## 多稳态电磁俘能系统的非线性动力学实验研究

高鸣源1,2,李守太1,2,孙玉华1,2,吴飞3,代俊4,王平5,6

(1.西南大学工程技术学院,重庆400716; 2.西南大学智能传动和控制技术国家地方联合工程实验室,重庆400716; 3.重庆大学机械与运输工程学院,重庆400030; 4.北京理工大学机电学院,北京100081; 5.西南交通大学土木工程学院,四川成都610031; 6.西南交通大学高速铁路线路工程教育部重点实验室,四川成都610031)

摘要:为克服共振式俘能器工作频带窄和压电式俘能器输出电流低等问题,设计了多稳态电磁式振动俘能系统。 建立了系统的分数阶阻尼模型,通过实验揭示了多稳态电磁俘能系统的动态分岔、势能阱逃逸、高能态轨道和混沌 运动等非线性行为。结果表明:采用庞加莱截面频闪采样算法和分岔图可有效刻画系统的非线性振动特性;利用多 稳态电磁式俘能系统的非线性振动特性可显著增加输出电流并拓宽系统的有效工作频带。

关键词: 非线性振动; 振动俘能; 多稳态电磁式俘能系统; 混沌; 分岔

中图分类号: O322; TM91; TN384 文献标志码: A 文章编号: 1004-4523(2021)04-0775-07

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2021.04.014

#### 引言

振动俘能装置可将周围环境中的振动能量转化为电能,是能源回收利用的重要实现方式。经典的振动能量收集装置可分为静电式[1]、电磁式[2]及压电式[3-4]三类。对于传统的线性谐振式振动俘能器,当激励频率等于或接近俘能系统固有频率时俘能器才会有显著的能量输出。当外界环境振动激励频带较宽时,线性谐振式振动俘能器的效能不足。

因此学者们开展了非线性俘能系统的研究工作 以期拓宽俘能器频带,主要研究工作包括单稳态<sup>[5]</sup>、 冲击<sup>[6]</sup>、双稳态<sup>[7-8]</sup>、三稳态<sup>[9-10]</sup>等结构形式。多稳态 系统的回复力具有非线性特性,回复力势能存在多 个势能阱,当振子发生阱间振动时其处于高能态轨 道状态,此时系统具有较高的能量输出。因此通过 系统设计使俘能器处于高能态轨道状态,可有效提 高俘能功率输出<sup>[11]</sup>。

双稳态和三稳态振动俘能系统的非线性回复力通常借助磁斥力或磁吸力的非线性特性来实现。现有俘能器主要借助压电效应实现机电能量转换,典型的双稳态压电俘能器由压电悬臂梁及辅助磁体组成,梁的自由端固定有永磁体[12-17],并随压电梁一起振动,其余磁体静止布置于梁的两侧,不随梁运动。系统的非线性行为取决于磁体的几何形状,位置和磁性等。上述多稳态系统非线性回复力势能虽由磁

力产生,但本质上属于压电俘能系统。压电俘能器的共同局限是压电材料内阻较大,因而输出电流小,致使系统的带载能力弱<sup>[18]</sup>。

Mann和Owens [19] 提出了一种基于电磁感应原理的可直接为负载供能的双稳态振动俘能系统。该俘能器由可动磁体及固定磁体阵列组成,磁体间相互作用形成一个双稳态势能阱。与压电式相比,电磁感应式俘能器在低频时具有较高功率输出,无特殊材料需求,生产成本较低,能够满足机械工程领域大规模应用需求。目前,关于电磁感应式多稳态振动俘能器的研究工作较少,对基于电磁感应原理的多稳态振动俘能系统特性了解不足。此外,无线传感网络监测用电子电路或传感器通常需要10-50 mA的输入电流,10-200 mW的功耗,较高的电流和功耗使得常规的振动俘能方式面临较大挑战,亟需设计研发可提供大电流和较高输出功率的振动俘能器结构。

