

# 多参考最小二乘复频域法的数值问题分析及优化

章国稳<sup>1</sup>, 汤宝平<sup>2</sup>, 陈卓<sup>3</sup>

(1. 杭州电子科技大学自动化学院, 浙江 杭州 310018; 2. 重庆大学机械传动国家重点实验室, 重庆 400044;  
3. 重庆交通科研设计研究院桥梁结构动力学国家重点实验室, 重庆 400067)

**摘要:** 分析多参考最小二乘复频域法在实际应用中的数值问题, 提出一种多参考最小二乘复频域优化方法。由于实际系统阶次未知, 为了避免模态遗漏, 需先过估计系统阶次。通过理论与数值分析发现: 由于系统阶次过估计, 识别过程需要对奇异矩阵进行伪逆计算, 伪逆计算方法和参数的选择对识别结果有很大影响。利用特征值分解计算奇异矩阵  $R_o$  的伪逆矩阵, 通过奇异值分解计算奇异矩阵  $M_{\text{sub}}$  的伪逆矩阵, 以能量为指标自动确定阶次, 在不失精度的前提下可自动得到清晰稳定图。利用优化多参考最小二乘复频域法对一个 7 自由度线性时不变系统和葡萄牙 Infante D. Henrique 大桥辨识, 实验结果表明本文方法可以在保持精度的前提下容易地识别系统模态。

**关键词:** 模态分析; 多参考最小二乘复频域法; 特征值分解; 奇异值分解; 稳定图

**中图分类号:** TB122; TU311.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2021)04-0690-07

**DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2021.04.004

## 引言

20 世纪 90 年代, 针对频域识别中数值病态问题, Guillaume 等提出了最小二乘复频域法<sup>[1]</sup>; 后来通过使用右矩阵分式模型代替公分母模型改进了识别模型, 提出了多参考最小二乘复频域法(本文简称为 p\_LSCF)<sup>[2]</sup>, 在 LMS 的 Test. Lab 系统<sup>[3]</sup>中被称为 PolyMAX。该方法具有较为清晰的稳定图, 易于实现参数自动识别, 识别精度高, 被广泛应用于各个领域<sup>[4-5]</sup>。

由于实际系统阶次未知, 为了避免模态遗漏, 通常先过估计系统阶次, 接着采用稳定图等方式从计算结果中提取系统真实模态<sup>[6]</sup>。系统阶次过估计导致了计算过程中的部分矩阵为奇异矩阵, 而奇异矩阵逆矩阵只能以伪逆矩阵替代。目前伪逆矩阵的计算方式有多种, 不同的计算方法以及误差容许设置对识别结果有较大影响。 $R_o$  和  $M_{\text{sub}}$  是 p\_LSCF 中需要求逆的中间矩阵, 在系统阶次过估计时为奇异矩阵, 而如何确定其伪逆矩阵的最佳估计是一个值得研究的问题。

本文针对 p\_LSCF 计算过程中奇异矩阵的逆矩阵计算问题, 提出了一种改进多参考最小二乘复频域法。利用特征值分解计算奇异矩阵  $R_o$  的伪逆矩

阵, 通过奇异值分解计算奇异矩阵  $M_{\text{sub}}$  的伪逆矩阵, 以能量为指标自动确定阶次, 可得到清晰稳定图。对一个 7 自由度线性时不变系统以及葡萄牙 Infante D. Henrique 大桥进行模态参数识别验证了该方法的有效性。

## 1 多参考最小二乘复频域法

采用右矩阵分式模型<sup>[2]</sup>对频响函数进行拟合

$$H_o(\omega) = B_o(\omega)A^{-1}(\omega) \quad (1)$$

式中  $H_o(\omega) = [H_{o,1} H_{o,2} \cdots H_{o,N_i}]$  ( $o=1, 2, \cdots, N_o$ ),  $N_i$  为输入个数,  $N_o$  为输出个数,  $H_{o,i}$  为在频率  $\omega$  处激励点  $i$  和响应点  $o$  之间的频率响应函数。 $A(\omega) \in C^{N_i \times N_i}$  为分母矩阵,  $B_o(\omega) \in C^{1 \times N_i}$  为分子矩阵

$$B_o(\omega) = \sum_{j=0}^n B_{o,j} z_j(\omega), A(\omega) = \sum_{j=0}^n A_j z_j(\omega) \quad (2)$$

