改进傅里叶级数法求解封口锥柱球组合壳的自由振动

张 帅[1,3], 李天匀[1,2,3], 朱 翔[1,2,3], 陈 旭[1,3]

(1.华中科技大学船舶与海洋工程学院, 湖北 武汉 430074; 2.高新船舶与深海开发装备协同创新中心, 上海 200240; 3.船舶与海洋水动力湖北省重点实验室, 湖北 武汉 430074)

摘要: 提出了一种改进傅里叶级数的半解析方法分析封口锥柱球组合壳的自由振动特性。基于能量泛函,结合经典薄板理论和Love壳体理论,建立了组合结构的理论模型,研究了不同柱壳长度,不同锥球半角以及不同厚度端板下锥柱球组合壳的固有频率。该方法下的各子壳结构位移由标准的傅里叶级数和辅助收敛函数组成,既克服了传统傅里叶级数在子壳结构交接处的不连续性,又提高了计算的收敛精度和速度。研究表明:该方法收敛性较好,所得理论计算结果与有限元结果比较一致。通过分析固有频率,发现改变长度,半角,端板厚度均会对锥柱球组合壳的自由振动产生较明显的影响。

关键词: 结构振动; 锥-柱-球组合壳; 圆端板; Love壳体理论; 傅里叶里兹法

中图分类号: O327; U661.44 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2021)03-0601-09

DOI:10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2021.03.018

引 言

在船舶建造、航空航天、土木桥梁等多种工程的设计中,带圆端板的锥-柱-球组合壳结构十分常见。一般而言,在实际应用时,通常会在设计阶段对组合壳结构进行必要的振动研究,否则这些组合壳体可能会因受到动态载荷的作用,产生过大的噪声、振动甚至出现疲劳损伤。

多年来,国内外众多学者开展了大量有关板壳振动的研究,并取得了丰硕的研究成果。Donnell, Reissner, Flügge, Love和Timoshenko等基于不同的简化模型、假设条件以及近似结果,发展并充实了各种板壳理论。这些工作已经由Leissa[1-2]和Qatu[3]进行了较为系统全面的总结。近年来,一些新的方法被应用在分析板壳振动特性的问题上。但应该指出的是,大多数文献集中于基本的单板、单壳结构的研究,如圆板、环扇形板、矩形开口板、圆柱壳、圆锥壳和球壳,而很少分析组合壳的振动特性。Irie等[4-5]采用传递矩阵法研究了圆板,环板以及锥-柱组合壳的振动特性。Li[6]在薄板边界上添加一组线簧和卷簧分别模拟四条边界的剪应力和弯矩,把所有位移函数表示为一个双重傅里叶级数与多个辅助函数的和,然后代入控制微分方程,求得薄板弯曲振动的半解析解。Bauer等[7]利用解析的幂级数方法分析了固支,简支,自由和混合边界条件下圆板的振动问题。Bashmal等[8]求解了四种典型边界圆(环)板的面内自由振动问题,采用Rayleigh-Ritz法获得了自由振动固有频率和相应的振型。史冬岩等[9]利用改进傅里叶级数方法,计算了任意边界条件下的环扇形板的面内振动特性。李天匀等[10]基于Rayleigh-Ritz法,选用切比雪夫级数为位移函数,求解得到了含任意形状内开口的矩形板自由振动的固有频率。Efraim和Eisenberger[11]通过幂级数解分析了分段轴对称壳体的自由振动特性,得到了较为精确的固有频率。Caresta和Kessissoglou[12]提出了一种经典的计算锥柱组合壳自由振动特性的方法。在此方法中,圆柱壳的运动方程用波传播法求解,圆锥壳的运动方程用幂级数近似求解。最后,利用锥柱交接处的连续性条件,求出组合壳结构的固有频率。Li等[13]采用半解析方法分析了均匀阶梯抛物面壳、圆柱壳和球壳的组合结构在任意边界条件下的自由振动特性。瞿叶高等[14]提出了一种改进的变分法来分析加环肋的锥-柱-锥组合壳在不同边界条件下的自由振动,理论模型结合了改进的变分法与最小二乘加权残差法,将组合壳结构划分为适当的壳段,并对壳段界面施加所有必要的连续性约束。计算结果与有限元对比,具有较高的一致性。邹明松

收稿日期: 2019-10-23; **修订日期:** 2020-04-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51839005,51879113,51579109);中央高校基本科研业务费资助项目(2019kfyX-MBZ048)

等[15]基于经典弹性板壳理论，提出了一种半解析方法研究了两端圆板封闭圆柱壳的自由振动。Xie等[16]通过波传播法研究了弹性边界条件下薄环形圆板与圆柱壳结构弹性耦合的自由振动和受迫振动特性。

迄今为止，前文提到的大部分文献都集中在单板、单壳，或者组合壳在经典边界或弹性边界下振动问题的研究，鲜有文献分析带端板的组合壳结构的振动特性。

本文的主要目的是建立带圆端板的锥柱球组合结构的振动分析理论模型，分析该模型的自由振动特性，讨论端板对组合壳振动的影响。其中，圆端板的能量方程由薄板理论构建，并考虑面内振动的影响；锥壳，柱壳，球壳的能量方程均由经典Love薄壳理论构建。在不考虑边界条件的情况下，各子结构的位移函数均由标准傅里叶级数和封闭形式的辅助收敛函数组成。引入辅助收敛函数不仅可以消除边界和子结构之间的所有潜在不连续点，而且可以保证和加快傅里叶级数展开的收敛。通过与有限元计算结果的比较，验证了本文方法的准确性和收敛性。同时，本文还分析了锥壳半顶角，球壳半开角及圆柱壳的长度对整体结构自由振动特性的影响。