因此本文基于电磁感应原理设计了多稳态振动 俘能系统,并开展了三稳态系统的实验研究。本研 究的主要贡献和创新之处在于:1)提出了基于磁浮 原理的电磁感应式多稳态振动俘能机制;2)建立并 验证了基于分数阶阻尼的电磁感应式三稳态俘能器 动力学模型;3)对所设计的三稳态俘能系统的非线 性动力学行为开展实验研究,揭示了分盆、阱间振动 和混沌等现象。

#### 1 基本原理

图 1(a) 为电磁感应式三稳态振动俘能系统的物理模型。阴影矩形表示管内可动磁体,其具有如图中两个虚线和一个实心填充方框所示的三个稳定状态。图中实线矩形框表示的是固定磁体阵列。为使俘能系统产生含三稳态势能阱回复力的势能函数,外部固定磁体阵列中磁体数量、磁极方向以及排布位置设计为可调结构。线圈位于可动磁体与固定磁体阵列之间。因此,通过一个双层同心管结构(线圈固定到内管;静止磁体阵列固定于外管)解决线圈及静止磁体阵列的固定问题。

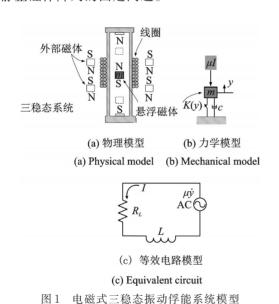


Fig. 1 Illustration of the tristable electromagnetic-induction

energy harvester

图 1(b)为系统的力学模型。电感元件(即线圈) 在电流流过时将电能存储在磁场中,它充当记忆元 件并可保持流经的电流。根据楞次定律,感应电流 具有这样的方向,即感应电流的磁场总要阻碍引起 感应电流的磁通量的变化,亦即感应电流的效果总 是反抗引起感应电流的原因。这就解释了电磁感应 能量收集器中的阻尼力的成因,因此合成的阻尼力 可以用分数阶微积分来描述。采用基尔霍夫电压定 律可以建立系统的等效电路模型,如图 1(c)所示。

电磁感应式含分数阶阻尼的三稳态振动俘能系统的控制方程可以写为:

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_0 \frac{\mathrm{d}^q y}{\mathrm{d}t^q} + k(y) - \mu I = f_0 \cos\omega t \qquad (1)$$

$$\dot{I} + \beta I = -\mu \dot{y} \tag{2}$$

式中  $\zeta$ 为阻尼比, $\omega$ 。为系统固有频率,f。为激励幅值, $\omega$ 为激励频率,I为电流,y为悬浮磁体的相对位

移, $\mu$ 为电磁耦合系数,k(y)为系统的非线性回复力, $\beta = R_L/(\omega_0 L)$ , $R_L$ 为负载电阻,L为电感, $\frac{d^q y}{dt^q}$ 为分数阶导数,且0 < q < 1,当q = 1时,微分方程中的阻尼项为黏性阻尼。

采用 Gruenwald-Latnikov 定义对具有分数阶阻 尼的电磁感应式三稳态振动俘能系统进行建模[20-21]

$$\frac{\mathrm{d}^{q} f}{\mathrm{d} t^{q}} \equiv {}_{a} \mathrm{D}_{t}^{q} f(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{q}} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t-a}{h}\right]} (-1)^{j} \binom{q}{j} f(t-jh)(3)$$

利用欧拉伽马函数可将二项式系数扩展至整个 实数域

$$\begin{pmatrix} q \\ j \end{pmatrix} = \frac{q!}{j!(q-j)!} = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(q-j+1)}$$
(4)

求和上限的方括号[·]表示取整。根据短时记忆准则,可极大缩短系统记忆长度同时保证数值计算精度。方程可改写为

$$\frac{\mathrm{d}^{q} f}{\mathrm{d} t^{q}} \equiv {}_{a} \mathrm{D}_{t}^{q} f(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{q}} \sum_{j=0}^{\lfloor N(t) \rfloor} (-1)^{j} \binom{q}{j} f(t-jh) \tag{5}$$