式中  $n$  为系统阶次,  $z_j(\omega)$  为基函数。系数矩阵  $A_j$  和  $B_{o,j}$  为待估参数, 用其定义矩阵如下

$$\theta = \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{N_o} \\ \alpha \end{Bmatrix}, \beta_o = \begin{Bmatrix} B_{o,0} \\ B_{o,1} \\ \vdots \\ B_{o,n} \end{Bmatrix}, \alpha = \begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{Bmatrix} \quad (3)$$

将式(1)中的频响函数  $H_o(\omega)$  用离散测量值

收稿日期: 2019-12-07; 修订日期: 2020-05-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51705114); 浙江省自然科学基金资助项目(LQ16E080009); 浙江省教育厅一般科研资助项目(Y201430581); 浙江省水利科技计划项目(RC1807); 杭州市科技计划项目(20191203B72)

$H_o(\omega_k)$  ( $k=1, 2, \dots, n_f$ )代替,  $n_f$ 为频响函数谱线数, 两边右乘  $A(\omega_k)$ 并加权, 可以得到加权误差

$$E_o(\omega_k) = W_o(\omega_k) [B_o(\omega_k) - \tilde{H}_o(\omega_k)A(\omega_k)] \quad (4)$$

式中  $W_o(\omega_k)$ 为加权矩阵。系数矩阵  $A_j$ 和  $B_{o,j}$ 可以通过求解下式的最小二乘解得到

$$J\theta = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \dots & 0 & Y_1 \\ 0 & X_2 & \dots & 0 & Y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & X_{N_o} & Y_{N_o} \end{bmatrix} \theta = 0 \quad (5)$$

其中

$$X_o = \begin{bmatrix} W_o(\omega_1) [\Omega_0(\omega_1) & \Omega_1(\omega_1) & \dots & \Omega_n(\omega_1)] \\ W_o(\omega_2) [\Omega_0(\omega_2) & \Omega_1(\omega_2) & \dots & \Omega_n(\omega_2)] \\ \vdots \\ W_o(\omega_{N_f}) [\Omega_0(\omega_{N_f}) & \Omega_1(\omega_{N_f}) & \dots & \Omega_n(\omega_{N_f})] \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_f \times (n+1)},$$

$$Y_o = \begin{bmatrix} W_o(\omega_1) [\Omega_0(\omega_1) & \Omega_1(\omega_1) & \dots & \Omega_n(\omega_1)] \otimes \tilde{H}_o(\omega_1) \\ W_o(\omega_2) [\Omega_0(\omega_2) & \Omega_1(\omega_2) & \dots & \Omega_n(\omega_2)] \otimes \tilde{H}_o(\omega_2) \\ \vdots \\ W_o(\omega_{N_f}) [\Omega_0(\omega_{N_f}) & \Omega_1(\omega_{N_f}) & \dots & \Omega_n(\omega_{N_f})] \otimes \tilde{H}_o(\omega_{N_f}) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_f \times N_i(n+1)},$$

$\Omega_n(\omega) = e^{j\omega\Delta t}$ ,  $\Delta t$ 为采样时间,  $\tilde{H}_o(\omega_1)$ 为  $H_o(\omega_1)$ 的测量值,  $\otimes$ 代表 Kronecker 积, 对式(5)左乘  $J^H$ 得到

$$J^H J \theta = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & \dots & 0 & S_1 \\ 0 & R_2 & \dots & 0 & S_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_{N_o} & S_{N_o} \\ S_1^T & S_2^T & \dots & S_{N_o}^T & \sum_{o=1}^{N_o} T_o \end{bmatrix} \theta = 0 \quad (6)$$

式中  $R_o = X_o^H X_o \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ ,  $S_o = X_o^H Y_o \in \mathbb{R}^{(n+1) \times N_i(n+1)}$ ,  $T_o = Y_o^H Y_o \in \mathbb{R}^{N_i(n+1) \times N_i(n+1)}$ 。

根据式(6)可得

$$\beta_o = -R_o^{-1} S_o a \quad (7)$$

将式(7)代入式(6)可以得到

$$M a = \left( \sum_{o=1}^{N_o} (T_o - S_o^H R_o^{-1} S_o) \right) a = 0 \quad (8)$$

通过式(8)可求得系数矩阵  $a$ 。为避免平凡解, 可以对  $a$  的最高项系数加以限制, 即  $A_n = I_{N_i}$ 。得到分母系数  $a$  的解为

$$a = \begin{bmatrix} -M_{\text{sub}}^{-1} M_{\text{vec}} \\ I_{N_i} \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中  $M_{\text{sub}} = M(1:nN_i, 1:nN_i)$ ,  $M_{\text{vec}} = M(1:nN_i, nN_i + 1:(n+1)N_i)$ 。

