

# 多稳态压电振动能量采集器的非线性动力学特性及其实验研究

谭江平, 王光庆, 鞠 洋, 李 颖, 赵泽翔

(浙江工商大学信息与电子工程学院, 浙江 杭州 310018)

**摘要:** 为了提高非线性双稳态压电振动能量采集器的输出性能, 提出了一种基于磁-机-压电耦合的非线性多稳态压电能量采集器, 通过在双稳态压电振动能量采集器模型基础上增加一对外部磁铁, 构造了具有四个稳态的非线性压电振动能量采集器。利用磁偶极子理论建立了采集器悬臂梁末端磁铁与外部磁铁之间的非线性磁力模型; 利用 Hamilton 原理和 Raleigh-Ritz 方法建立了四稳态压电振动能量采集系统的分布参数机电耦合动力学模型; 仿真分析了磁铁水平间距和外部磁铁间距等参数对系统非线性磁力、非线性分岔特性和动力学特性的影响。制作了四稳态压电振动能量采集器原理样机, 搭建了样机性能测试平台, 实验结果与仿真结果具有较好的吻合度。研究结果表明四稳态压电振动能量采集器可以在低激励水平作用下显著提高能量收集效率, 且具有较宽的工作频带。

**关键词:** 机电耦合动力学; 多稳态压电能量采集器; 非线性磁力

**中图分类号:** O322; TM91; TN384 **文献标志码:** **文章编号:** 1004-4523(2021)04-0765-10

**DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2021.04.013

## 引 言

压电振动能量采集器是一种利用压电陶瓷正压电效应将环境中的振动能量转换成电能的新型机电器件, 因其具有绿色环保、结构简单、寿命长、能量转换效率高等优点, 广泛应用于微机电系统、便携式电子设备和无线通信与传感网络中<sup>[1]</sup>。典型的压电振动能量采集器是由压电单晶或双晶悬臂梁构成的线性谐振式振荡器。当采集器谐振频率与环境振动频率一致时, 采集器产生谐振, 导致压电片形变而产生输出电荷<sup>[2-6]</sup>。为了拓宽线性压电能量采集器的工作频率范围, 且有效地采集环境振动能量, 提出了一种由非线性磁力构成的双稳态压电振动能量采集器 (Bi-stable Piezoelectric Energy Harvester, BPEH), 仿真与实验均证明非线性磁力的引入极大地增加了能量采集器的工作频带和输出性能<sup>[7-10]</sup>。但 BPEH 的两个势阱之间的间距小、势垒高度大, 导致其输出性能大大降低, 特别是当环境振动能量较小, 不足以克服势垒的阻碍时, BPEH 被限制在某个势阱内做小幅值的阱内运动。多稳态压电振动能量采集器可以在环境振动较小的情况下表现出更优越的能量采集性能, 引起了许多学者的关注。文献[11-12]建立了三稳态压电能量采集器 (Tri-stable Piezoelectric

Energy Harvester, TPEH) 结构的理论模型, 并通过数值仿真和实验验证了其理论模型的正确性, 研究结果表明 TPEH 比 BPEH 具有更宽的势阱宽度和更低的势垒高度, 这极大地拓宽了能量采集器的工作频带。Zhou 等<sup>[13-15]</sup>研究了四稳态压电振动能量系统 (Quad-stable Piezoelectric Energy Harvester, QPEH), 发现该系统拥有较宽的势阱宽度和较低的势垒高度, 在较小的环境激励下可以发生大幅阱间运动, 输出较高的电压。尽管四稳态压电能量采集器相较于双、三稳态能量采集器表现出更优越的能量采集效率。但针对四稳态压电能量采集器的非线性分岔、多稳态形成机制以及非线性机电耦合振动机理等问题还未得到有效的解决。本文提出了一种基于磁-机-压电耦合的四稳态压电振动能量采集器, 通过在双稳态压电振动能量采集器结构基础上引入一对外部磁铁, 对称布置于中心外部磁铁的上下两侧。首先利用磁偶极子理论建立了采集器悬臂梁末端磁铁与外部磁铁之间的非线性磁力模型; 其次, 利用 Hamilton 原理和 Raleigh-Ritz 方法建立了四稳态压电振动能量采集系统的分布参数机电耦合动力学模型; 仿真分析了磁铁水平间距和外部磁铁间距等参数对系统非线性磁力、非线性分岔特性和动力学特性的影响。最后, 通过实验验证了仿真结果的正确性。

收稿日期: 2020-01-06; 修订日期: 2020-05-19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51777192); 浙江省自然科学基金资助项目(LY20E070001)

# 1 四稳态压电能量采集器理论模型

## 1.1 四稳态压电振动能量采集器结构

图1所示为四稳态压电振动能量采集器结构模型,将长度为 $L_p$ 的压电片对称粘贴在长度为 $L$ 的悬臂梁根部。两压电片沿厚度方向极化,且极化方向相反。悬臂梁末端连接一块磁铁A,磁铁(B,C,D)固定在离磁铁A水平距离为 $d$ 的基座上,磁铁C与磁铁A位于同一水平轴线上,磁铁B和磁铁D对称地布置在磁铁C的上、下两侧,它们与磁铁C之间的中心距离为 $d_g$ 。磁铁A与磁铁(B,C,D)的相向面极性为N极,表现出磁场排斥力。 $R$ 表示低功耗电子负载的等效电阻,且与两压电片串联连接。通过调节磁铁水平间距 $d$ 和外部磁铁间距 $d_g$ 的大小,采集器具有四个稳定的平衡位置和三个不稳定的平衡位置,表现为四稳态运动状态。

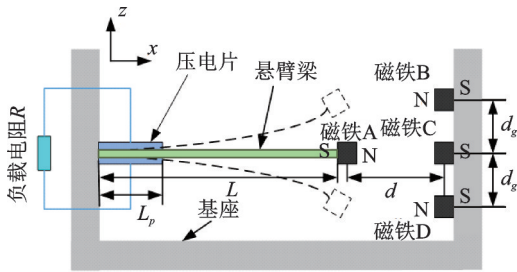


图1 四稳态压电振动能量采集器

Fig. 1 Schematic of the QPEH

以悬臂梁根部中心位置为坐标原点,水平方向为 $x$ 轴,垂直方向为 $z$ 轴建立坐标系。为了方便把 $x$ 轴记作下标1, $z$ 轴记作下标3,则压电本构方程可表示为

$$\begin{cases} T_1 = C_{11}^E S_1 - e_{31} E_3 \\ D_3 = e_{31} S_1 + \epsilon_{33}^S E_3 \end{cases} \quad (1)$$

式中  $T_1$ 为压电片的轴向应变; $D_3$ 为竖直方向的电位移; $C_{11}^E$ 是电场 $E$ 恒定时的弹性模量; $\epsilon_{33}^S$ 为应变 $S$ 恒定时的介电常数; $e_{31}$ 为机电耦合系数; $E_3$ 为压电片 $z$ 方向电场强度; $S_1$ 为压电片轴向应变。