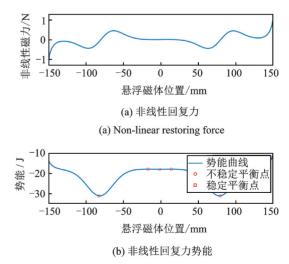
 $N(t) = \min(\frac{t-\alpha}{h}, \frac{\alpha}{h}), \alpha$  为记忆长度, $\Gamma(\bullet)$  为伽马函数。

非线性回复力可写为

$$k(y) = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y} = \varepsilon y(y^2 - \lambda_1^2)(y^2 - \lambda_2^2) \qquad (6)$$

U为回复力势能,y=0, $y=\pm\lambda_1$  是稳定平衡点,而  $y=\pm\lambda_2$ 为不稳定平衡点。 $\epsilon$ 是多项式最大阶数项的系数,当 $\epsilon>0$ 时,多稳态势能函数是实际存在的;而当 $\epsilon<0$ 时,系统是不可实现的。采用 KB 平均法来求解电磁感应式三稳态振动俘能系统的动力学模型。

图 2 是电磁感应式三稳态振动俘能系统在三稳



(b) Non-linear potetial energy

图 2 电磁式三稳态振动俘能系统回复力及势能曲线 Fig. 2 Curves of restoring force and potential energy of the tristable electromagnetic-induction energy harvester 态配置下的回复力和回复力势能曲线。外部静止磁体与内部悬浮可动磁体之间的相互作用引起的非线性回复力由 Maxwell应力张量法计算得到,这种方法在前期研究工作中已经得到验证[22]。可以看出,回复力具有明显的非线性特征,并且三稳态系统在三个稳态之间进行切换。该系统共有5个平衡点(即回复力方程的5个根),包括3个稳定平衡点和2个不稳定平衡点。

#### 2 实验研究

所设计的电磁感应式三稳态俘能器采用双层同心管结构,外部静止磁体阵列通过两铝套管与外部聚甲基丙烯酸甲酯管(PMMA管,Φ55 mm×Φ49 mm)连接。可动悬浮磁体被放置在内部PMMA管(Φ35 mm×Φ30 mm)内,通过调整磁极方向使其在两端部固定磁体磁斥力作用下悬浮于内部PMMA管内。内管中的悬浮磁体与内管壁之间的径向间隙采用一圈铜珠填充,铜珠的滚动运动可以大幅降低摩擦力,保证可动磁体可沿管的轴向平滑运动。铜珠的尺寸为Φ4 mm。通过调整外部固定磁体与悬浮磁体的相对几何位置关系,可以改变回复力势能函数的形状,并构建三稳态回复力势能函数。

三稳态俘能器振动测试布置如图 3 所示。采用 ODV100-400(M&T HORIZON)激光位移计测量 可动磁体沿套管的轴向位移。激光位移传感器固定 于三脚架并采用直流稳压电源供电。为消除重力影响,将三稳态俘能器轴向沿水平方向固定于振动实验台上。参照 IEC 60068-2-6 [23]振动测试规范,进行了扫频测试。将灵敏度为 9.71 mV/g 的压电加速度 计(IEPE)固定于振动实验台,通过反馈信号实现对振动激励的控制。

图 4 为系统的实验布置示意图,内部 PMMA 管中的悬浮可动磁体(红色虚线框所示)与轻木杆连

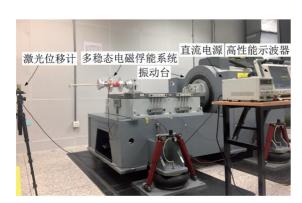


图 3 电磁式三稳态振动俘能系统实验平台

Fig. 3 Experimental platform of the tristable electromagnetic induction energy harvesting system

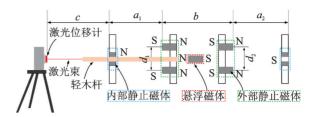


图 4 电磁式三稳态振动俘能系统实验布置示意图

Fig. 4 Experimental setup of the tristable electromagneticinduction energy harvesting system