1 理论推导

1.1 理论模型描述

本文研究的带圆端板的锥-柱-球结构可以看作是由两个薄圆板和锥、柱、球壳组合而成。其几何结构、圆板的坐标系(r, θ, z)和壳体的坐标系(x, θ, z)如图1所示，端板处位移的左视图和正视图以及球壳处位移的右视图分别如图2和3所示。假设圆锥壳、圆柱壳、球壳是由各向同性且匀质等厚的材料构成。圆锥壳、圆柱壳、球壳中面上的任一点的轴向、周向、法向位移分别是u_z，v_z，w_z，u_c，v_c，w_c，u_s，v_s，w_s。截顶圆锥壳小端截面的中面半径为R_1，锥半顶角为α，长度为L_z；圆柱壳的长度为L_c，R_2为圆锥壳大端、圆柱壳以及右端开口球壳截面的中面半径，φ_0为球壳的半开角，三者的厚度满足$h_z=h_c=h_s$，弹性模量为E，泊松比为μ，密度为ρ。假设两圆端板也是由各向同性且匀质等厚的材料构成，其端板中面上的任一点的径向、周向、横向位移分别是u_{bl}，v_{br}，w_{bl}，u_{br}，v_{br}，w_{br}，其半径、厚度、弹性模量、泊松比、密度分别为R_{bl}，R_{br}，h_{bl}，h_{br}，E_{bl}，E_{br}，μ_{bl}，μ_{br}，ρ_{bl}，ρ_{br}。

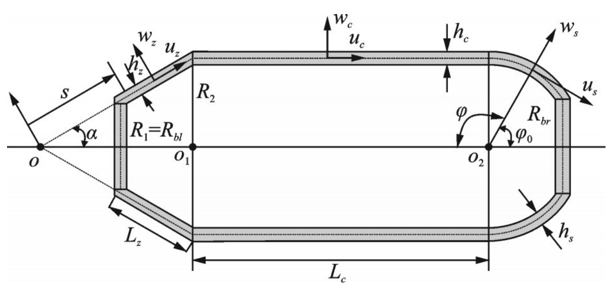

图1 带端板锥-柱-球的几何模型和坐标系示意图

Fig. 1 Schematic diagram of geometric model and coordinate system of the conical-cylindrical-spherical shells with both circular plates ends

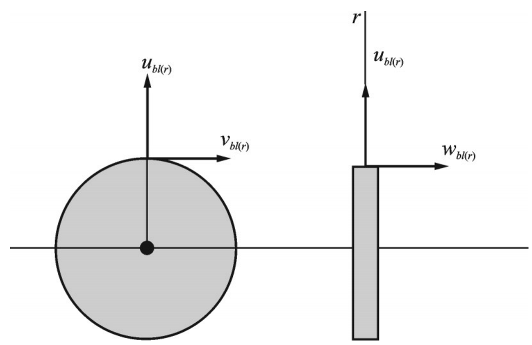

图2 两端板处位移的左视图和正视图

Fig. 2 Left and front views of the displacement of the both ends

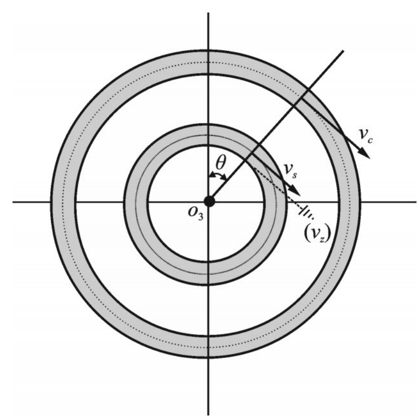

图3 球壳处位移的右视图

Fig. 3 Right view of the displacement of the spherical shell

1.2 结构能量方程

根据薄板理论[1]，可以得到极坐标系下薄圆板的弯曲变形能为

$$U_{Bi}=\frac{D_i}{2}\int_A\left\{\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial r_i^2}+\frac{1}{r_i}\frac{\partial w_i}{\partial r_i}+\frac{1}{r_i^2}\frac{\partial^2 w_i}{\partial \theta_i^2}\right)^2-2(1-\mu_i)\left\{\frac{\partial^2 w_i}{\partial r_i^2}\left(\frac{1}{r_i}\frac{\partial w_i}{\partial r_i}+\frac{1}{r_i^2}\frac{\partial^2 w_i}{\partial \theta_i^2}\right)-\left[\frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{1}{r_i}\frac{\partial w_i}{\partial \theta}\right)\right]^2\right\}\right\}\mathrm{d}A \quad (1)$$

考虑圆端板的面内振动，由面内振动产生的变形能为[9]

$$U_{Pi}=\frac{G_i}{2}\iint_A\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_i}\right)^2+2\mu_i\left(\frac{u_i}{r_i}\frac{\partial u_i}{\partial r_i}+\frac{1}{r_i}\frac{\partial v_i}{\partial\theta_i}\frac{\partial u_i}{\partial r_i}\right)+\left(\frac{u_i}{r_i}\right)^2+2\frac{u_i}{r_i^2}\frac{\partial v_i}{\partial\theta_i}+\frac{1}{r_i^2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial\theta_i}\right)^2+\frac{1}{2}(1-\mu_i)\left(\frac{1}{r_i}\frac{\partial u_i}{\partial\theta_i}+\frac{\partial v_i}{\partial r}-\frac{v_i}{r_i}\right)^2\right]\mathrm{d}A \tag{2}$$

薄圆板的总变形能

$$U_i=U_{Bi}+U_{Pi} \tag{3}$$

同理可得到极坐标系下薄板的动能为

$$T_i=\frac{1}{2}\rho_ih_i\iint_A\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w_i}{\partial t}\right)^2\right]r_i\mathrm{d}A \tag{4}$$

式(1)-(4)中　下标 $i(i=bl,br)$ 分别表示左端板,右端板;$\mathrm{d}A=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$;$\rho_i,\mu_i,h_i$ 分别表示圆板的密度,泊松比,厚度;u_i,v_i,w_i 分别表示圆板的径向、周向、横向的位移;$D_i=E_ih_i^3/[12(1-\mu_i^2)]$ 表示圆板的抗弯刚度,$G_i=E_ih_i/(1-\mu_i^2)$ 表示圆板的拉伸刚度,其中,E_i 为杨氏模量。