由于两压电片输出端采用串联连接,则压电片中的电场强度可表示为

$$E_3 = -\frac{v(t)}{2h_p} \quad (2)$$

式中  $v(t)$ 为采集输出电压, $h_p$ 为压电片的厚度。

根据欧拉-伯努利梁理论,压电梁的轴向应变可表示为

$$S_1(x, z, t) = -z \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (3)$$

式中  $w(x, t)$ 表示悬臂梁任意一点 $x$ 处的振动位移。

## 1.2 拉格朗日方程

利用欧拉-伯努利梁理论和哈密顿原理建立四稳态压电振动能量采集器的动力学方程,该系统的拉格朗日方程可表示为

$$L(x, t) = T_b + T_m + W_p - U_b - U_m \quad (4)$$

式中  $T_b$ 为压电片和金属基层的动能; $T_m$ 为末端磁铁A的动能; $W_p$ 为压电片的电能; $U_b$ 为压电片和金属基层的势能; $U_m$ 为悬臂梁末端磁铁A与外部磁铁(B,C,D)之间的势能。它们的具体表达式分别如下:

$$T_b = \frac{1}{2} \rho_s b_s h_s \int_0^L \left[ \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + \dot{z}(t) \right]^2 dx + \rho_p b_p h_p \int_0^{L_p} \left[ \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + \dot{z}(t) \right]^2 dx \quad (5)$$

$$T_m = \frac{1}{2} M_t \left[ \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=L} + \dot{z}(t) \right]^2 + \frac{1}{2} I_t \left[ \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t \partial x} \Big|_{x=L} \right]^2 \quad (6)$$

$$W_p = \frac{1}{4} e_{31} v(t) b_p (h_s + h_p) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L_p} + \frac{1}{4} C_p v^2(t) \quad (7)$$

$$U_b = \frac{1}{2} EI \int_0^L \left[ \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right]^2 dx + C_{11}^E I_p \int_0^{L_p} \left[ \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right]^2 dx - \frac{1}{4} e_{31} v(t) b_p (h_s + h_p) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L_p} \quad (8)$$

式中  $w(L, t)$ 为悬臂梁末端磁铁A的横向位移; $z(t)$ 为基础激励位移; $L, b_s$ 和 $h_s$ 分别为金属基层长度、宽度和厚度; $L_p, b_p$ 和 $h_p$ 分别为压电层的长度、宽度和厚度; $I_p$ 为压电片的惯性矩; $M_t$ 为末端磁铁A的质量; $I_t$ 为末端磁铁A的转动惯量。 $EI$ 为金属基层的弯曲刚度; $C_p$ 为压电层的等效电容; $\rho_s$ 和 $\rho_p$ 分别为金属基层和压电层的密度。

## 1.3 磁场势能模型

为了便于计算磁势能,可将系统磁铁看作磁偶极子模型,如图2所示。

悬臂梁末端磁铁A与固定于基座上三个外部磁铁间的磁势能可表示为

$$U_m = \sum_{i=B}^D U_{miA} = - \sum_{i=B}^D \mathbf{B}_{iA} \cdot \mathbf{m}_A \quad (9)$$

式中  $\mathbf{B}_{iA}$  ( $i=B, C, D$ )分别为磁铁 $i$ 在磁铁A处产生的磁通量密度; $\mathbf{m}_A$ 为磁铁A的磁偶极矩。且

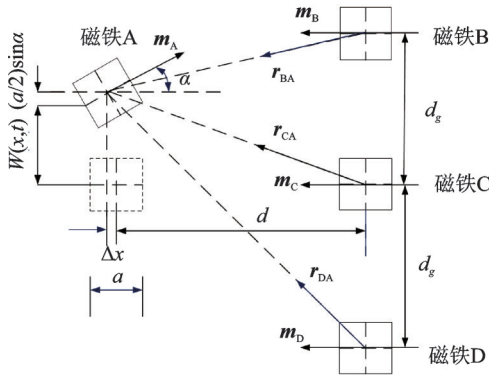


图2 非线性磁力模型

Fig.2 Magnetic force model of the QPEH

$$B_{iA} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \frac{\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{r}_{iA}}{\|\mathbf{r}_{iA}\|^3} \quad (10)$$

$$\mathbf{m}_A = [M_A V_A \cos \alpha \quad M_A V_A \sin \alpha] \quad (11)$$

$$\mathbf{r}_{BA} = [-d \quad w(L, t) - d_g] \quad (12)$$

$$\mathbf{r}_{CA} = [-d \quad w(L, t)]$$

$$\mathbf{r}_{DA} = [-d \quad w(L, t) + d_g]$$

式中  $\mathbf{r}_{iA}$  ( $i=B, C, D$ ) 为磁铁  $i$  到磁铁  $A$  的方向向量;  $\|\cdot\|_2$  为 2 范数运算;  $\nabla$  为向量梯度算子;  $\mu_0$  为真空磁导率;  $M_i$  为磁铁  $i$  的磁化强度;  $V_i$  为磁铁  $i$  的体积。

将式(10)-(12)代入式(9)得磁铁  $B, C, D$  与悬臂梁末端磁铁  $A$  之间的势能为

$$U_m = \sum_{i=B}^D \alpha_i \frac{[-\beta_i^2 + 2d^2 - 3d\beta_i w'(L, t)]}{\sqrt{[w'(L, t)]^2 + 1} (\beta_i^2 + d^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (13)$$

式中  $\alpha_i = \frac{\mu_0 M_A V_A M_i V_i}{4\pi}$ ,  $\beta_i = w(L, t) - d_i$ ,  $d_B = -d_g$ ,  $d_C = 0$ ,  $d_D = d_g$ 。

则系统的非线性磁力可表示为

$$F_m = \frac{\partial U_m}{\partial w} \quad (14)$$

### 1.4 压电悬臂梁振动模态

考虑到环境振动通常为低频振动,悬臂梁一阶弯曲振动模态占主导作用,高阶模态影响较小,故本文仅考虑压电悬臂梁的一阶弯曲振动模态,因此可将位移  $w(x, t)$  表示为

$$w(x, t) = \varphi(x)q(t) \quad (15)$$

式中  $\varphi(x)$  为第一阶模态振型,  $q(t)$  为广义模态坐标;模态振型可表示为

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_{11}(x), & 0 \leq x < L_p \\ \varphi_{12}(x), & L_p \leq x \leq L \end{cases} \quad (16)$$

且

$$\varphi_{11}(x) = C_1 \cos(\beta_1 x) + C_2 \sin(\beta_1 x) + C_3 \cosh(\beta_1 x) + C_4 \sinh(\beta_1 x)$$

$$\varphi_{12}(x) = D_1 \cos(\beta_2 x) + D_2 \sin(\beta_2 x) + D_3 \cosh(\beta_2 x) + D_4 \sinh(\beta_2 x)$$

式中  $\varphi_{11}(x)$  为不含压电层的模态函数;  $\varphi_{12}(x)$  为含压电层的模态函数。系数  $C_i, D_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) 为由边界条件确定的常数项;  $\beta_1$  和  $\beta_2$  为特征方程确定的屈曲特征值。

### 1.5 动力学方程

利用模态函数的正交性,可得拉格朗日方程

$$L(t) = \frac{1}{2} \bar{M} \dot{q}(t)^2 + \frac{1}{2} q(t) \bar{M} \omega_0^2 + \theta v(t) q(t) +$$

$$\Gamma \dot{q}(t) \dot{z}(t) + \frac{1}{4} C_p v(t)^2 + \frac{1}{2} \bar{M} \dot{z}(t)^2 - U_m \quad (17)$$