在分母系数  $a$  求解完成之后, 系统极点以及模态参与因子可以由其伴随矩阵的特征值得到<sup>[7]</sup>。振型可以通过以下模型估计

$$H(\omega) = \sum_{r=1}^{N_m} \left( \frac{\varphi_r L_r^T}{j\omega - \lambda_r} + \frac{\varphi_r^* L_r^H}{j\omega - \lambda_r^*} \right) - \frac{LR}{\omega^2} + UR \quad (10)$$

式中  $\lambda_r$ 为系统极点,  $L_r$ 为模态参与因子, 它们已知。  $\Phi_r, LR, UR$ 可通过最小二乘法求解。

## 2 存在的问题分析

由于实际系统的阶次未知, 为了不遗漏系统模态, 一般先对系统阶次过估计, 然后通过稳定图等提取系统真实模态。由于系统阶次过估计, 即  $n$  大于系统实际阶次, 将导致算法识别过程中部分矩阵为奇异矩阵。式(8)在求解矩阵  $M$  时需要  $n+1$  维方阵  $R_o$  的逆矩阵, 式(9)在求解  $a$  时需要  $nN_i$  阶方阵  $M_{\text{sub}}$  的逆矩阵, 当  $n$  大于系统真实阶次时,  $R_o$  和  $M_{\text{sub}}$  为奇异矩阵, 无法得到它们的逆矩阵。因此, 需采用它们的伪逆矩阵替代逆矩阵。目前伪逆矩阵的数值计算方法有多种, 不同的计算方法和误差容许设置对结果有较大影响。

以一7自由度线性时不变系统模态参数识别为例, 如图1所示。其中每个质量块的质量都是1 kg,  $K_1=10$  kN/m,  $K_2=20$  kN/m, 阻尼矩阵为  $C=0.2M+0.0003K$ , 其中  $M, K$  分别为系统的质量矩阵、刚度矩阵。依次对各质量块施加脉冲激励, 采集

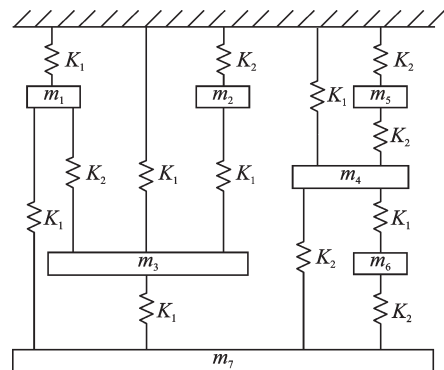


图1 7自由度线性系统

Fig. 1 The 7-DoF linear system

每个质量块的速度响应,采样频率为 500 Hz,采集时间为 50 s,并且在响应信号中含有 10% 的测量噪声。基于激励响应得到 49 个频响函数,谱线数为 512。本文通过 Matlab 平台对原 p\_LSCF 进行实现,假设最高阶为 50,在计算  $R_o$  和  $M_{\text{sub}}$  的伪逆矩阵时采用 Matlab 的 pinv 函数,其中容差 Tol 分别采用  $1^{-1}$ ,  $1^{-10}$  和  $1^{-25}$ 。构造稳定图如图 2 所示,其中,特征频率、阻尼比、模态振型的容差分别为:0.01,0.1,0.02,‘s’表示稳定点,‘v’表示频率和振型稳定的点,‘d’表示频率和阻尼比稳定的点,‘f’表示频率稳定的点。

从图 2 可以看出,在不同容差 Tol 下,本文将  $R_o$  和  $M_{\text{sub}}$  的容差分别记为  $T_R$  和  $T_M$ ,原 p\_LSCF 算法得