根据基尔霍夫假设和经典Love壳体理论,可以将圆锥壳、圆柱壳、球壳的中面线应变、切应变以及曲率改变量和扭率改变量用以下方程表示[2]:

$$\varepsilon_{\alpha i}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i}+\frac{v_i}{A_iB_i}\frac{\partial A_i}{\partial\beta_i}+\frac{w_i}{R_{\alpha i}} \tag{5}$$

$$\varepsilon_{\beta i}=\frac{u_i}{A_iB_i}\frac{\partial B_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{B_i}\frac{\partial v_i}{\partial\beta_i}+\frac{w_i}{R_{\beta i}} \tag{6}$$

$$\varepsilon_{\alpha i\beta i}=\frac{A_i}{B_i}\frac{\partial}{\partial\beta_i}\left(\frac{u_i}{A_i}\right)+\frac{B_i}{A_i}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(\frac{v_i}{B_i}\right) \tag{7}$$

$$k_{\alpha i}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(\frac{u_i}{R_{\alpha i}}-\frac{1}{A_i}\frac{\partial w_i}{\partial\alpha_i}\right)+\frac{1}{A_iB_i}\left(\frac{v_i}{R_{\beta i}}-\frac{1}{B_i}\frac{\partial w_i}{\partial\beta_i}\right)\frac{\partial A_i}{\partial\beta_i} \tag{8}$$

$$k_{\beta i}=\frac{1}{A_iB_i}\left(\frac{u_i}{R_{\alpha i}}-\frac{1}{A_i}\frac{\partial w_i}{\partial\alpha_i}\right)\frac{\partial B_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{B_i}\frac{\partial}{\partial\beta_i}\left(\frac{v_i}{R_{\beta i}}-\frac{1}{B_i}\frac{\partial w_i}{\partial\beta_i}\right) \tag{9}$$

$$\tau_{\alpha i\beta i}=\frac{A_i}{B_i}\frac{\partial}{\partial\beta_i}\left(\frac{\frac{u_i}{R_{\alpha i}}-\frac{1}{A_i}\frac{\partial w_i}{\partial\alpha_i}}{A_i}\right)+\frac{B_i}{A_i}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(\frac{\frac{v_i}{R_{\beta i}}-\frac{1}{B_i}\frac{\partial w_i}{\partial\beta_i}}{B_i}\right)+\frac{1}{R_{\alpha i}}\left(\frac{1}{B_i}\frac{\partial u_i}{\partial\beta_i}-\frac{v_i}{A_iB_i}\frac{\partial B_i}{\partial\alpha_i}\right)+\frac{1}{R_{\beta i}}\left(\frac{1}{A_i}\frac{\partial v_i}{\partial\alpha_i}-\frac{u_i}{A_iB_i}\frac{\partial A_i}{\partial\beta_i}\right) \tag{10}$$

式中　下标 $i(i=z,c,s)$ 分别表示圆锥壳、圆柱壳、球壳;α_i,β_i 代表壳体的轴向和周向;$\varepsilon_{\alpha i},\varepsilon_{\beta i}$ 表示线应变,$\varepsilon_{\alpha i\beta i}$ 表示切应变,$k_{\alpha i},k_{\beta i}$ 表示中面的曲率改变量,$\tau_{\alpha i\beta i}$ 表示中面的扭率改变量;u_i,v_i,w_i 分别是壳体轴向、周向、法向位移;A_i,B_i 表示壳体的拉梅系数,$R_{\alpha i},R_{\beta i}$ 表示壳体轴向和周向的曲率半径,具体可参见表1。

表1　各子结构的拉梅系数以及曲率半径

Tab. 1　The Lame coefficient and the curvature radius of each substructure

参数	子结构		
	锥壳	柱壳	球壳
A	1	1	R_s
B	R_z	R_c	$R_s\sin\varphi$
R_α	∞	∞	R_s
R_β	$R_z/\cos\alpha$	R_c	R_s

由经典Love壳体理论可知,忽略一些小量可以得到壳体中面的线性应变表达式:

$$e_{\alpha i}=\varepsilon_{\alpha i}+zk_{\alpha i} \tag{11}$$

$$e_{\beta i}=\varepsilon_{\beta i}+zk_{\beta i} \tag{12}$$

$$\gamma_{\alpha i\beta i}=\varepsilon_{\alpha i\beta i}+z\tau_{\alpha i\beta i} \tag{13}$$

根据胡克定律得到应力与应变的关系

$$\begin{bmatrix}\sigma_{\alpha i}\\ \sigma_{\beta i}\\ \sigma_{\alpha i\beta i}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11}&Q_{12}&0\\ Q_{21}&Q_{22}&0\\ 0&0&Q_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_{\alpha i}\\ e_{\beta i}\\ \gamma_{\alpha i\beta i}\end{bmatrix} \tag{14}$$

式中

$$Q_{11}=Q_{22}=\frac{E_i}{1-\mu_i^2},\quad Q_{12}=Q_{21}=\frac{\mu_iE_i}{1-\mu_i^2},$$

$$Q_{33}=\frac{E_i}{2(1+\mu_i)} \tag{15}$$

由弹性力学可知,弹性体的变形能可以表示为

$$U_i=\frac{1}{2}\int_V(\sigma_{\alpha i}e_{\alpha i}+\sigma_{\beta i}e_{\beta i}+\sigma_{\alpha i\beta i}\gamma_{\alpha i\beta i})\mathrm{d}V \tag{16}$$

综合上式化简,得到各子壳结构的变形能

$$U_i=\frac{K_i}{2}\iint_s\left(\varepsilon_{\alpha i}^2+\varepsilon_{\beta i}^2+2\mu_i\varepsilon_{\alpha i}\varepsilon_{\beta i}+\frac{1-\mu_i}{2}\varepsilon_{\alpha_i\beta i}^2\right)A_iB_i\mathrm{d}S+\frac{D_i}{2}\iint_s\left(k_{\alpha i}^2+k_{\beta i}^2+2\mu_ik_{\alpha i}k_{\beta i}+\frac{1-\mu_i}{2}\tau_{\alpha_i\beta i}^2\right)A_iB_i\mathrm{d}S \tag{17}$$

式中　$\mathrm{d}S=\mathrm{d}x_i\mathrm{d}\theta_i$;$K_i=Eh/(1-\mu^2)$,$D_i=Eh^3/[12(1-\mu^2)]$ 分别表示壳体的薄膜刚度和弯曲刚度。

同理,各子壳结构的动能可以表示为

$$T_i=\frac{\rho_ih_i}{2}\iint_s\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w_i}{\partial t}\right)^2\right]A_iB_i\mathrm{d}S \tag{18}$$

1.3　结构连续条件

为了保证结构的完整性,本文采用人工弹簧技术模拟板、壳及壳、壳交接位置处的耦合条件,从而来满足各子结构在连接处位移、转角以及力、力矩的连续性。最后再根据位移转角的协调性条件,分别得到不同部分之间储存在弹簧中的势能。下面以锥