式中  $\omega_0$  为固有频率;  $\theta$  为机电耦合项;  $\Gamma$  为激励系数项;  $\bar{M}$  为模态质量,它们的具体表达式为:

$$\theta = \frac{1}{2} b e_{31} \varphi'_{11}(L_p)(h_s + h_p)$$

$$\Gamma = (2\rho_p b h_p + \rho_s b h_s) \int_0^{L_p} \varphi_{11}(x) dx +$$

$$\rho_s b h_s \int_{L_p}^L \varphi_{12}(x) dx + M_i \varphi_{12}(L)$$

$$\bar{M} = \rho_s b h_s L_s + 2\rho_p b h_p L_p + M_i$$

则系统的动态响应方程可由下式求得:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = F(t) \quad (18)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial L}{\partial v} = Q(t) \quad (19)$$

式中  $F(t) = -2\xi \omega_0 \dot{q}(t)$  为广义耗散力,  $\xi$  为机械阻尼系数;  $Q(t) = v(t)/R$  为广义输出电荷。将式(17)代入式(18)和(19)得系统的动力学方程:

$$\ddot{q}(t)^2 + 2\xi \omega_0 \dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) - \theta v(t) + g[q(t)] = -\Gamma \dot{z}(t) \quad (20)$$

$$\theta q(t) + \frac{1}{2} C_p \dot{v}(t) - \frac{v(t)}{R} = 0 \quad (21)$$

式中  $\xi = c \int_0^L \varphi(x)^2 dx$ ;  $g[q(t)] = \frac{\partial U_m}{\partial q(t)}$ 。

## 2 数值仿真

利用 MATLAB 软件对四稳态压电振动能量采集系统进行相关输出特性的数值仿真和分析。本文采用的材料和结构参数如表 1 所示,其中 PZT 表示压电陶瓷 (Piezoelectric Ceramics)。

### 2.1 势能和磁力分析

本节主要研究了水平间距  $d$  和外部磁铁间距  $d_g$  等系统参数对 QPEH 的非线性磁力和势能的影响。图 3 (a) 和 (b) 所示为四种不同水平间隙距离 ( $d=13, 15, 17, 19$  mm) 的势阱和非线性磁力仿真计算结

表1 材料和结构参数表

Tab. 1 Materials parameters of the QPEH

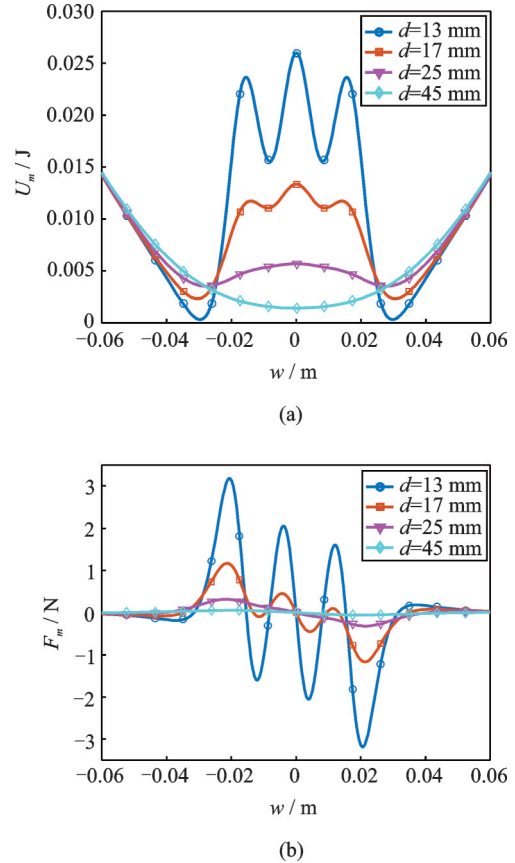
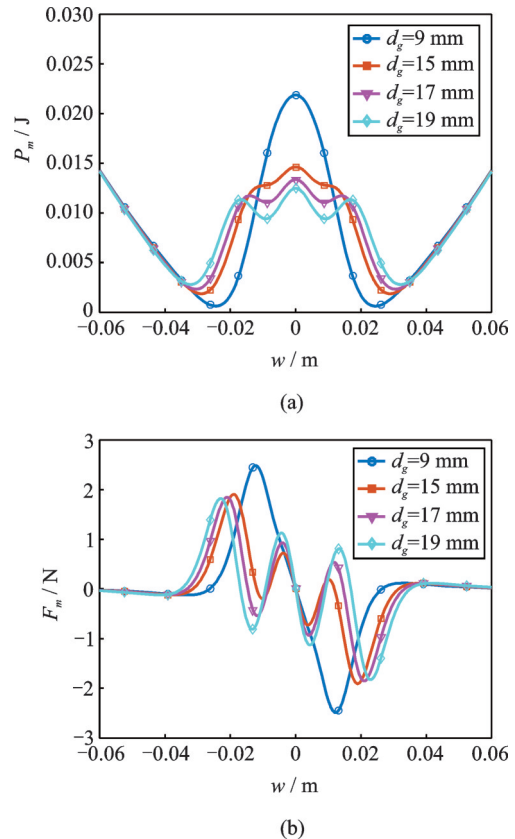
参数	数值
悬臂梁长度/mm	70
悬臂梁和PZT宽度/mm	10
PZT密度/( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )	7450
悬臂梁密度( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )	790
PZT长度/mm	10
PZT厚度/mm	0.5
悬臂梁厚度/mm	0.15
PZT弹性模量/GPa	21.45
悬臂梁弹性模量/GPa	212
真空介电率 $\epsilon_0/(\text{F}\cdot\text{m}^{-1})$	$8.854\times 10^{12}$
介电常数/ $(\text{F}\cdot\text{m}^{-1})$	$1500\epsilon_0$
压电应力常数/ $(\text{C}\cdot\text{m}^{-1})$	-4.08
磁铁长/mm	20
磁铁宽/mm	10
磁铁厚/mm	2.75
磁化强度/ $(\text{A}\cdot\text{m}^{-1})$	$0.92\times 10^6$
磁铁密度/ $(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	7500