接,管的左右两端分别固定有圆环形静止磁体(蓝色虚线框所示),轻木杆从左边圆环形磁体穿出,激光位移计照射出的光束投在木杆中心,进而探测悬浮磁体的实时运动位移。外部静止磁体(绿色虚线框所示)固定于外部 PMMA 管上,与内部静止磁体一起建立起磁约束势能,在外部振动激励下,可动悬浮磁体在势能的约束下进行非线性振动。三稳态电磁俘能系统的实验参数如表1所示。

表 1 电磁式三稳态振动俘能系统实验参数

Tab. 1 Parameters of the tristable electromagnetic-

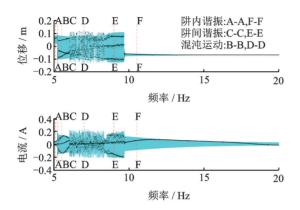
induction energy harvesting system		
	参数取值	单位
m	90.6	g
С	407	mm
$a_1$	85	mm
$a_2$	85	mm
b	160	mm
$R_{\scriptscriptstyle L}$	41.5	Ω
$R_{ m coil}$	41.32	Ω
$L_{ m coil}$	97.92	mH
$C_{ m damping}$	0.2	$N \cdot s/m$
$\mu$	3.5	$A \cdot s/m$
线圈内、外径	$\Phi$ 30.5×43.5	mm
线圈线径	0.5	mm
线圈高度	150	mm
匝数	3300	/
悬浮动磁表面磁通密度 T <sub>i</sub>	0.54	T
外部静磁表面磁通密度 T <sub>e</sub>	0.48	T
内部静磁表面磁通密度 T <sub>s</sub>	0.05	T
内部磁体尺寸	$\Phi$ 20×20	mm
外部磁体尺寸	$\Phi$ 15×15	mm
静止磁体尺寸	$\Phi$ 30 $\times$ $\Phi$ 20 $\times$ 6	mm
$d_1$	88	mm
$d_2$	88	mm

将采样频率为 20000 样本/s 的示波器(Tektronics DPO4014)的电压探头与俘能器输出端及负载电阻相连,形成闭合回路。示波器采样数据存储于本地计算机硬盘中以供后续分析。示波器被用作

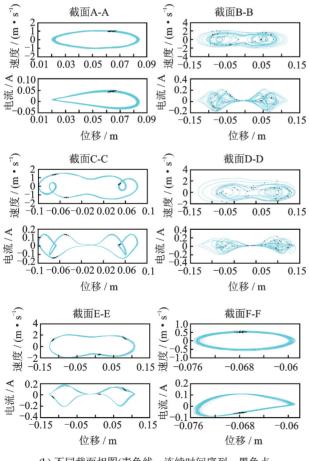
数据采集设备,并与装有 Labview SignalExpress 软件的便携电脑相连,以激活触发/记录模式,实现数据的连续采集。

#### 3 结果讨论

扫频结果如图 5 所示, 青色线分别表示为可动磁体位移和电流的时间序列, 黑色点表示频闪采样



- (a) 位移和电流的连续时间序列(青色线)和频闪采样点(黑点)
  - (a) The continuous time series (shaded cyan) and stroboscopic samples (black dots) of the displacement and current



(b) 不同截面相图(青色线:连续时间序列;黑色点:频闪采样点)

(b) Phase portraits at different sections

图 5 电磁式三稳态振动俘能系统扫频实验

Fig. 5 Experimental frequency sweep tests

点。将可动磁体的位移以及回路中的电流的闪频采样点(按照激励频率)叠加到相应的时间序列上。激励频率  $H_{\epsilon}(t)$  可以表示为时间 t 的函数

$$H_z(t) = f_0 \cdot 2^{\left(\frac{t}{60/Sr}\right)} \tag{7}$$

 $f_0$ 为扫频初始频率,Sr为扫频速率。初始频率  $f_0=5$  Hz,扫频速率 Sr=0.2 OCT/min(即频率每5 min 增加 1倍,扫频频率从 5 Hz 到 10 Hz 需要 5 min,从 10 Hz 到 20 Hz 同样也需要 5 min)。示波器采样频率为 2000000 样本/s,即采样间隔  $\Delta t=0.00005$  s。时间序列显示了在不同激励频率下磁体的位移幅值及三稳态俘能系统的电流输出幅值。按照  $\frac{1}{H_z(t)}/\Delta t$  的序列差对基于示波器采样数据进行频闪采样,可以反映在不同激励频率下电磁感应式三稳态振动俘能系统响应的周期特性。