壳-柱壳为例说明连接处的耦合条件，具体参数如图4所示，其中：k_{zcu}，k_{zcv}，k_{zcw}，$k_{zc\theta}$分别表示沿子壳连接边界线性分布的三组线弹簧和一组转动弹簧。

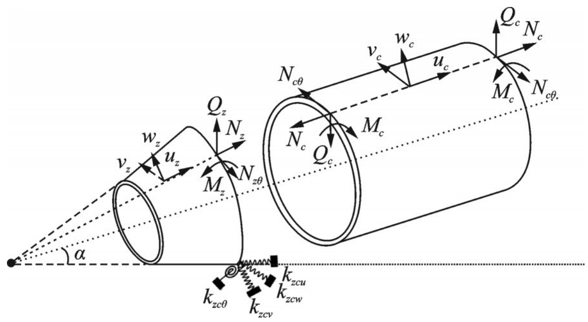

图4 子结构锥-柱壳连接处的力与力矩示意图

Fig. 4 Schematic diagram of the force and moment at the junction of the conical-cylindrical shell

由板壳力学知识可知，结构连接处需要满足内力和内力矩的受力平衡，结合图4可以得到锥壳-柱壳连续性方程：

$$k_{zcu}[u_c-(u_z\cos\alpha-w_z\sin\alpha)]-N_{c|x_z=L_z,x_c=0}=0 \tag{19}$$

$$k_{zcv}(v_c-v_z)-N_{c\theta|x_z=L_z,x_c=0}=0 \tag{20}$$

$$k_{zcw}[w_c-(u_z\sin\alpha+w_z\cos\alpha)]-Q_{c|x_z=L_z,x_c=0}-\frac{\partial M_{c\theta}}{R_2\partial\theta_c}\Big|_{x_z=L_z,x_c=0}=0 \tag{21}$$

$$k_{zc\theta}\left(\frac{\partial w_c}{\partial x_c}-\frac{\partial w_z}{\partial x_z}\right)-M_{c|x_z=L_z,x_c=0}=0 \tag{22}$$

由式(19)-(22)可以得到圆锥壳与圆柱壳连接处的耦合条件可以表示如下

$$\begin{cases} u_c=u_z\cos\alpha-w_z\sin\alpha \\ v_c=v_z \\ w_c=u_z\sin\alpha+w_z\cos\alpha \\ \dfrac{\partial w_c}{\partial x_c}=\dfrac{\partial w_z}{\partial x_z} \end{cases} \tag{23}$$

储存在圆锥壳与圆柱壳连接处的弹簧势能为

$$V_{zc}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{k_{zcu}[u_c-(u_z\cos\alpha-w_z\sin\alpha)]^2+k_{zcv}(v_c-v_z)^2+k_{zcw}[w_c-(u_z\sin\alpha+w_z\cos\alpha)]^2+k_{zc\theta}(\frac{\partial w_c}{\partial x_c}-\frac{\partial w_z}{\partial x_z})^2\}|_{x_z=L_z,x_c=0}R_2\mathrm{d}\theta \tag{24}$$

同理可以分别得到左端板与圆锥壳，圆柱壳与球壳，球壳与右端板连接处的弹簧势能：

$$V_{blz}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{k_{blzu}[u_{bl}-(u_z\sin\alpha+w_z\cos\alpha)]^2+k_{blzv}(v_{bl}-v_z)^2+k_{blzw}[w_{bl}+(u_z\cos\alpha-w_z\sin\alpha)]^2+k_{blz\theta}(\frac{\partial w_{bl}}{\partial x_{bl}}-\frac{\partial w_z}{\partial x_z})^2\}|_{x_{bl}=R_1,x_z=0}R_1\mathrm{d}\theta \tag{25}$$

$$V_{cs}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{k_{csu}(u_c-u_s)^2+k_{csv}(v_c-v_s)^2+k_{csw}(w_c-w_s)^2+k_{cs\theta}[\frac{\partial w_c}{\partial x_c}-(\frac{\partial w_s}{\partial\varphi}-u_s)/R_2]^2\}|_{x_c=L_c,x_s=0}R_2\mathrm{d}\theta \tag{26}$$

$$V_{sbr}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{k_{sbru}[u_{br}-(u_s\cos\varphi_0-w_s\sin\varphi_0)]^2+k_{sbrv}(v_{br}-v_s)^2+k_{sbrw}[w_{br}-(u_s\sin\varphi_0+w_s\cos\varphi_0)]^2+k_{sbr\theta}[\frac{\partial w_{br}}{\partial x_{br}}-(\frac{\partial w_s}{R_2\partial\varphi}-\frac{u_s}{R_2})]^2|_{x_s=L_s,x_{br}=R_{br}}R_{br}\mathrm{d}\theta \tag{27}$$

式(19)-(27)中 N_c，$N_{c\theta}$表示壳的中面内力；Q_c表示横向剪力；M_c表示弯矩；$M_{c\theta}$表示扭矩；k_{blzu}，k_{blzv}，k_{blzw}，$k_{blz\theta}$分别表示$x_{bl}=R_1$，$x_z=0$处位移和转角约束的弹簧刚度值；k_{zcu}，k_{zcv}，k_{zcw}，$k_{zc\theta}$分别表示$x_z=L_z$，$x_c=0$处位移和转角约束的弹簧刚度值；k_{csu}，k_{csv}，k_{csw}，$k_{cs\theta}$分别表示$x_c=L_c$，$x_s=0$处位移和转角约束的弹簧刚度值；k_{sbru}，k_{sbrv}，k_{sbrw}，$k_{sbr\theta}$分别表示$x_s=L_s$，$x_{br}=R_{br}$处位移和转角移约束的弹簧刚度值。

