波传播法求解低频激励下水中加端板圆柱壳的振动[J]. 振动工程学报, 2014, 27(6): 842-851.  
Chen Mei-xia, Zhang Cong, Deng Nai-qi, et al. Analysis of the low frequency vibration of a submerged cylindrical shell with end plates based on wave propagation approach[J]. Journal of Vibration Engineering, 2014, 27(6): 842-851.
- [2] 谭 路, 纪 刚, 周其斗, 等. 结构等间距布置对圆柱壳结构振动性能的影响[J]. 振动工程学报, 2017, 30(4): 603-609.  
Tan Lu, Ji Gang, Zhou Qidou, et al. Influence of periodic arrangement of structures on structural vibration characteristics of cylindrical shell[J]. Journal of Vibration Engineering, 2017, 30(4): 603-609.
- [3] 谭 路, 纪 刚, 张纬康, 等. 采用波数域方法分析细长柱壳的振动与声辐射特性[J]. 海军工程大学学报, 2013, 25(3): 66-71.  
Tan Lu, Ji Gang, Zhang Wei-kang, et al. Sender cylindrical vibration and radiation by use of wave-number domain approach[J]. Journal of Naval University of Engineering, 2013, 25(3): 66-71.
- [4] Laulagnet B, Guyader J L. Sound radiation by finite cylindrical ring stiffened shells[J]. Journal of Sound and Vibration, 1990, 138(2): 173-191.
- [5] Skelton E A, James J H. Theoretical Acoustics of Underwater Structures[M]. London: Imperial College Press, 1997.
- [6] Mead D J. Wave propagation and natural modes in peri-

- odic systems: I. Mono-coupled systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 1975, 40(1): 1-18.
- [7] Mead D J. Wave propagation and natural modes in periodic systems: II. Multi-coupled systems, with and without damping[J]. Journal of Sound and Vibration, 1975, 40(1): 19-39.
- [8] Mead D J. A new method of analyzing wave propagation in periodic structures: Applications to periodic Timoshenko beams and stiffened plates[J]. Journal of Sound and Vibration, 1986, 104(1): 9-27.
- [9] Fahy F, Gardonio P. Sound and Structural Vibration: Radiation, Transmission and Response[M]. UK: Elsevier, 2007.
- [10] Hodges C H, Woodhouse J. Confinement of vibration by structural irregularity[J]. Journal of Sound and Vibration, 1982, 82(3): 411-424.
- [11] Anderson P W. Absence of diffusion in certain random lattices[J]. Physical Review, 1958, 109(5): 1492-1505.
- [12] Hodges C H, Woodhouse J. Vibration isolation from irregularity in a nearly periodic structure: Theory and measurements[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1983, 74(3): 894-905.
- [13] Hodges C H, Woodhouse J. Confinement of vibration by one-dimensional disorder, I: Theory of ensemble averaging[J]. Journal of Sound and Vibration, 1989, 130(2): 237-251.
- [14] Hodges C H, Woodhouse J. Confinement of vibration by one-dimensional disorder, II: A numerical experiment on different ensemble averages[J]. Journal of Sound and Vibration, 1989, 130(2): 253-268.
- [15] Pierre C, Dowell E H. Localization of vibrations by structural irregularity[J]. Journal of Sound and Vibration, 1987, 114(3): 549-564.
- [16] Pierre C. Mode localization and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures[J]. Journal of Sound and Vibration, 1988, 126(3): 485-502.
- [17] Pierre C, Chaf P D. Strong mode localization in nearly periodic disordered structures[J]. AIAA Journal, 1989, 27(2): 227-241.
- [18] Bouzit D, Pierre C. Vibration confinement phenomena in disordered, mono-coupled, multi-span beams[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 1992, 114(4): 521-530.
- [19] Photiadis D M. Anderson localization of one-dimensional wave propagation on a fluid-loaded plate[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1992, 91(2): 771-780.
- [20] Photiadis D M. Localization of helical flexural waves by irregularity[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1994, 96(4): 2291-2301.
- [21] Bouzit D, Pierre C. An experimental investigation of vibration localization in disordered multi-span beams[J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 187(4): 649-669.
- [22] Photiadis D M, Houston B H. Anderson localization of vibration on a framed cylindrical shell[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1999, 106(3): 1377-1391.
- [23] Kissel G J. Localization in disordered periodic structures[D]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 1988.
- [24] Furstenberg H. Noncommuting random products[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1963, 108(3): 377-428.
- [25] Herbert D C, Jones R. Localized states in disordered systems[J]. Journal of Physics C: Solid State Physics, 1971, 4: 1145-1161.
- [26] Bansal A S. Free waves in periodically disordered systems: Natural and bounding frequencies of unsymmetric systems and normal mode localization[J]. Journal of Sound and Vibration, 1997, 207(3): 365-382.

## Localization of vibration on a disordered framed cylindrical shell

Ji Gang, LI Zong-wei, ZHOU Qi-dou

(Department of Naval Architecture Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China)

**Abstract:** It has been observed that vibration energy of disordered reinforced cylindrical shells will be confined to the source in the pass bands. Disordered stiffeners are one of the measures to control the vibration of cylindrical shells. An investigation on localization of a disordered reinforced cylindrical shell will be presented. The vibration of the reinforced cylindrical shell is analogized to that of coupled oscillator chain system. The localization factors of the reinforced cylindrical shell are predicted using formula derived for a coupled oscillator chain system. Vibration parameters of equivalent oscillator chains can be acquired by the disperse curves, which can be identified by wave number analysis based on finite element analysis. Disordering parameter of the reinforced cylindrical shell can be acquired using the theory on flexural wave in cylindrical shells and theory of statistics. On the basis of the disordered localization factor of stiffened cylindrical shells with unequal spacing, the regularity of the disordered localization factor is studied. Numerical results on some disordered reinforced cylindrical shells are presented, and are used to verify both the feasibility of vibration control by disordered stiffeners and the method on predicting the localization factors in the paper.

**Key words:** structural vibration; vibration attenuation; framed cylindrical shell; disordered structures; localization

**作者简介:** 纪 刚(1975-),男,副研究员。电话:(027)65461152; E-mail: 909092586@qq.com