所设计的电磁式三稳态振动俘能系统在工作过程中会出现阱内振动、混沌及阱间高能态轨道等多种动力学行为,并随激励条件的改变而相互转化,如图 5 所示。电磁感应式三稳态俘能系统在扫频实验中经历一系列的状态变化:阱内周期运动→混沌运动→阱间运动→混沌运动→阱间运动→阱内周期运动。

在扫频时随着激励频率增加,振子先在初始平 衡点附近运动,系统表现为每个强迫运动周期内的 单冲程阱内运动(如截面 A-A 所示)。在特定的激 励频率下,短时内系统发生改变,进入混沌状态(如 截面B-B所示),随后进入阱间运动即高能态轨道状 态,庞加莱截面及相图如截面 C-C 中所示。随着激 励频率的进一步增加,电磁感应式三稳态俘能系统 在一个较长的时间段内表现为混沌状态,其特点是 振子从原有势能轨道逃逸,在区域界线内不确定地 出现。一定频率下,系统返回阱间运动即高能态轨 道状态,如E-E截面相图所示。当激励频率超过一 定范围后,系统将围绕一特征平衡点做周期振动,如 截面F-F所示。横截面C-C和E-E所示的高能态轨 道运动都表现出了异宿分岔,即两个不相邻势能阱 之间的运动,但两种状态相图的形状具有一定差异。 前者具有与局部稳定极限环相交织的高能态轨道运 动,表明振子在沿高能态轨道运动时会被局部极限 环吸引,随后摆脱局部吸引子,继续阱间运动;而后 者的特点是哑铃形轨道,表现为持续阱间振动。扫 频过程中,特定频率下振子位移幅值以及电流幅值 显著,说明阱间高能态轨道和混沌运动可以显著增 加激励周期内的振动俘能器的输出电流和能量。

基于电磁感应原理的三稳态俘能系统的分数阶阻尼模型仿真计算结果如图 6(a),7(a),8(a)所示。

其中每幅图均包括两个子图:位移-速度相图和时域响应图。模型参数在表1中列出,其中阻尼 $C_{\text{damping}}$ = 0.2 N•s/m,电磁耦合系数 $\mu$ =3.5 A•s/m,阻尼系数 $C_{\text{damping}} = \xi C_c = \xi 2 \sqrt{mk}$ ,  $C_c$  为系统的临界阻尼。 $C_{\text{damping}}$  为动力学模型的关键参数,本文借鉴文献[12]中的遗传算法,基于实验测试数据进行阻尼系数的参数辨识。

图 6 为电磁式三稳态振动俘能系统阱内运动的结果,可动磁体在平衡点附近运动,三稳态俘能系统表现为平衡点附近的阱内运动。利用分数阶阻尼模拟换能器工作时的电磁阻尼力,建立磁浮式三稳态俘能器数学模型,并进行数学仿真。取分数阶导数的阶数为 q=0.95 时仿真结果(图 6(a))与实验结果(图 6(b))吻合较好,因此认为利用所建立的基于分数阶阻尼所建立的数学模型可以对速度幅值、平衡点位置、相图以及时域响应作出较好估计。从相图中可以看出系统围绕着一个稳定平衡点进行稳定极限环运动。