1.4 结构位移方程

采用不同的位移方程对计算结果的精度会有一定的影响。常用可选的位移函数有切比雪夫多项式、雅克比多项式、勒让德多项式等。本文选用的是由标准傅里叶级数和辅助收敛函数组成的改进的傅里叶级数，它不仅可以消除边界以及子结构耦合界面之间所有潜在的不连续点，而且可以加快傅里叶级数展开的收敛速率[6]，因此采用改进的傅里叶级数作为本文结构的位移方程，在数值结果的计算精度以及求解速度上，都具备一定的优势，其具体形式如下

$$u_i(x_i,\theta_i,t)=\{\sum_{n=0}^{N}[\sum_{m=0}^{M}A_{imn}\cos(\lambda_m x_i)+\sum_{l=1}^{4}a_{iln}\xi_l(x_i)]\cos(n\theta_i)+\sum_{n=1}^{N}[\sum_{m=0}^{M}\widetilde{A}_{imn}\cos(\lambda_m x_i)+\sum_{l=1}^{4}\widetilde{a}_{iln}\xi_l(x_i)]\sin(n\theta_i)\}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_i t} \tag{28}$$

$$v_i(x_i,\theta_i,t)=\{\sum_{n=1}^{N}[\sum_{m=0}^{M}B_{imn}\cos(\lambda_m x_i)+\sum_{l=1}^{4}b_{iln}\xi_l(x_i)]\sin(n\theta_i)+\sum_{n=0}^{N}[\sum_{m=0}^{M}\widetilde{B}_{imn}\cos(\lambda_m x_i)+\sum_{l=1}^{4}\widetilde{b}_{iln}\xi_l(x_i)]\cos(n\theta_i)\}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_i t} \tag{29}$$

$$w_i(x_i,\theta_i,t)=\{\sum_{n=0}^{N}[\sum_{m=0}^{M}C_{imn}\cos(\lambda_m x_i)+\sum_{l=1}^{4}c_{iln}\xi_l(x_i)]\cos(n\theta_i)+\sum_{n=1}^{N}[\sum_{m=0}^{M}\widetilde{C}_{imn}\cos(\lambda_m x_i)+\sum_{l=1}^{4}\tilde{c}_{iln}\xi_l(x_i)]\sin(n\theta_i)\}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_i t} \tag{30}$$

其中傅里叶展开项的系数向量可以写成

$$\boldsymbol{q}_i=[A_{imn},a_{iln},\widetilde{A}_{imn},\tilde{a}_{iln},B_{imn},b_{iln},\widetilde{B}_{imn},\tilde{b}_{iln},C_{imn},c_{iln},\widetilde{C}_{imn},\tilde{c}_{iln}]^{\mathrm{T}} \tag{31}$$

本文选取的辅助收敛函数可表示为

$$\xi_l(x_i)=\sin(l\pi x_i/L_i),\ 0<l<5\ \ (l\text{为整数}) \tag{32}$$

式(28)-(32)中　下标$i(i=bl,z,c,s,br)$分别表示左端板,圆锥壳、圆柱壳、球壳、右端板;$\lambda_m=m\pi/L_i$,$m=0,1,2,\cdots$为壳体振动的轴向波数,$n=0,1,2,\cdots$为壳体振动的周向波数;ω为角频率,t为时间;M,N为位移函数的截断项数。

带圆端板的锥-柱-球结构的拉格朗日能量泛函L可表示为

$$L=U_i+V_i-T_i \tag{33}$$

应用里兹法求解步骤,分别对每一项位移展开系数求偏导

$$\frac{\partial L}{\partial q}=0 \tag{34}$$

其中

$$\boldsymbol{q}=[q_{bl},q_z,q_c,q_s,q_{br}]^{\mathrm{T}} \tag{35}$$

联立上述各式,最终得到结构自由振动的控制方程

$$(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{q}=0 \tag{36}$$

式中　$\boldsymbol{K}$为结构的刚度矩阵,$\boldsymbol{M}$为结构的质量矩阵,ω为角频率。求解方程(36)可以得到组合壳自由振动的各阶固有频率及其相应的特征向量。

2　算例分析

为了验证方法的收敛性和准确性,本文给出了一些关于带圆端板的锥-柱-球结构自由振动的算例分析。结构的几何参数和材料参数选取值如下:$R_1=R_{bl}=0.4$ m,$R_2=1$ m,$L_z=1.2$ m,$L_c=2.5$ m,$h=h_z=h_c=h_s=0.01$ m,$\alpha=30°$,$\varphi_0=30°$,$E=210$ GPa,$\mu=0.3$,$\rho=7800$ kg/m^3,$h_b=h_{bl}=h_{br}=0.01$ m,$E_{bl}=E_{br}=210$ GPa,$\mu_{bl}=\mu_{br}=0.3$,$\rho_{bl}=\rho_{br}=7800$ kg/m^3,求解组合壳自由振动时,选取的边界条件为自由边界条件,各子壳连接处约束位移以及转角的无量纲弹簧刚度$k=10^{14}$。为了便于数据分析,这里引入无量纲频率参数,其表达式为:$\Omega=\omega R_c\sqrt{\rho(1-\mu^2)/E}$。

2.1　收敛性分析

位移函数截断项M,N的取值对计算结果的精度有较大影响。改变截断项数M,N,忽略组合壳结构在自由边界条件下的前6阶刚体模态值,通过理论计算和FEM两种方法分别得到了无端板和带端板组合结构自由振动前10阶无量纲频率,结果如表2所示(其中FEM方法中组合壳模型由壳单元构建,下文不再赘述)。

由表2可知,无端板和带端板的组合结构自由振动无量纲频率随着M的增大而逐渐趋于稳定,最终结果与有限元法的计算结果吻合较好。对比两种方法的计算时间:在配置为Intel Core I5-7500 CPU、主频为3.40 GHz、内存为16 GB、64位操作系统的PC机上,该方法计算一种工况下的固有频率需要95 s,FEM方法计算一种工况下的固有频率需要310 s,需要说明的是这里仅是FEM的计算时间,未包含建模的时间。因此,综合收敛速度和计算精度两个方面的考虑,在该方法下,当$M=12$时已满足本文的计算要求。

2.2　准确性分析

拟从改变组合壳结构中的圆柱壳长度及锥壳、球壳的半开口角两个方面来验证所用方法计算组合壳自由振动的准确性。

2.2.1　圆柱壳长度对组合结构自由振动的影响

圆柱壳作为组合壳结构的主要组成部分之一,改变圆柱壳的几何材料参数均会对组合壳结构的振动产生较大的影响。在第2.1节给定几何参数和材料参数的基础上,仅改变圆柱壳的长度,即圆柱壳的长度分别为2.5,10,25 m,忽略组合壳结构在自由边界条件下的前6阶刚体模态值,通过理论计算和FEM两种方法得到的组合壳前8阶的自由振动无量纲频率,如图5所示。