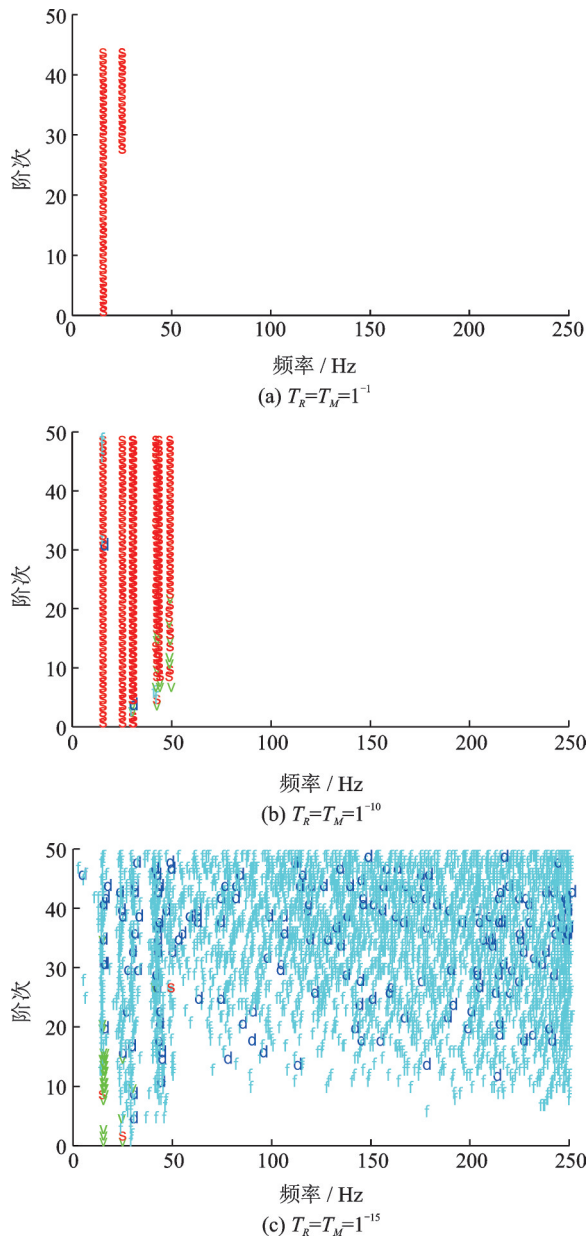


图 2 原始 p\_LSCF 在不同容差下的稳定图

Fig. 2 Stabilization diagram for traditional p\_LSCF under different tolerance

到的结果具有很大差异。当  $T_R$  和  $T_M$  都为  $1^{-1}$  时,稳定图中只出现了前 2 阶的极点,剩下 5 阶模态未识别出;当  $T_R$  和  $T_M$  都为  $1^{-10}$  时,能较好计算出所有模态;当  $T_R$  和  $T_M$  都为  $1^{-15}$  时,计算出了大量虚假模态,从中难以提取系统真实模态。算法实现过程中容差的选取对结果影响很大,但由于 Matlab 的伪逆算法未对外公开,对于实际系统识别过程中的容差选取也没有理论依据,因此难以确定最佳容差参数。针对以上问题,本文对识别过程进行优化。

### 3 改进多参考最小二乘复频域法

#### 3.1 M 矩阵求解

根据  $R_o = X_o^H X_o \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ , 可对  $R_o$  进行特征值分解得到

$$R_o = PDP^T \quad (11)$$

理论上,  $D$  中大于 0 的特征值为  $N$ , 其余都等于 0, 即

$$R_o = PDP^T = [P_1 \ P_2] \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 = 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1^T \\ P_2^T \end{bmatrix} = P_1 D_1 P_1^T \quad (12)$$

式中  $P_1 \in \mathbb{R}^{(n+1) \times N}$ ,  $D_1 \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 。由于实际测试数据中有干扰存在,因此  $D_2$  可能不为 0, 但应接近于 0。在实际应用中,本文提出用能量的方式确定  $D_1$  矩阵,定义归一化各阶能量

$$E'_k = D(k, k)^2 / DE, \quad k \leq m \quad (13)$$

式中  $DE = \sum_{i=1}^m D(i, i)^2$ 。设定阈值  $E_{\text{thd}}$ , 保留矩阵  $D$  中能量阈值大于或等于  $E_{\text{thd}}$  的特征值, 其他置零得到  $D_1$ 。

可以得到  $R_o$  的伪逆如下

$$R_o^+ = P_1 (D_1)^{-1} P_1^T \quad (14)$$

式中  $(\bullet)^+$  表示矩阵的伪逆。

将式(14)代入式(8)得到

$$Ma = \left( \sum_{o=1}^{N_o} (T_o - S_o^H P_1 D^{-1} P_1^T S_o) \right) a = 0 \quad (15)$$

相比式(8), 式(15)避免了奇异矩阵逆矩阵计算。

#### 3.2 a 矩阵计算

式(9)在求解  $a$  的过程中需要求  $nN_i$  阶方阵  $M_{\text{sub}}$  的逆矩阵,  $n$  不小于系统阶次, 当系统输入大于 1, 即  $N_i > 1$ , 矩阵  $M_{\text{sub}}$  将会是一个奇异矩阵, 求解其逆矩阵将会导致较大误差。为求解系数矩阵  $a$ , 本文采用奇异值的方式求解  $M_{\text{sub}}$  的伪逆矩阵。

$$M_{\text{sub}} = USV^T = (U_1 \ U_2) \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \approx 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} = U_1 S_1 V_1^T \quad (16)$$