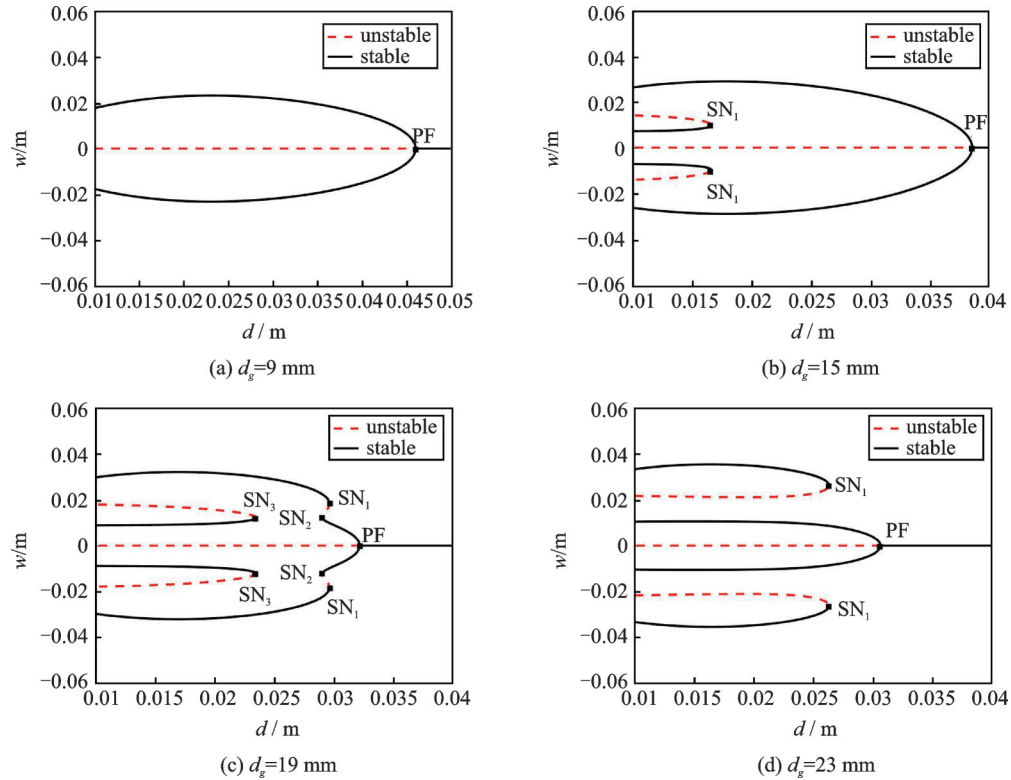
果,由图3可以看出,非线性磁力和势阱深度随水平间距 $d$ 的减小而增大。当 $d=13\text{ mm}$ 时,内阱深远远小于外阱深。在这种情况下,内阱和外阱之间的势垒很大,需要较大的激励力来克服外阱和内阱之间的势垒振荡。随着 $d$ 的增大,内阱深与外阱深的差距变小,当 $d=17\text{ mm}$ 时,QPEH能在四个阱中很容易地振荡,产生较高的能量回收率。随着 $d$ 进一步增大到 $25\text{ mm}$ ,系统只有两个势能阱,表现为双稳态。当 $d$ 增大到一定距离,如 $d=45\text{ mm}$ 时,磁力效果消失,系统表现为单稳态。

图4(a)和(b)所示为磁铁垂直间距 $d_g=9, 15, 17, 19\text{ mm}$ 时系统的势能图和磁力仿真计算结果。当外部间距较小时,如 $d_g=9\text{ mm}$ ,势能图中只有两个对称的势阱,对应的非线性磁力只有三个零点,系统表现为双稳态。随着 $d_g$ 的增大,势能曲线出现四个势阱,非线性磁力具有七个零点,表现为四稳态。由此可以看出随着垂直间距 $d_g$ 的逐渐增大,采集器的运动状态由双稳态运动跳转到四稳态运动。

## 2.2 系统平衡点分岔特性

图5所示所示为磁铁垂直间距 $d_g=9, 15, 19$ 和 $23\text{ mm}$ 时系统在 $(d, w)$ 空间内的平衡点分岔图,其中实线表示稳定平衡解,虚线表示非稳定平衡解。当磁铁垂直间距较小时,即 $d_g=9\text{ mm}$ ,如图5(a)所示,系统只有一个叉形分岔点PF,当水平间距 $d > d_{\text{PF}}$ 时,系统只有一个稳定的零平衡解,采集器表现出单稳态运动;当 $d < d_{\text{PF}}$ 时,系统存在两个稳定的平

图3 不同水平间距 $d$ 下的势能和磁力Fig. 3 Potential energy and magnetic force with different  $d$ 图4 不同垂直间距 $d_g$ 下的势能和磁力Fig. 4 Potential energy and magnetic force with different  $d_g$ . When the vertical distance  $d_g$  is small, there is only one stable zero equilibrium point, and the collector shows single steady-state motion. As  $d_g$  increases, the pitchfork bifurcation point PF shifts to the left, and

图5 不同垂直间距 $d_g$ 的采集器静态解分岔特性Fig. 5 Bifurcations of the equilibrium solutions with different  $d_g$ 

$d < d_{PF}$  内出现两个鞍形分岔点  $SN_1$ ,  $PF$  和  $SN_1$  将水平间距  $d$  分成三个区间, 当  $d > d_{PF}$  时, 系统只有一个零稳态解, 采集器表现出单稳态结构; 当  $d_{SN_1} < d < d_{PF}$  时, 系统存在两个稳态解和一个非稳定解, 采集器表现出双稳态运动; 当  $d < d_{SN_1}$  时, 系统存在四个稳态和三个非稳态解, 采集器表现出四稳态运动特性, 如图 5(b) 所示。进一步增大  $d_g$  到 15 mm, 如图 5(c) 所示, 此时系统有一个叉形分岔点  $PF$  和三个鞍形分岔点  $SN_1$ ,  $SN_2$  和  $SN_3$ , 它们将水平间距  $d$  分成 5 个区间, 当  $d < d_{SN_3}$  时, 此时系统有四个稳定的平衡点和三个不稳定的平衡点, 表现为四稳态系统。当  $d_{SN_3} < d < d_{SN_2}$  时, 系统具有两个稳态解和一个非稳态解, 表现出双稳态运动特性; 当  $d_{SN_2} < d < d_{SN_1}$  时, 系统具有四个稳态解和三个非稳态解, 表现出四稳态运动特性; 当  $d_{SN_1} < d < d_{PF}$  时, 系统又表现出双稳态运动特性, 当  $d_{PF} < d$  时系统表现出单稳态运动特性。随着  $d_g$  的不断增大, 鞍形分岔点  $SN_3$  右移,  $SN_2$  左移, 最终在某处重合, 鞍形分岔点  $SN_3$  和  $SN_2$  消失, 只剩下鞍形分岔点  $SN_1$ , 两个鞍形分岔分支随着  $d_g$  的增大逐渐分离, 如图 5(d) 所示。随着水平间距  $d$  的不断减小, 系统依次表现出单稳态、双稳态和四稳态运动特性。

通过上述分岔分析, 发现在给定的参数空间 ( $d$ ,  $w$ ) 和垂直间距  $d_g$  条件下, 随着水平间距  $d$  的减

小, QPEH 有四种不同运动状态的跳转模式。第一个转变从单稳态直接开始到双稳态, 如图 5(a) 所示; 第二个转变从单稳态开始, 经过双稳态, 然后到四稳态, 如图 5(b) 所示; 第三个转变从单稳态开始, 依次经过双稳态到四稳态再到双稳态, 最后到四稳态, 如图 5(c) 所示; 第四个跃迁从单稳态到双稳态再到四稳态, 如图 5(d) 所示。

为了进一步说明系统的分岔特性, 如图 6 所示为水平距离  $d = 23, 25, 29, 35$  mm 时 QPEH 在 ( $d_g$ ,  $w$ ) 空间内的平衡解分岔图。图 6(a) 为水平距离  $d = 23$  mm 时的分叉图, 存在两个鞍形分岔点  $SN_1$  和  $SN_2$ 。在  $d_{gSN_2} < d_g < d_{gSN_1}$  区域, 系统表现为四稳态, 在  $d_g < d_{gSN_2}$  和  $d_g > d_{gSN_1}$  区域, 系统表现为双稳态。当  $d = 25$  mm, 如图 6(b) 所示, 鞍节分岔点  $SN_1$  向左移动, 四稳态的区域逐渐变小。随着  $d$  的进一步增大, 如图 6(c) 所示, 此时四稳态的区域变得非常小。当  $d = 35$  mm 时, 如图 6(d) 所示, 系统鞍节点消失, 叉形分岔点  $PF$  出现, 表现为双稳态系统。