分析图5可知,组合壳结构自由振动的固有频率随模态阶数的增大而相应增大,同时也随圆柱壳长度的增加而显著减小。对比发现,当圆柱壳长度远远大于组合结构其他组成部分的最大尺度时,此时圆柱壳在影响组合结构的固有频率中起着主导地位,结构的“梁式模态”效应显著,因此圆柱壳越长,组合结构的固有频率越小。

2.2.2　半顶角和半开角对组合结构自由振动的影响

通常最能决定锥球壳结构形状的是其半顶角以及半开角,在第2.1节给定几何参数和材料参数的

表2 不同截断项数下无端板和带端板的组合壳结构的前10阶无量纲频率

Tab. 2 The first ten-order dimensionless frequency of the combined shell structure with and without end plates at different numbers of truncation

边界条件	模态阶数 m	$M\times N$						FEM
		7×10	8×10	9×10	10×10	11×10	12×10	
无端板	1	0.004441	0.004438	0.004437	0.004436	0.004436	0.004436	0.004441
	2	0.006167	0.006166	0.006165	0.006165	0.006165	0.006165	0.006163
	3	0.012616	0.012610	0.012607	0.012602	0.012600	0.012599	0.012621
	4	0.012625	0.012613	0.012607	0.012604	0.012603	0.012602	0.012635
	5	0.013511	0.013508	0.013507	0.013506	0.013505	0.013505	0.013549
	6	0.016755	0.016752	0.016750	0.016748	0.016747	0.016746	0.016771
	7	0.017268	0.017266	0.017266	0.017265	0.017265	0.017265	0.017359
	8	0.020534	0.020529	0.020524	0.020522	0.020521	0.020520	0.020554
	9	0.022745	0.022744	0.022743	0.022743	0.022743	0.022743	0.022923
	10	0.023882	0.023868	0.023858	0.023853	0.023850	0.023848	0.023968
带端板	1	0.012633	0.012626	0.012623	0.012621	0.012620	0.012619	0.012614
	2	0.013511	0.013508	0.013507	0.013506	0.013506	0.013505	0.013513
	3	0.015792	0.015771	0.015762	0.015754	0.015750	0.015747	0.015702
	4	0.017268	0.017266	0.017266	0.017265	0.017265	0.017265	0.017281
	5	0.022656	0.022674	0.022641	0.022614	0.022598	0.022586	0.022429
	6	0.022745	0.022744	0.022743	0.022743	0.022743	0.022743	0.022772
	7	0.026709	0.026704	0.026695	0.026693	0.026689	0.026688	0.026708
	8	0.028569	0.028551	0.028531	0.028525	0.028517	0.028515	0.028484
	9	0.028650	0.028648	0.028642	0.028641	0.028639	0.028639	0.028668
	10	0.029428	0.029426	0.029426	0.029426	0.029426	0.029426	0.029479

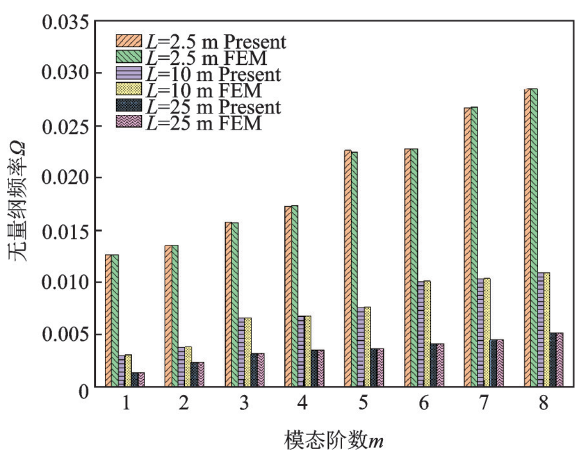

图5 改变圆柱壳长度的3种工况下的组合壳自由振动无量纲频率

Fig. 5 The combined shell free vibration dimensionless frequency under three conditions changing cylindrical shell lengths

基础上,仅仅改变锥壳的半顶角和球壳半开角,忽略组合壳结构在自由边界条件下的前6阶刚体模态值,通过理论计算和FEM两种方法得到了多种角度组合下,带端板锥柱球结构前8阶的自由振动无量纲频率,具体组合形式以及结果对比,如表3-5所示。

由表3-5可知,改变锥壳半顶角及球壳半开角会显著地影响组合结构的固有频率,并使之呈现一定的变化规律:单一保持锥壳或是球壳的开口角不变,增大或减小另一结构的开口角,整体结构的固有频率均会随之增大或者减小。同时发现,采用本文方法计算得到高阶模态下的固有频率与有限元方法的结果吻合较好,表明了本文方法的准确性。

2.3 端板厚度对锥柱球结构自由振动特性的影响

现阶段,大部分研究都只关心组合壳结构在经典边界或弹性边界下的振动问题,很少有文献分析端板给组合结构带来的影响。在第2.1节给定几何参数和材料参数的基础上,选取组合壳结构的边界条件为自由边界,分别以壳体厚度h=10 mm,h=15 mm,h=20 mm,h=25 mm作为4种工况,改变对应两端端板的厚度h_b,为了方便规律的表达,令$\zeta=h_b/h$,即可得到下面一系列ζ与无量纲频率Ω的变化曲线,如图6所示。

表 3　锥壳半顶角 α=30°组合壳结构前 8 阶无量纲频率

Tab. 3　The first eight-order dimensionless frequency of the combined shell structure with end plates at α=30°

模态阶数 m	φ_0=30°		φ_0=45°		φ_0=60°	
	Present	FEM	Present	FEM	Present	FEM
1	0.012619	0.012614	0.012619	0.012632	0.011896	0.011908
2	0.013505	0.013513	0.013525	0.013549	0.012648	0.012655
3	0.015747	0.015702	0.015688	0.015732	0.013521	0.013534
4	0.017265	0.017281	0.017331	0.017359	0.015864	0.015875
5	0.022585	0.022429	0.022509	0.022581	0.017287	0.017315
6	0.022743	0.022772	0.022867	0.022923	0.019483	0.019513
7	0.026687	0.026708	0.026773	0.026802	0.022806	0.022835
8	0.028514	0.028484	0.028504	0.028551	0.023043	0.023119

表 4　锥壳半顶角 α=45°组合壳结构前 8 阶无量纲频率

Tab. 4　The first eight-order dimensionless frequency of the combined shell structure with end plates at α=45°