式中  $U_1 \in \mathbb{R}^{(n+1) \times N}$ ,  $S_1 \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $V_1 \in \mathbb{R}^{j \times N}$ 。在实际应用中,  $S_1$  的确定与 3.1 类似, 这里不加赘述。则可以得到  $M_{\text{sub}}^+ = V_1 (S_1)^{-1} U$ , 这样就可以避免奇异矩阵  $M_{\text{sub}}$  的求逆过程。

采用本文方法对第 2 节中的 7 自由度系统进行分析。计算过程中能量阈值  $E_{\text{thd}}$  设为 97%, 可以看出, 在本文方法所得稳定图中系统固有频率形成了稳定轴, 并且虚假频率点较少, 从中将非常容易获取系统极点。表 1 为原始 p\_LSCF ( $T_R = T_M = 1^{-10}$ ) 与本文提出的 p\_LSCF 所得的结果对比。表 2 给出了不同噪声水平下, 两种方法的最大识别误差, 可以看出, 两种方法识别精度接近。该系统 3 和 4 阶以及 5 和 6 阶的频率非常接近, 从识别结果看出本文方法

对密集模态也具有高识别精度。与原始方法相比, 本文方法在保持识别精度的前提下可自动得到清晰稳定图, 避免人为尝试设置不同参数。在同一台计算机基于 Matlab 实现两种算法分析以上数据, 原始和改进 p\_LSCF 分别需要 7.08 s 和 7.97 s, 可见原始和改进 p\_LSCF 具有相似计算量。

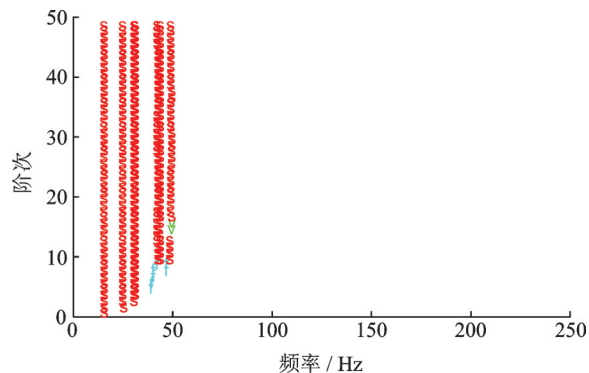


图 3 本文改进 p\_LSCF 的稳定图

Fig. 3 Stabilization diagram for improved p\_LSCF

表 1 算法改进前后模态参数比较

Tab. 1 Comparison of identified model parameters between p\_LSCF and improved p\_LSCF

阶次	频率					阻尼比				
	理论值/ Hz	改进 p_LSCF		原始 p_LSCF		理论 值/%	改进 p_LSCF		原始 p_LSCF	
		计算值/Hz	误差/%	计算值/Hz	误差/%		计算值/%	误差/%	计算值/%	误差/%
1	13.387	13.387	0.004	13.388	0.007	1.381	1.379	0.129	1.385	0.320
2	22.848	22.858	0.044	22.856	0.035	2.223	2.189	1.543	2.174	2.187
3	28.174	28.194	0.070	28.190	0.056	2.712	2.698	0.521	2.686	0.943
4	28.868	28.877	0.031	28.871	0.010	2.776	2.719	2.064	2.707	2.475
5	40.145	40.137	0.019	40.119	0.065	3.823	3.751	1.886	3.747	1.993
6	41.386	41.365	0.051	41.373	0.031	3.939	3.980	1.051	3.978	0.980
7	46.900	46.945	0.096	46.965	0.139	4.454	4.202	5.666	4.169	6.395

表 2 不同噪声下识别精度比较

Tab. 2 Comparison of identified model parameters under different noise levels

噪声水 平/%	频率最大误差/%		阻尼比最大误差/%	
	改进 p_LSCF	原始 p_LSCF	改进 p_LSCF	原始 p_LSCF
10	0.096	0.139	5.666	6.395
20	0.253	0.428	12.75	13.307
30	0.626	0.646	16.851	19.219