图 7 是三稳态俘能系统在混沌运动下的结果。由于磁相互作用引起的跳跃现象,三稳态俘能系统在三个稳态之间不断地切换。将庞加莱截面绘制于

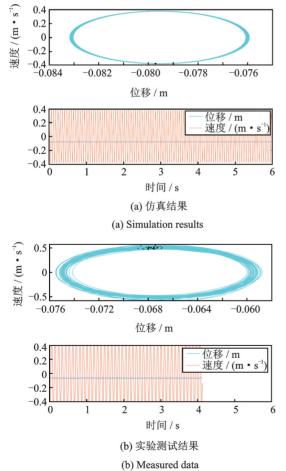


图 6 电磁式三稳态振动俘能系统阱内运动

Fig. 6 Intra-well movement of the tristable electromagnetic induction energy harvester

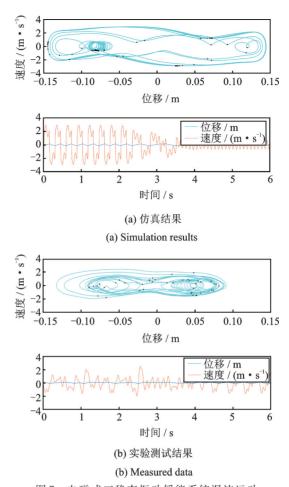


图 7 电磁式三稳态振动俘能系统混沌运动

Fig. 7 Chaotic oscillation of the tristable electromagneticinduction energy harvester

相图上,可看到阱间的非周期运动。从仿真结果(图 7(a))和实验测试结果(图 7(b))可以看出混沌状态下振子运动轨道表现为一系列离散的点。这里取分数阶导数的阶数为 q=0.95。

图 8 是三稳态俘能系统的阱间运动结果。振子 从势能阱中逃逸,形成阱间振动。相图具有哑铃形 轨道特征,表明系统保持持续阱间振动。仿真结果 (图 8(a))与实验测试结果(图 8(b))匹配较好,速度 幅值、平衡点位置、相图、庞加莱截面以及时间响应 都可以用计算模型得到很好的估计。同样这里取分 数阶导数的阶数为 q=0.95。

图 9 显示的是电磁式三稳态振动俘能系统在扫频测试过程中的功率输出。对于所设计的电磁感应式三稳态振动俘能系统,相比于阱内周期运动,阱间运动具有更大机械运动冲程,功率输出明显提高。因此通过系统设计,实现三稳态振动俘能系统高能态阱间运动,可显著提高振动俘能系统的输出电流。与传统的线性系统相比,电磁感应式非线性三稳态振动俘能系统可在更宽的频带范围内实现能量捕获。

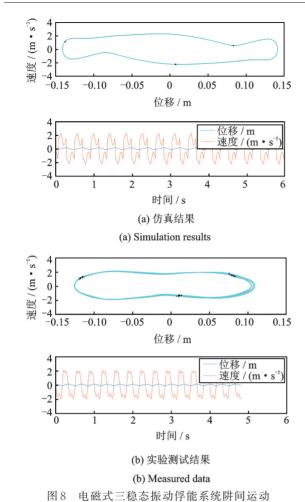


Fig. 8 Inter-well movement of the electromagnetic-induction energy harvester

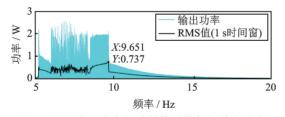


图 9 电磁式三稳态振动俘能系统扫频输出功率 Fig. 9 Output power of the tristable electromagneticinduction energy harvesting system

### 4 结 论

本文提出了基于电磁感应原理的三稳态振动俘能系统,建立了基于分数阶阻尼的电磁感应式三稳态振动俘能系统的动力学模型,开展了非线性振动特性的实验研究,主要结论如下:

(1)三稳态电磁式振动俘能系统展现出混沌、分 岔及高能态轨道运动等复杂的非线性动力学行为。 实验研究揭示了动态分岔、势能阱逃逸、高能态轨 道、异宿分岔和混沌运动现象,且各种状态之间存在 相互转化。