模态阶数 m	φ_0=30°		φ_0=45°		φ_0=60°	
	Present	FEM	Present	FEM	Present	FEM
1	0.012833	0.012883	0.012851	0.012885	0.011873	0.011913
2	0.013582	0.013616	0.013581	0.013617	0.012836	0.012919
3	0.016432	0.016466	0.016451	0.016490	0.013579	0.013623
4	0.017292	0.017349	0.017293	0.017349	0.016570	0.016648
5	0.022806	0.022854	0.022815	0.022854	0.017312	0.017350
6	0.024365	0.024426	0.024522	0.024580	0.019484	0.019517
7	0.026888	0.026945	0.026888	0.026945	0.022819	0.022856
8	0.028765	0.028835	0.028605	0.028673	0.025139	0.025187

表 5　锥壳半顶角 α=60°组合壳结构前 8 阶无量纲频率

Tab. 5　The first eight-order dimensionless frequency of the combined shell structure with end plates at α=60°

模态阶数 m	φ_0=30°		φ_0=45°		φ_0=60°	
	Present	FEM	Present	FEM	Present	FEM
1	0.012987	0.013027	0.013006	0.013030	0.011878	0.011915
2	0.013637	0.013665	0.013649	0.013665	0.013030	0.013065
3	0.016847	0.016876	0.016866	0.016900	0.013618	0.013672
4	0.017306	0.017368	0.017330	0.017368	0.016997	0.017063
5	0.022806	0.022865	0.017427	0.017444	0.017291	0.017370
6	0.025411	0.025475	0.022825	0.022865	0.019483	0.019518
7	0.026940	0.027038	0.025591	0.025627	0.022806	0.022865
8	0.028799	0.028885	0.026901	0.027040	0.026158	0.026262

由图 6 可知:4 种工况下,本文方法与 FEM 计算得到的结果具有较好的一致性;组合结构无量纲频率 Ω 随着端板厚度与壳体厚度之比 ζ 的变化曲线具有较一致的趋势,即 ζ 达到一定的阈值后,无量纲频率趋于稳定。究其原因,是因为改变端板的厚度,相当于改变端板的等效刚度,当端板的等效刚度到达一定值时,锥壳小端以及球壳尾端三个方向的位移受到了较大的限制,从而使得结构的固有频率几乎不再改变。对比单个图形,趋于稳定的无量纲频率值与壳体厚度密切相关,壳体厚度越大,对应的无量纲频率值越大。另外,不同工况下无量纲频率值稳定点对应的阈值也各不相同,但该处的阈值会随壳体厚度的增加而在一定范围内呈现下降的趋势。

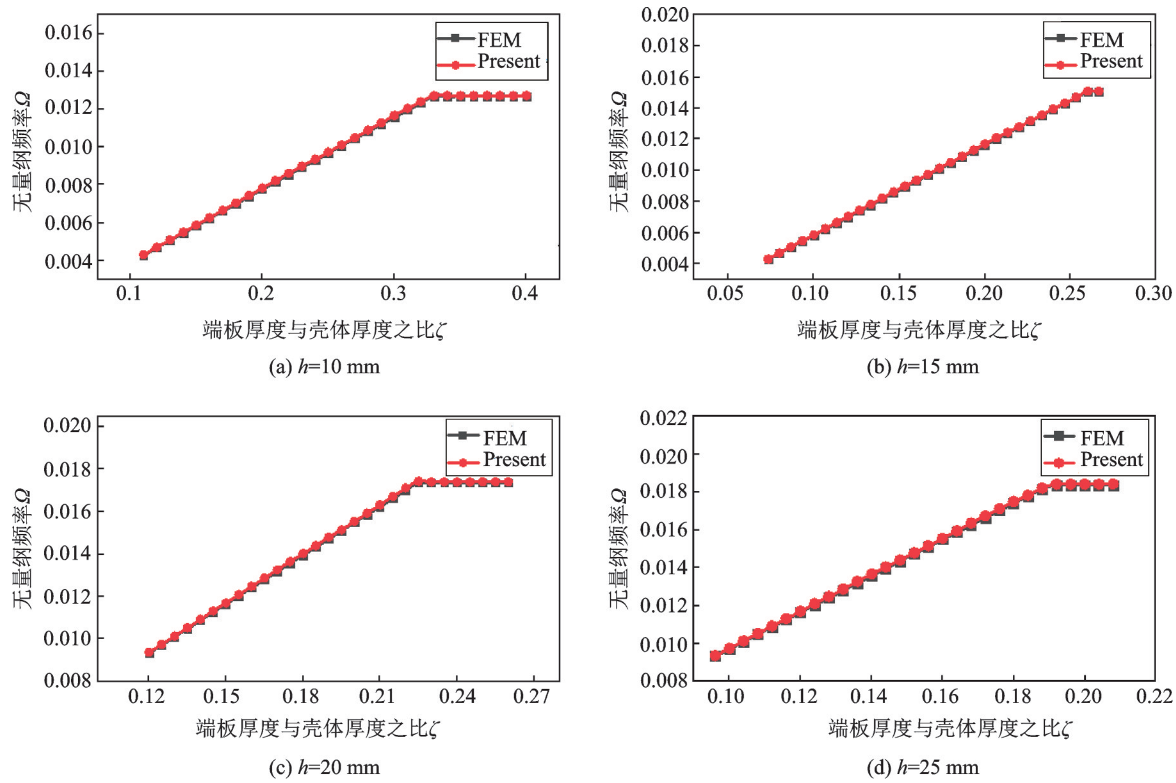

图 6 端板厚度与壳体厚度之比ζ与无量纲频率Ω的变化曲线

Fig. 6 The curve of the ratio of the thickness of the end plate to the thickness of the shell and the dimensionless frequency

3 结 论

本文基于能量泛函，采用一种改进的傅里叶级数方法求解了带圆端板的耦合锥-柱-球结构的自由振动。建立了带圆端板的锥-柱-球组合壳结构理论模型，本文采用人工弹簧技术模拟耦合界面板、壳及壳、壳交接位置处的约束条件，从而来满足各子壳结构在交接处位移和转角以及力和力矩的连续性。最后应用Rayleigh-Ritz法计算求解结构的固有频率，通过与有限元方法计算的结果比较，验证了本文方法的准确性和收敛性，综合全文可以得到以下结论：