### 4 实例分析

将本文方法应用于葡萄牙 InfanteD.Henrique 大桥的模态参数识别中, 具体描述参考文献[8]。桥梁在环境激励下振动, 在桥梁的 4 个纵向截面上布置

了 12 个加速度传感器, 每一纵向截面上布置 3 个传感器, 一个垂直于侧面, 另 2 个垂直于桥面, 如图 4 所示。采样频率为 12.5 Hz, 对半小时的数据进行分析, 即每个通道 22500 个数据。

对于环境激励响应分析, 采用系统正功率谱密度<sup>[9]</sup>替代频响函数。为了充分识别所有模态, 以所有测点为参考, 即  $N_i = 12$ ,  $N_o = 12$ , 一共可以得到 144 个正功率谱密度函数, 每通道频谱线数为 256。假设最高阶为 50, 采用原始 p\_LSCF 和本文提出的改进 p\_LSCF 分别进行分析并构造稳定图。其中原始 p\_LSCF 经过多次尝试, 本文列出三个效果较好的稳定图, 如图 5 所示。可以看出在不同的参数下, 识别结果差距很大, 其中当  $T_R = 1^{-5}$ ,  $T_M = 1^{-25}$  时效果较好, 本文采用该结果用以对比分析。图 6 为本



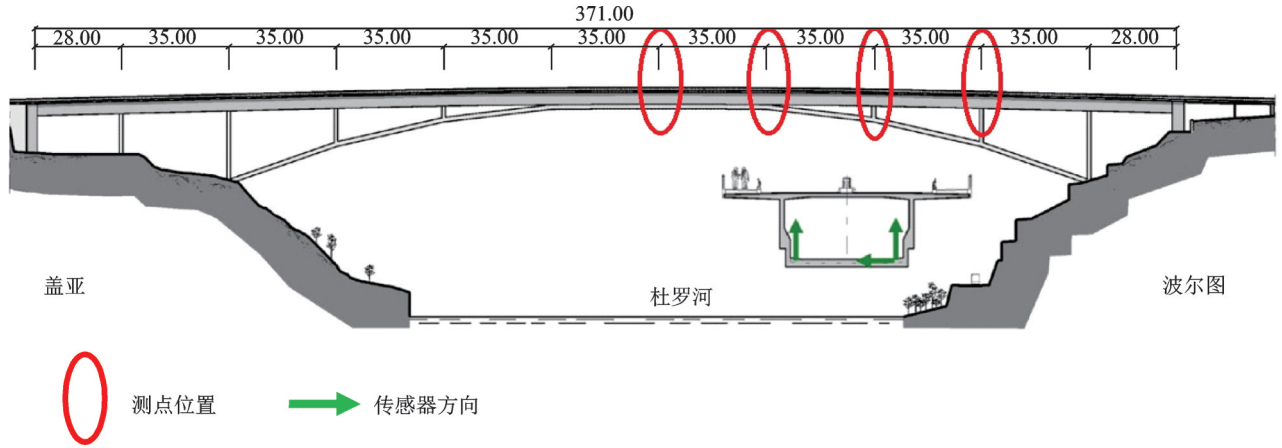


图4 大桥测点布置(单位:m)

Fig. 4 Layout of measurement points for Infante D. Henrique bridge (Unit: m)