### 2.3 系统动态特性分析

为探究压电能量采集器在不同频率下的输出特性, 通过频扫的方式对系统的输出性能进行仿真分析。如图 7 所示为系统在  $d_g = 21$  mm,  $d = 23$  mm,  $A = 15$  m/s<sup>2</sup>,  $R = 1$  M $\Omega$  条件下采集器末端位移, 输出电压, 输出功率和相图的输出响应。从图 7(a) 所

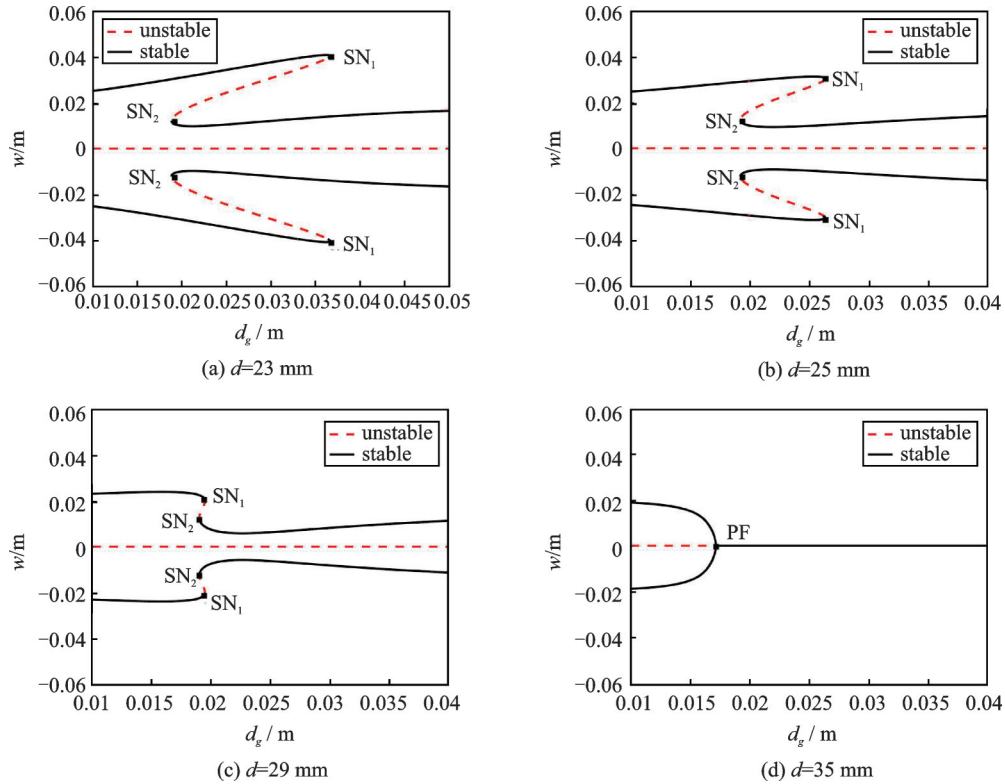


图6 不同水平间距  $d$  的采集器静态解分岔特性

Fig. 6 Bifurcations of the equilibrium solutions with different  $d$

示系统末端磁铁振动位移中可以看出在较宽的频带范围内系统具有大幅度的振动。图7(b),(c)为系统得到的输出电压和输出功率,可以看出系统在7-10 Hz的频带范围内输出电压最大值能达到2.2 V,

最大输出功率能达到0.17 mW。图7(d)所示为系统速度-位移相图,较好地体现了系统四稳态运动特性。由图7可以看出当频率在7-10 Hz范围内,采集器输出响应大幅提升。

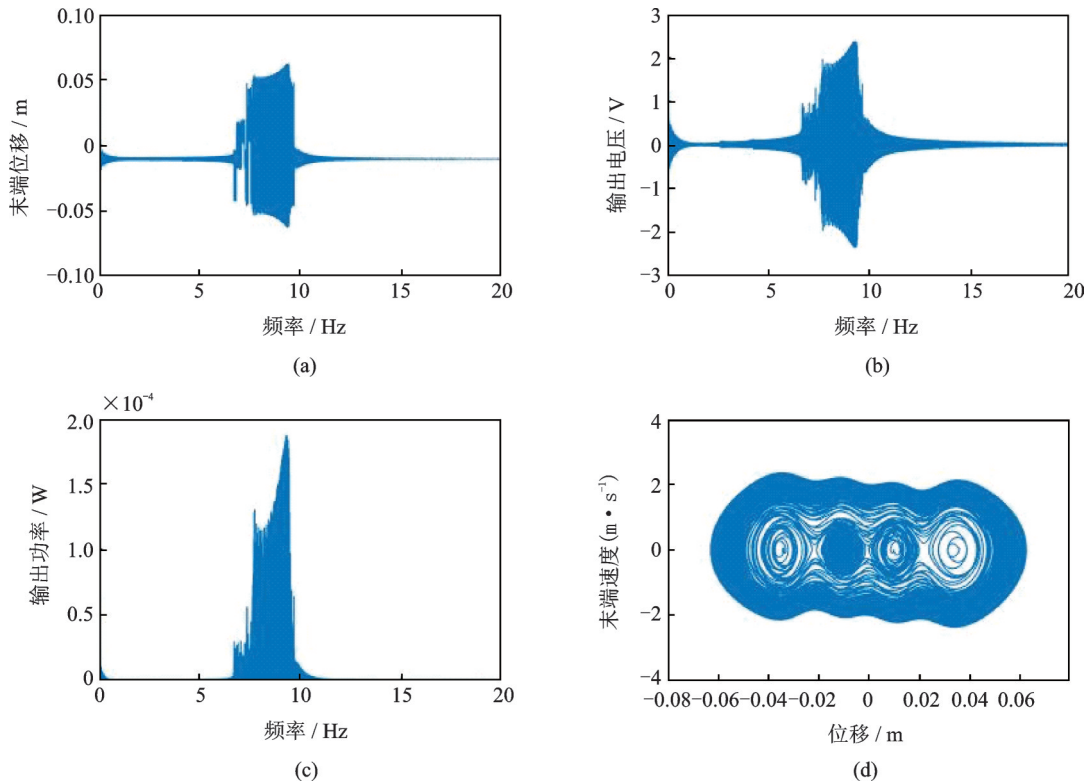


图7 采集器频率响应特性

Fig. 7 The frequency responding characteristics of the QPEH

进一步地,取激振加速度幅值 $A=7.5\text{ m/s}^2$ ,频率为 $5\text{ Hz}$ ,外部磁铁之间间距 $d_g=10\text{ mm}$ ,磁铁之间水平距离 $d=27\text{ mm}$ 时,对系统进行仿真分析得到如图8(a),(b),(c)所示的响应输出。从图8(a)中的相图可以看出压电能量采集器此时呈现双稳态特性,系统的末端振动位移为 $48\text{ mm}$ ,其输出电压和输出功率分别达到 $1.4\text{ V}$ 和 $0.07\text{ mW}$ 。调节外部磁铁

间距 $d_g=17\text{ mm}$ ,磁铁间水平间距 $d=17\text{ mm}$ ,此时系统的动态响应如图9所示。由图9(a)的相图看出此时压电能量采集器呈现四稳态运动特性。由图9可知,当系统达到稳定时的末端磁铁位移、输出电压、输出功率分别为 $60\text{ mm}$ 、 $2\text{ V}$ 和 $0.14\text{ mW}$ 。对比图8和图9所示结果可以发现采集器做四稳态运动时的输出性能远高于做双稳态运动时的输出特性。