- (2)分数阶微积分可用于描述电磁感应式俘能器的阻尼力机制,KB平均法可用于求解三稳态振动俘能系统的动力学模型。采用相图、庞加莱截面及分岔图可有效刻画三稳态电磁俘能系统的非线性振动特性。
- (3)可利用多稳态电磁俘能系统的非线性振动 特性有效拓宽能量收集频带。与基于压电材料的非 线性俘能系统相比,电磁感应式多稳态俘能系统可 以实现较大的电流和功率输出,具有广阔应用前景。

#### 参考文献:

- [1] SUZUKI Y. Development of a MEMS energy harvester with high-perfomance polymer electrets [C]. Proc. PowerMEMS, 2010; 47-52.
- [2] GLYNNE-JONES P, TUDOR M J, BEEBY S P, et al. An electromagnetic, vibration-powered generator for intelligent sensor systems [J]. Sensors and Actuators A Physical, 2002, 110(1):344-349.
- [3] YUAN T, YANG J, SONG R, et al. Vibration energy harvesting system for railroad safety based on running vehicles [J]. Smart Materials and Structures, 2014, 23 (12):125046.
- [4] HARNE R L, WANG K W. A review of the recent research on vibration energy harvesting via bistable systems[J]. Smart Materials and Structures, 2013, 22(2): 023001.
- [5] GAO M, WANG P, CAO Y, et al. Design and verification of a rail-borne energy harvester for powering wireless sensor networks in the railway industry [J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2017, 18(6):1596-1609.
- [6] GU L, LIVERMORE C. Impact-driven, frequency upconverting coupled vibration energy harvesting device for low frequency operation [J]. Smart Materials and Structures, 2011, 20(4):045004.
- [7] VOCCA H, NERI I, TRAVASSO F, et al. Kinetic energy harvesting with bistable oscillators [J]. Applied Energy, 2012, 97(3):771-776.
- [8] 曹东兴, 孙培峰, 姚明辉, 等. 双稳态屈曲梁压电发电结构非线性动力学分析[J]. 动力学与控制学报, 2016, 14(6):520-525.

  CAO D X, SUN P F, YAO M H, et al. Nonlinear dynamics of bistable buckled beam piezoelectric harvesters [J]. Journal of Dynamics and Control, 2016, 14(6):
- [9] TEKAM G T O, KWUIMY C A K, WOAFO P. Analysis of tristable energy harvesting system having fractional order viscoelastic material [J]. Chaos, 2015, 25(1):013112.

520-525.

[10] 张艳霞, 靳艳飞. 色噪声激励下三稳态能量采集器的随机动力学分析[C]. 第十三届全国振动理论及应用学术会议论文摘要集, 2019.

Zhang Y X, JIN Y F. Stochastic dynamical analysis of a

- tristable energy harvester under colored noise [C]. The 13th National Conference on Vibration Theory and Application, 2019.
- [11] ZHU D, TUDOR M J, BEEBY S P. Strategies for increasing the operating frequency range of vibration energy harvesters: A review[J]. Measurement Science and Technology, 2010, 21(2):022001.
- [12] ZHOU S, CAO J, INMAN D J, et al. Broadband tristable energy harvester: Modeling and experiment verification [J]. Applied Energy, 2014, 133:33-39.
- [13] ZHOU S, ZUO L. Nonlinear dynamic analysis of asymmetric tristable energy harvesters for enhanced energy harvesting [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2018, 61: 271-284.
- [14] LENG Y, TAN D, LIU J, et al. Magnetic force analysis and performance of a tri-stable piezoelectric energy harvester under random excitation [J]. Journal of Sound and Vibration, 2017, 406:146-160.
- [15] ERTURK A, INMAN D J. Broadband piezoelectric power generation on high-energy orbits of the bistable duffing oscillator with electromechanical coupling [J]. Journal of Sound and Vibration, 2011, 330(10):2339-2353.
- [16] CAO J, ZHOU S, INMAN D J, et al. Chaos in the fractionally damped broadband piezoelectric energy generator[J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 80(4):1-15.
- [17] 蓝春波,秦卫阳,李海涛.随机激励下双稳态压电俘能系统的相干共振及实验验证[J].物理学报,2015,

- 64(8):080503.
- LAN C B, QIN W Y, LI H T. Broadband energy harvesting from coherence resonance of a piezoelectric bistable system and its experimental validation [J]. Acta Phys. Sin., 2015, 64(8):080503.
- [18] 高鸣源, 王 平. 磁浮式轨道振动俘能机理与试验研究[J]. 铁道学报, 2018, 40(6):144-153.