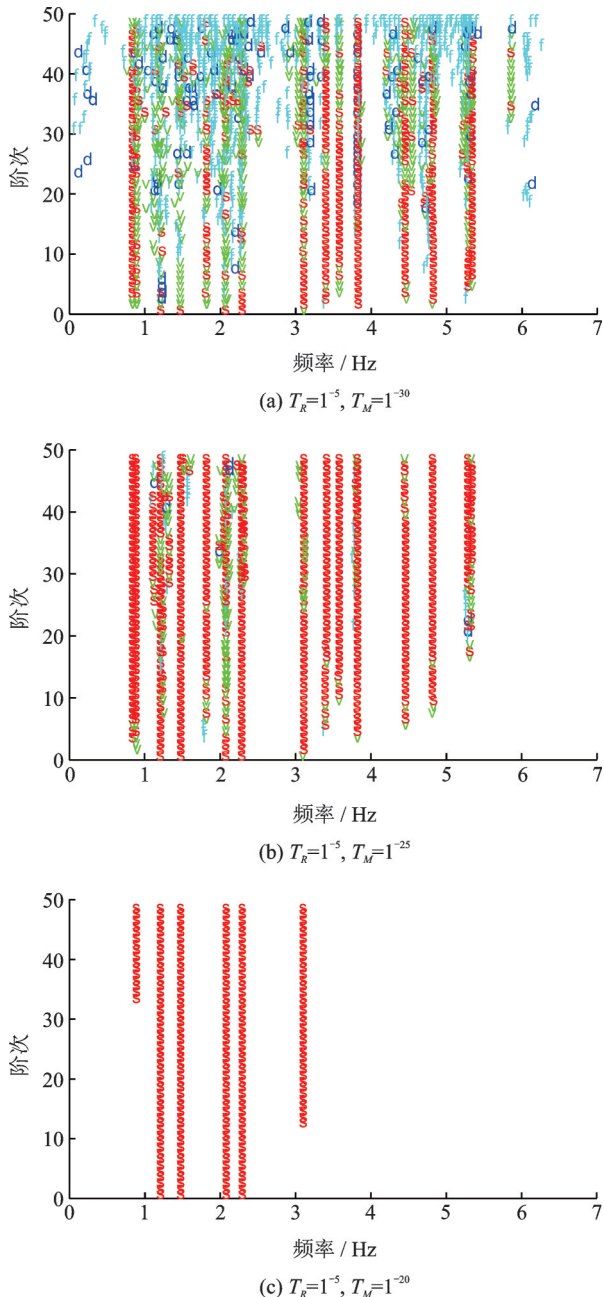


图5 原始p\_LSCF在不同容差下的稳定图

Fig. 5 Stabilization diagram for traditional p\_LSCF under different tolerance

文提出方法的稳定图,结果较为清晰。为了便于参考,本文也采用了COV-SSI方法<sup>[10]</sup>对数据进行分析,所得结果对比如表3所示。可以看出,三者识别结果总体一致,在阻尼比上差异相对较大(由于数据较小),其中原始p\_LSCF与改进p\_LSCF结果更接近。从实例分析可知,本文方法在不失精度的前提下可自动得到清晰稳定图,更有利于参数跟踪。在同一台计算机基于Matlab实现算法分析上述数据,原始和改进p\_LSCF分别需要27.11 s和31.14 s,可见原始和改进p\_LSCF具有相似计算量。

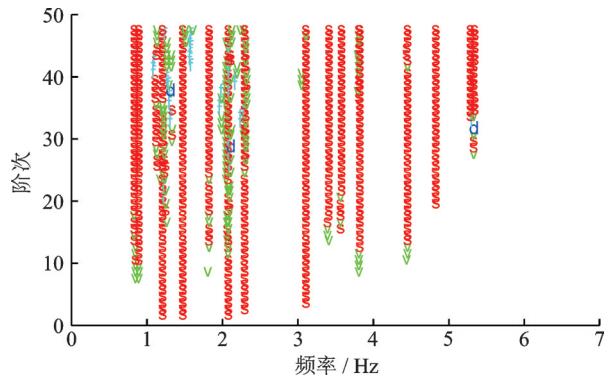


图6 本文提出方法的稳定图

Fig. 6 Stabilization diagram for improved p\_LSCF

### 5 结论

采用多参考最小二乘复频域法对实际结构分析时,通常需要对奇异矩阵 $R_0$ 和 $M_{sub}$ 进行伪逆计算,不同伪逆计算方法和参数设置会直接影响识别结果正确性。本文主要针对 $R_0$ 和 $M_{sub}$ 伪逆矩阵计算过程进行了优化:1)基于 $R_0$ 是对称矩阵的特点,采用特征值分解求解 $R_0$ 伪逆矩阵,根据矩阵特征值确定矩阵的秩;2)在计算 $M_{sub}$ 伪逆矩阵时,采用奇异值分解计

表3 参数识别结果对比  
Tab.3 Comparison of the identification results

阶次	频率/Hz			阻尼比/%		
	SSI	改进 p_ LSCF	原始 p_ LSCF	SSI	改进 p_ LSCF	原始 p_ LSCF
1	0.780	0.779	0.779	0.488	0.465	0.455
2	0.823	0.827	0.827	1.489	0.899	0.877
3	1.147	1.147	1.146	0.600	0.460	0.559
4	1.415	1.416	1.416	0.483	0.395	0.396
5	1.756	1.755	1.755	0.462	0.362	0.343
6	2.015	2.017	2.017	0.377	0.502	0.471
7	2.229	2.232	2.232	0.511	0.581	0.619
8	3.044	3.046	3.047	0.585	0.595	0.621
9	3.341	3.345	3.345	0.572	0.533	0.533
10	3.527	3.517	3.518	0.338	0.334	0.342
11	3.768	3.769	3.769	0.469	0.405	0.404
12	4.384	4.396	4.398	0.774	0.508	0.491
13	4.772	4.762	4.763	0.643	0.377	0.373
14	5.213	5.226	5.225	0.475	0.376	0.358
15	5.267	5.275	5.277	0.313	0.498	0.383