1. 通过对本文方法的收敛性以及准确性分析，并将其计算的结果与有限元对比，两种方法的计算结果具有较高的吻合度，证明了本文方法的正确性与可行性。

2. 带圆端板的锥-柱-球结构的自由振动特性与其组成部分的圆柱壳长度，圆锥壳的半顶角以及球壳的半开角密切相关。当圆柱壳长度增大，此时组合结构的"梁式模态"效应显著，其固有频率反而会减小；单一保持锥壳或是球壳的开口角不变，增大或减小另一结构的开口角，组合壳结构的固有频率均会随之增大或者减小。

3. 改变两端板厚度对锥-柱-球结构自由振动特性具有较大的影响。组合壳结构无量纲频率Ω随着端板厚度与壳体厚度之比ζ的变化曲线在不同条件下具有一致的趋势，即ζ达到一定阈值后，无量纲频率趋于稳定。这一规律，对不同形状封口组合壳结构的设计及其振动分析具有一定的工程指导意义。

参考文献：

[1] Leissa A W. Vibration of plates[R]. NASA SP-160, 1969.

[2] Leissa A W. Vibration of shells[R]. NASA SP-288, 1973: 31-43.

[3] Qatu Mohamad S. Recent research advances in the dynamic behavior of shells: 1989-2000, Part 1: Laminated composite shells[J]. Applied Mechanics Reviews, 2002, 55(4): 325-350.

[4] Irie T, Yamada G, Muramoto Y. Natural frequencies of in-plane vibration of annular plates[J]. Journal of Sound Vibration, 1984, 97(1): 171-175.

[5] Irie T, Yamada G, Muramoto Y. Free vibration of joined conical-cylindrical shells[J]. Journal of Sound and Vibration, 1984, 95(1): 31-39.

[6] Li W L. Vibration analysis of rectangular plates with general elastic boundary supports[J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 273(3): 619-635.

[7] Bauer Helmut F, Werner Eidel. Determination of the lower natural frequencies of circular plates with mixed boundary conditions[J]. Journal of Sound and Vibra-

tion, 2006, 292(3-5): 742-764.

[8] Bashmal S, Bhat R, Rakheja S. In-plane free vibration of circular annular disks[J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 322(1-2): 216-226.

[9] 史冬岩,石先杰,李文龙. 任意边界条件下环扇形板面内振动特性分析[J]. 振动工程学报, 2014, 27(1): 1-8.
SHI Dong-yan, SHI Xian-jie, LI Wen-long. In-plane vibration analysis of annular sector plates with arbitrary boundary supports[J]. Journal of Vibration Engineering, 2014, 27(1): 1-8.

[10] 李天匀,张 俊,朱 翔,等. 含任意形状内开口的矩形板振动特性分析[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2018, 46(11): 1-6.
Li Tianyun, Zhang Jun, Zhu Xiang, et al. Vibration characteristics analysis on rectangular plates with arbitrarily-shaped cutout[J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2018, 46(11): 1-6.

[11] Efraim E, Eisenberger M. Exact vibration frequencies of segmented axisymmetric shells[J]. Thin-Walled Structures, 2006, 44(3): 281-289.

[12] Caresta Mauro, Kessissoglou Nicole J. Free vibrational characteristics of isotropic coupled cylindrical-conical shells[J]. Journal of Sound and Vibration, 2010, 329(6): 733-751.

[13] Li Haichao, Pang Fuzhen, Wang Xueren, et al. Free vibration analysis of uniform and stepped combined paraboloidal, cylindrical and spherical shells with arbitrary boundary conditions[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2018, 145: 64-82.

[14] 瞿叶高,华宏星,孟 光,等. 基于区域分解的圆锥壳-圆柱壳-圆锥壳组合结构自由振动[J]. 振动与冲击, 2012, 31(22): 1-7.
QU Ye-gao, HUA Hong-xing, MENG Guang, et al. A domain decomposition method for free vibration analysis of a joined conical-cylindrical-conical shell[J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(22): 1-7.

[15] 邹明松,吴文伟,孙建刚,等. 两端圆板封闭圆柱壳自由振动的半解析解[J]. 船舶力学, 2012, 16(11): 1306-1313.
ZOU Ming-song, WU Wen-wei, SUN Jian-gang, et al. A semianalytical solution for free vibration of a cylindrical shell with two end plates[J]. Journal of Ship Mechanics, 2012, 16(11): 1306-1313.

[16] Xie Kun, Chen Meixia, Zhang Lei, et al. Wave based method for vibration analysis of elastically coupled annular plate and cylindrical shell structures[J]. Applied Acoustics, 2017, 123: 107-122.

Modified Fourier series method to solve the free vibration of the coupled conical-cylindrical-spherical shell with closed ends

ZHANG Shuai[1,3], *LI Tian-yun*[1,2,3], *ZHU Xiang*[1,2,3], *CHEN Xu*[1,3]

(1.School of Naval Architecture and Ocean Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China; 2.Collaborative Innovation Center for Advanced Ship and Deep-sea Exploration, Shanghai 200240, China; 3.Hubei Key Laboratory of Naval Architecture and Ocean Engineering Hydrodynamics, Wuhan 430074, China)

Abstract: A semi-analytical method-modified Fourier series is proposed to solve the free vibration of the coupled conical-cylindrical-spherical shell with closed ends. Based on energy function, the classical thin plate theory and Love shell theory are combined to construct the theoretical model of the coupled conical-cylindrical-spherical shell. The natural frequencies of the coupled structure with different cylindrical shell lengths, different semi angles of conical and spherical shell and different thicknesses of end plates are studied. The displacement of each substructure of the coupled shell is composed of the standard Fourier series and the auxiliary convergence functions. The introduction of the auxiliary functions can not only remove all the potential discontinuities of traditional Fourier series at the connections, but also improve the convergence precision and speed of calculation. The research shows that the present method has good convergence, which the calculation results show a good agreement with the finite element method results. By analyzing the natural frequency, it is found that the changes of length, semi-angle and thickness of end plates have obvious influence on the free vibration of the conical-cylindrical-spherical shell.

Key words: structural vibration; coupled conical-cylindrical-spherical shells; circular plates; Love shell theory; Fourier-Ritz method

作者简介: 张 帅(1993-),男,博士研究生。E-mail: zhang_shuai@hust.edu.cn

通讯作者: 李天匀(1969-),男,教授。E-mail: ltyz801@hust.edu.cn