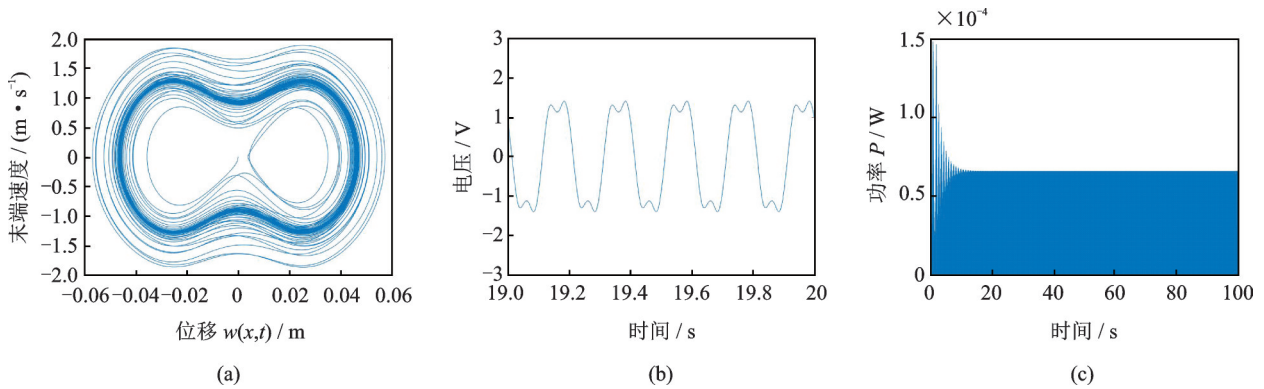


图8 采集器做双稳态运动时的时间响应特性

Fig.8 Time-history responding for bistable motion of the QPEH

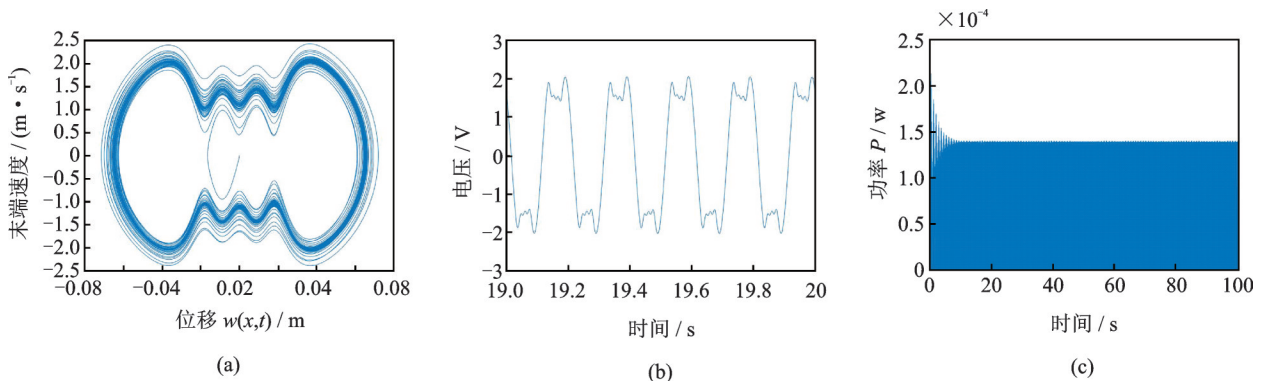


图9 采集器做四稳态运动的时间响应特性

Fig.9 Time-history responding for quad-stable motion of the QPEH

### 3 实验验证

#### 3.1 非线性磁力和势能验证

为了验证上述磁力模型的正确性,建立如图10(a)所示的磁力实验系统。它主要由QPEH、数字测力计(HF-10)、标尺等设备组成。将带有磁铁A的压电悬臂梁固定在基座上,磁铁B,C,D连接在测力计触头上;改变磁铁A的静态偏移位置,利用标尺测量其偏移值即为悬臂梁末端的静态位移,同时通过测力计读取此时磁铁之间的磁力。图10(b)是采集器在 $d=15\text{ mm}$ 和 $d_g=17\text{ mm}$ 时实验和仿真得到的势能曲线,结果表明实验得到的势能函数与仿真结果具有较好的吻合度,势能函数有四个势能阱,具有四个稳定平衡位置。图10(c)和(d)是采集器分

别在 $d=15\text{ mm}$ 、 $d_g=17\text{ mm}$ 和 $d=17\text{ mm}$ 、 $d_g=17\text{ mm}$ 时的非线性磁力实验和仿真计算结果,可以看出实验结果和计算结果吻合较好,说明本文建立的非线性磁力计算模型是正确的。

#### 3.2 动态特性实验研究

为了验证所提出四稳态动态特性的仿真结果,根据表1中的参数研制了QPEH原理样机,如图11(a)所示,两个相同的PZT层分别粘贴在悬臂梁上、下表面根部。在悬臂梁的顶端,附着一块永久磁铁。三块尺寸和型号相同的外磁体固定在底座的右侧壁上,其极化方向与悬臂梁尖端磁铁相反。QPEH的相应实验装置如图11(b)所示,QPEH安装在激振器上,信号发生器产生的谐波信号用于模拟环境中的振动,通过功率放大器放大后输入到振动器中以

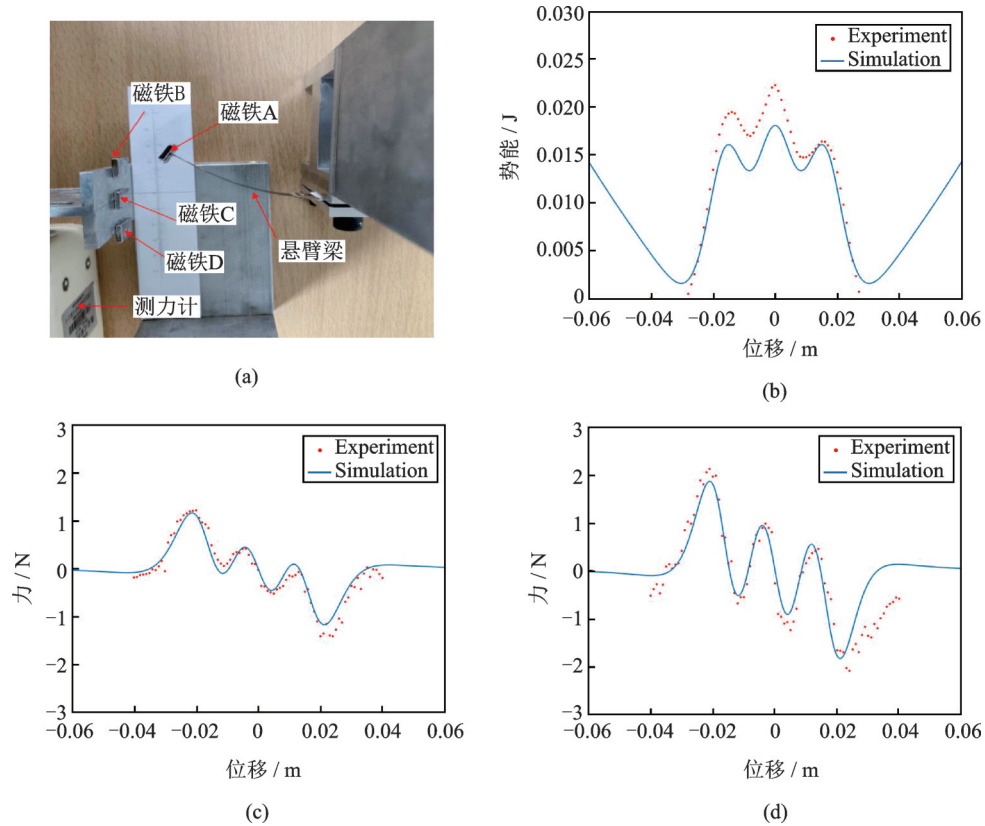
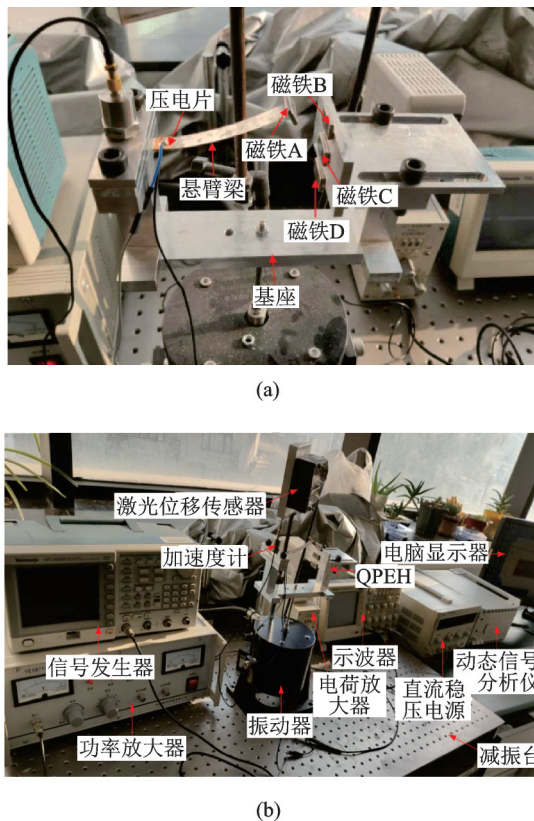