算  $M_{\text{sub}}$  的伪逆矩阵,根据矩阵奇异值确定矩阵的秩。数值仿真和实例分析表明,相比于原始方法,本文方法在保持识别精度的前提下可得到更清晰稳定图,能更加容易和可靠地识别系统模式。

#### 参考文献:

- [1] Guillaume P, Verboven P, Vanlanduit S. Frequency-domain maximum likelihood identification of modal parameters with confidence intervals [C]. Proceeding of ISMA 23, 1998.
- [2] Guillaume P, Verboven P, Vanlanduit S, et al. A poly-reference implementation of the least-squares complex frequency domain estimator [C]. Proceeding of the 21st International Modal Analysis Conference, Kissimmee, USA, 2003.
- [3] LMS International. The LMS Theory and Background Book [M]. Leuven, Belgium, 2000.
- [4] Lin Chang-Sheng. Frequency-domain approach for the parametric identification of structures with modal interference [J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2019, 33 (1): 4081-4091.
- [5] 石海荣,赵海峰,周国强. PolyMAX法在自升式平台模型损伤检测中的应用 [J]. 机械设计与制造工程, 2016, 45(3): 93-97.
- [6] Shi Hairong, Zhao Haifeng, Zhou Guoqiang. Application of PolyMAX method in the damage detection of offshore platform [J]. Machine Design and Manufacturing Engineering, 2016, 45(3): 93-97.
- [7] Zhang Guowen, Ma Jinghua, Chen Zhou, et al. Automated eigensystem realisation algorithm for operational modal analysis [J]. Journal of Sound and Vibration, 2014, 333 (15): 3550-3563.
- [8] Rolain Y, Pintelon R, Xu K Q, et al. Best conditioned parametric identification of transfer function models in the frequency domain [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1995, 40(11): 1954-1960.
- [9] Magalhaes Filipe, Cunha Alvaro, Caetano Elsa. Online automatic identification of the modal parameters of a long span arch bridge [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2009, 23(2): 316-329.
- [10] Peeters B, Van der Auweraer H, Vanhollenbeke F, et al. Operational modal analysis for estimating the dynamic properties of a stadium structure during a football game [J]. Shock and Vibration, 2007, 14 (4): 283-303.
- [11] Reynders E, Pintelon R, De Roeck G. Uncertainty bounds on modal parameters obtained from stochastic subspace identification [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2008, 22(4): 948-969.

## Numerical analysis and optimization of poly-reference least-squares complex frequency-domain method

ZHANG Guo-wen<sup>1</sup>, TANG Bao-ping<sup>2</sup>, CHEN Zhuo<sup>3</sup>

(1.College of Automation, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China;

2.State Key Laboratory of Mechanical Transmission, Chongqing University, Chongqing 400044, China;

3.State Key Laboratory of Bridge Structure Dynamics, Chongqing Communication Research &

Design Institute, Chongqing 400067, China)

**Abstract:** This paper analyzes the numerical problems in practical application of polyreference least-squares complex frequency-domain method, and proposes an optimization algorithm of polyreference least-squares complex frequency-domain method. The order of a real structure that cannot be estimated accurately is always overestimated to find all physical modes. Theoretical and numerical analyses show that pseudo-inverse calculation of some singular matrixes is required in the analyses process due to the overestimation of the order of the system and the selection of pseudo-inverse calculation method and parameters has a great influence on the recognition results. Eigenvalue decomposition is used to calculate the pseudo-inverse matrix of the singular matrix  $R_o$ , singular value decomposition is used to calculate the pseudo-inverse matrix of the singular matrix  $M_{sub}$ , and the order is automatically determined by energy index. A clear stabilization diagram can be obtained automatically without losing accuracy. The proposed method is applied on the parameter estimation of a linear time-invariant system of 7 degrees of freedom and of the Infante D. Henrique bridge located at the North of Portugal, it is demonstrated that the proposed method can identify physical modes easily without losing accuracy.

**Key words:** modal analysis; poly-reference least-squares complex frequency-domain method; eigenvalue decomposition; singular value decomposition; stabilization diagram

作者简介: 章国稳(1985-),男,讲师。电话:(0571)87713533;E-mail:zgw137@163.com