  GAO M Y, WANG P. Harvesting railroad vibration energy by magnetic levitation oscillation[J]. Journal of the China Railway Society, 2018, 40(6):144-153.
- [19] MANN B P, OWENS B A. Investigations of a nonlinear energy harvester with a bistable potential well [J]. Journal of Sound and Vibration, 2010, 329(9):1215-1226
- [20] DEBNATH L. Recent applications of fractional calculus to science and engineering [J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2003, 2003 (54):3413-3442.
- [21] WAHI P, CHATTERJEE A. Averaging oscillations with small fractional damping and delayed terms [J]. Nonlinear Dynamics, 2004, 38(1):3-22.
- [22] GAO M, HU C, CHEN Z, et al. Design and fabrication of a magnetic propulsion system for self-propelled capsule endoscope[J]. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 2010, 57(12):2891-2902.
- [23] International Standard IEC 60068-2-6, Environmental testing-Part 2-6- Test Fc: Vibration (sinusoidal)[S]. Switzerland:IEC, 2007.

# Experimental study of non-linear dynamics of multi-stable electromagnetic energy harvesting system

GAO Ming-yuan<sup>1,2</sup>, LI Shou-tai<sup>1,2</sup>, SUN Yu-hua<sup>1,2</sup>, WU Fei<sup>3</sup>, DAI Jun<sup>4</sup>, WANG Ping<sup>5,6</sup>
(1. College of Engineering and Technology, Southwest University, Chongqing 400716, China; 2. National & Local Joint Engineering Laboratory of Intelligent Transmission and Control Technology, Southwest University, Chongqing 400716, China; 3. College of Mechanical and Vehicle Engineering, Chongqing University, chongqing 400030, China; 4. School of Mechatronical Engineering, Chongqing University, Chongqing 400030, China; 4. School of Mechatronical Engineering, Chongqing University, Chongqing 400030, China; 4. School of Mechatronical Engineering, Chongqing University, Chongqing 400030, China; 4. School of Mechatronical Engineering, Chongqing 400030,

gineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China; 5.School of Civil Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China; 6.Key Laboratory of High-speed Railway Engineering, Ministry of Education, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

**Abstract:** The monitoring nodes of the wireless sensor network require an external power supply, and it costs a lot to build and maintain the power supply infrastructure. By using environmental vibration energy to supply power to the monitoring node, it not only saves a lot of investment, but also saves energy and protects the environment, and thus has broad application prospects. However, the state-of-the-art resonant energy harvester has a narrow operating band, and the nonlinear approaches deliver small output power, which is difficult to drive the load circuit. In view of this, this paper proposes a multi-stable nonlinear electromagnetic energy harvesting system and conducts the related experimental study. The fractional-order damping model of the system is established. Experimental research reveals nonlinear behaviors such as dynamic bifurcation, potential well escape, high-energy state orbit, and chaotic motion. The results indicate that Poincaré cross-section stroboscopic sampling algorithm and bifurcation diagram can effectively describe the nonlinear vibration characteristics of the system. The multi-stable electromagnetic system can be utilized to increase the output power and current (i.e. electrical load capacity) of energy harvesters as well as broaden the operating range of frequencies.

 $\textbf{Key words:} \ \text{nonlinear vibration;} energy \ \text{harvesting;} multi-stable \ electromagnetic \ energy \ harvesting \ system; chaos; bifurcation$ 

作者简介: 高鸣源(1985-),男,副教授。电话:(023)68251265; E-mail:gaomingyuan@swu.edu.cn

通讯作者: 王 平(1969-),男,教授,博士生导师。电话:(028)87601210;E-mail:wping@home.swjtu.edu.cn