图10 磁力测试系统及其实验验证结果

Fig.10 Experiment system and the results of the magnetic force

图11 四稳态压电能量采集器原理样机及实验测试系统  
Fig.11 Prototype of the QPEH and its experimental system

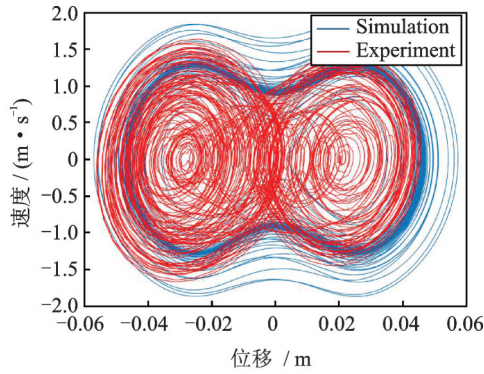
激励 QPEH 振动。加速计安装在振动器的顶部以测量加速度,用位移传感器测量 QPEH 的悬臂梁尖端

位移,用激光测振仪测量悬臂梁尖端速度,同时,输出电压由示波器采集。采集装置采集 QPEH 的基础加速度、悬臂梁尖端位移、悬臂梁尖端速度等进行分析。

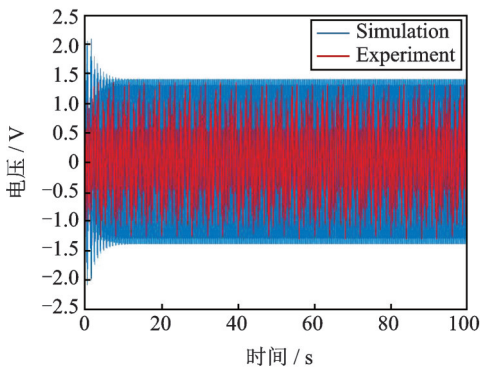
图 12 是水平距离  $d=27\text{ mm}$ ,外部磁铁间距  $d_g=10\text{ mm}$ ,基础加速度幅值为  $7.5\text{ m/s}^2$ ,激励频率为  $5\text{ Hz}$  时,压电能量采集器的动态输出性能的实验与仿真对比结果。由图 12(a) 得到的相图实验结果可知采集器表现为双稳态运动行为,实验得到的采集器末端磁铁 A 的最大振动位移和速度分别为  $40\text{ mm}$  和  $1500\text{ mm/s}$ ;由图 12(b) 所示的采集输出电压实验结果可以看出,压电能量采集器的最大输出电压达到  $1.48\text{ V}$ 。

调节水平距离  $d=17\text{ mm}$ ,外部磁铁间距  $d_g=17\text{ mm}$ ,在相同的激励幅值和激励频率作用下,压电能量采集器的输出性能实验与仿真对比结果如图 13 所示,可以看出实验结果与仿真结果基本一致,采集器系统表现为四稳态运动行为。如图 13(a) 所示,实验得到采集器末端磁铁 A 的最大位移和速度分别为  $50\text{ mm}$  和  $2200\text{ mm/s}$ 。由图 13(b) 可知实验得到的采集器最大输出电压为  $2\text{ V}$ 。与图 12 实验结果对比表明采集器做四稳态运动的输出性能高于做双稳态运动时的输出性能,这与图 8 和 9 对比结果是一致的。





(a)



(b)

图12 压电能量采集器做双稳态运动时输出特性实验与仿真对比结果

Fig.12 Comparisons between the experiments and simulations for bistable motion of the QPEH

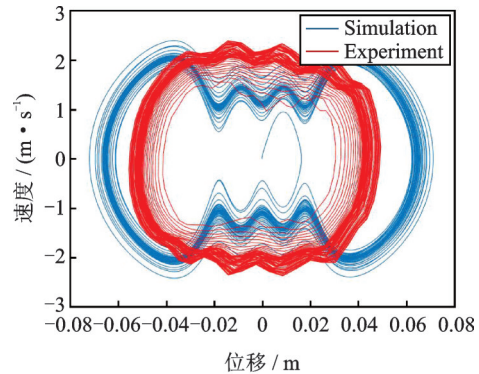
此外,从图12和13所示结果还发现,实验得到的采集器相图是非对称的,这主要是由于采集器末端磁铁A的重力效应所致<sup>[16]</sup>。当采集器沿 $w(x,t)$ 正向运动时(如图12(a)和13(a)相图右侧平面),末端磁体A重力方向与运动方向相反,重力做负功,阻碍其沿 $w(x,t)$ 正向运动,振动位移减小;反之,当采集器沿 $w(x,t)$ 负向运动时(如图12(a)和13(a)相图左侧平面),末端磁体A重力方向与运动方向相同,重力做正功,促进其沿 $w(x,t)$ 负向运动,振动位移增大,由此导致采集器的相图不对称。

## 4 结论

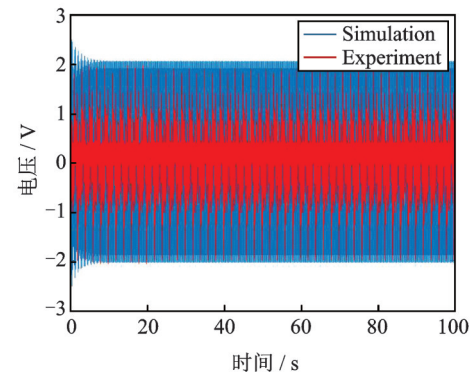
本文建立了一种具有四个势阱的多稳态压电能量采集器的非线性动力学模型,通过一系列的仿真分析和实验验证,得到以下主要结论:

1. 在相同的激励条件下,多稳态压电能量采集器较双稳态压电能量采集器具有更宽的工作频带和更高的动态输出性能;

2. QPEH具有四个对称的势能阱,其宽度和深度均小于双稳态压电能量采集器的势能阱,这可以促进QPEH在较低的环境激励下做大幅值的阱间运动,提高了采集器的能量输出效率;



(a)



(b)

图13 压电能量采集器做四稳态运动时输出特性实验与仿真对比结果

Fig.13 Comparisons between the experiments and simulations for quad-stable motion of the QPEH

3. QPEH从单稳态到多稳态运动具有四种变迁模式,即(1)从单稳态运动直接变迁到双稳态运动;(2)从单稳态运动开始,经过双稳态运动,变迁到四稳态运动;(3)从单稳态运动开始,经过双稳态、四稳态运动,再经过双稳态运动后,变迁到四稳态运动;(4)从单稳态运动直接变迁到四稳态运动。

4. 在 $d=27\text{ mm}$ ,  $d_g=10\text{ mm}$ ,基础加速度幅值为 $7.5\text{ m/s}^2$ ,激励频率为 $5\text{ Hz}$ 时,能量采集器做双稳态运动,此时的最大输出位移和速度分别为 $40\text{ mm}$ 和 $1500\text{ mm/s}$ ,最大输出电压 $1.48\text{ V}$ ;在 $d=17\text{ mm}$ ,  $d_g=17\text{ mm}$ ,时,能量采集器做四稳态运动,此时的最大输出位移和速度分别为 $50\text{ mm}$ 和 $2200\text{ mm/s}$ ,最大输出电压 $2\text{ V}$ 。

## 参考文献:

- [1] Aloui Rabie, Larbi Walid, Chouchane Mnaouar. Global sensitivity analysis of piezoelectric energy harvesters [J]. Composite Structures, 2019, 228: 111317.
- [2] Nguyen Hieu Tri, Genov Dentcho, Bardaweel Hamzeh. Mono-stable and bi-stable magnetic spring based vibration energy harvesting systems subject to harmonic excitation: Dynamic modeling and experimental verification [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019,

- 134: 106361.
- [3] Lu Qingqing, Liu Liwu, Scarpa Fabrizio, et al. A novel composite multi-layer piezoelectric energy harvester [J]. *Composite Structures*, 2018, 201: 121-130.
- [4] Keshmiri Alireza, Wu Nan, Wang Quan. A new nonlinearly tapered FGM piezoelectric energy harvester [J]. *Engineering Structures*, 2018, 173: 52-60.
- [5] Zhou K, Dai H L, Abdelkefi A, et al. Theoretical modeling and nonlinear analysis of piezoelectric energy harvesters with different stoppers [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2020, 166: 105233.
- [6] Pan Diankun, Dai Fuhong. Design and analysis of a broadband vibratory energy harvester using bi-stable piezoelectric composite laminate [J]. *Energy Conversion and Management*, 2018, 169: 149-160.
- [7] 唐 炜, 王小璞, 曹景军. 非线性磁式压电振动能量采集系统建模与分析 [J]. *物理学报*, 2014, 63(24): 76-89.  
Tang Wei, Wang Xiao-pu, Cao Jing-jun. Modeling and analysis of piezo electric vibration energy harvesting system using permanent magnetics [J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, 63(24), 76-89.
- [8] 赵泽翔, 王光庆, 谭江平, 等. 双稳态压电振动能量采集器的时-频域动力学特性及实验研究 [J]. *传感技术学报*, 2019, 32(8): 1200-1208.  
ZHAO Zexiang, WANG Guangqing, TAN Jiangping, et al. Dynamic characteristics in time-frequency domain and experimental research of the bi-stable piezoelectric vibration energy harvester [J]. *Chinese Journal of Sensors and Actuators*, 2019, 32(8): 1200-1208.
- [9] 杨斌强, 徐文潭, 王光庆, 等. 带弹性放大器的双稳态压电振动能量采集器 [J]. *传感技术学报*, 2017, 30(5): 684-691.  
YANG Binqiang, XU Wentan, WANG Guangqing, et al. A bistable piezoelectric vibration energy harvester with an elastic magnifier [J]. *Chinese Journal of Sensors and Actuators*, 2017, 30(5): 684-691.
- [10] Wang H Y, Tang L H. Modeling and experiment of bi-stable two-degree-of-freedom energy harvester with magnetic coupling [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2017, 86: 29-39.
- [11] Wang G Q, Liao W H, Zhao Z X, et al. Nonlinear magnetic force and dynamic characteristics of a tri-stable piezoelectric energy harvester [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 97: 2371-2397.
- [12] Kim Pilkee, Seok Jongwon. A multi-stable energy harvester: Dynamic modeling and bifurcation analysis [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, 333: 5525-5547.
- [13] Zhou Z, Qin W, Zhu P. Improve efficiency of harvesting random energy by snap-through in a quad-stable harvester [J]. *Sensors and Actuators A: Physical*, 2016, 243: 151-158.
- [14] Zhou Z, Qin W, Zhu P. A broadband quad-stable energy harvester and its advantages over bi-stable harvester: Simulation and experiment verification [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2017, 84: 158-168.
- [15] Zhou Z Y, Qin W Y, Zhu P. Energy harvesting in a quad-stable harvester subjected to random excitation [J]. *AIP Advances*, 2016, 6(2): 025022.
- [16] Wang Guangqing, Zhao Zexiang, Liao Wei-Hsin, et al. Characteristics of a tri-stable piezoelectric vibration energy harvester by considering geometric nonlinearity and gravitation effects [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2020, 238: 106571.

## Nonlinear dynamic characteristics and experimental validation of a multi-stable piezoelectric vibration energy harvester

TAN Jiang-ping, WANG Guang-qing, JU Yang, LI Ying, ZHAO Ze-xiang

(School of Information and Electronic Engineering, Zhejiang Gongshang University, Hangzhou 310018, China)

**Abstract:** In order to improve the output performances of the bi-stable piezoelectric vibration energy harvester (BPEH), a multi-stable piezoelectric vibration energy harvester formed by the magneto mechanical piezoelectric coupling effect is proposed. By introducing a pair of external magnets into the BPEH, a quad-stable piezoelectric vibration energy harvester (QPEH) is developed. The nonlinear magnetic force and potential energy of the energy harvester is firstly derived based on the magnetic dipole theory, and then the nonlinear dynamic model of the proposed harvester is derived based on the Hamilton principle and the Raleigh-Ritz method. Some simulations are performed to reveal the effect mechanisms of the system parameters on the nonlinear magnetic force and the dynamic characteristics of the energy harvester. A prototype of the QPEH is manufactured and the experimental system is set-up. The experimental results are well agreeable with the simulation results, which testified the proposed dynamic model is correct. The results show that the QPEH oscillating into a quad-stable motion generates wider bandwidth and higher output performance than those of it oscillating into a bi-stable motion.

**Key words:** electromechanical dynamics; multi-stable piezoelectric energy harvester; nonlinear magnetic force

作者简介: 谭江平(1995-),男,硕士研究生。E-mail: 990081936@qq.com

通讯作者: 王光庆(1975-),男,博士,教授。电话:(0571)28877771;E-mail: kele76@163.com