

# Levinson 矩形微板谐振器热弹性阻尼解析解

李世荣<sup>1,2</sup>, 刘荣桂<sup>1</sup>, 武永<sup>1</sup>

(1.南通理工学院建筑工程学院, 江苏 南通 226002; 2.扬州大学建筑科学与工程学院, 江苏 扬州 225127)

**摘要:** 基于 Levinson 高阶剪切板理论, 给出了四边简支微板谐振器热弹性耦合自由振动的复频率以及板内变温场的精确解析解; 由复频率法给出了表征微板热弹性阻尼的逆品质因子; 通过数值结果分析了 Levinson 微板的热弹性阻尼随几何尺寸和振动模态变化的规律, 并与一阶剪切变形理论和经典板理论的预测结果进行了比较, 分析了剪切变形对热弹性阻尼的影响程度。数值结果表明, 对于中厚板和厚板谐振器, 经典板理论预测的热弹性阻尼值明显大于剪切变形板理论的预测值。这是由于经典板理论忽略了横向剪切变形, 从而过高地估计了微板的抗弯刚度。另外, 在四边简支条件下, 还给出了 Mindlin 微板和 Levinson 微板热弹性阻尼预测值之间的比较。结果表明, Levinson 高阶剪切变形理论能够更好地预测厚板谐振器的热弹性阻尼。这是因为 Levinson 理论下的位移场能够精确满足上下表面应力为零的条件, 温度场包含了厚度方向坐标的高阶项。

**关键词:** 热弹耦合振动; Levinson 板理论; 复频率; 热弹性阻尼; 解析解

**中图分类号:** O343.6 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2021)05-1009-11

**DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2021.05.015

## 引言

热弹性阻尼 (Thermoelastic Damping, TED)<sup>[1-3]</sup> 是微/纳谐振器所固有的内部能耗机制, 是结构周期振动时材料内部热-弹耦合变形引起的内部阻尼。要想从理论上定量地计算微/纳结构在振动过程中的热弹性阻尼, 就需要基于热-弹耦合动力学理论建立结构振动的数学模型, 通过联立求解热-弹耦合运动方程和热传导方程获得系统的动力响应, 从而求得表征热弹性阻尼的品质因子<sup>[3-29]</sup>。TED 与微结构的材料性质、几何尺寸、支承条件以及环境温度诸多因素密切相关。因此, 定量地分析和预测 TED 对高品质微/纳谐振器的研究和设计具有重要意义。

很多微/纳谐振器的力学模型都可以简化为弹性梁、板构件。已有的关于微/纳板谐振器热弹性阻尼数学模型在建立时, 几乎都采用了 Kirchhoff 经典板理论<sup>[4-26, 28-29]</sup>。文献[4-15]研究了均匀各向同性材料弹性薄板谐振器的 TED。Nayfeh 和 Younis<sup>[4]</sup> 采用摄动法求解了引入刚度阻尼的振动方程, 获得了受静电载荷和残余面内应力共同作用的矩形微板 TED 的近似解析解。Sun 等<sup>[5-6]</sup>、Ali 等<sup>[7]</sup> 采用复频率法分别研究了微圆和环板谐振器的热弹耦合振动响应, 给出了 L-R<sup>[3]</sup> 形式的热弹性阻尼解析解。Sa-

lajeghe 等<sup>[8]</sup>、Mohammadi 等<sup>[9]</sup> 分别定量地分析了静态几何非线性大变形对微圆板和矩形微板谐振器 TED 的影响规律。Li 等<sup>[10]</sup> 和 Fang 等<sup>[11-12]</sup> 分别采用一维、二维和三维热传导方程, 利用能量方法求得了矩形和圆形薄板谐振器逆品质因子解析解, 分析了热传导方程的简化对 TED 预测值精度的影响。最近, Ma 等<sup>[13]</sup> 还基于二维热传导方程研究了具有初始径向张力的轴对称自由振动微圆板的热弹性阻尼。

基于广义热传导理论, 文献[14-18]在理论上分析了热传导过程中的波动和黏滞效应对微/纳板谐振器 TED 的影响。Sharma 等<sup>[14]</sup> 基于 Lord-Shulman 理论分析了非轴对称自由振动圆板谐振器的 TED。在此基础上, Sharma 和 Grover<sup>[15]</sup> 进一步研究了由于空隙率变化而引起的延滞效应对板式谐振器 TED 的影响。Guo 等<sup>[16]</sup> 采用双向延滞广义热传导模型求解得到了微圆板谐振器逆品质因子的 L-R<sup>[3]</sup> 形式解析解。Grover<sup>[17]</sup> 基于 Kelvin-Voigt 材料模型下的广义热黏弹性理论定量地分析了机械松弛时间和热松弛时间对微圆板谐振器逆品质因子的影响。最近, Chugh 和 Partap<sup>[18]</sup> 在微圆板谐振器的自由振动模型中同时考虑热松弛和微伸长 (Microstretch) 效应, 给出了 TED 的解析解, 发现微伸长参数对临界热弹性阻尼值具有增强作用。

收稿日期: 2020-09-11; 修订日期: 2020-11-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11672260); 江苏省科技服务平台培育项目(XQPT202102)

考虑材料性质沿着厚度方向的阶梯变化,部分学者研究了复合材料层合微/纳板式谐振器的 TED<sup>[19-26]</sup>, Bishop 和 Kinra<sup>[19-20]</sup>开创了复合材料层合微板谐振器热弹性阻尼的先河。他们考虑上下表面的边绝热条件和层间界面处的非完美协调条件,通过计算一个振动周期内由不可逆热流产生的总热量与结构的总弹性势能之比,获得了谐振器的逆品质因子<sup>[19]</sup>解析解,并由此定量地分析了三层对称铺设矩形微板的 TED<sup>[20]</sup>。基于准一维热传导方程, Sun 等<sup>[21]</sup>采用复频率法求得了对称铺设的三层微圆板在轴对称自由振动模态下的逆品质因子。采用与文献[20]中相同的能量方法, Zuo 等<sup>[22-23]</sup>研究了双层和三层矩形微板的 TED。考虑温度场在面内的变化, Liu 等<sup>[24-25]</sup>分别基于二维和三维热传导方程采用格林函数法求得双层微圆板和矩形微板在给定边界条件下逆品质因子级数形式的解析解。最近, Li 等<sup>[26]</sup>还利用三维传热模型计算了四边夹紧双层矩形微板的热弹性阻尼。这里需要说明的是,文献[21-26]都是通过引入物理中面消去了拉-弯耦合,将面内位移用挠度来表示。但是,当材料性质关于几何中面不对称时,非对称的温度场将会产生热薄膜力,而上述简化实际上忽略了热薄膜力对热弹性阻尼的贡献<sup>[28-29]</sup>。

考虑材料性质沿着厚度连续变化,文献[27-29]研究了新型的功能梯度材料(Functionally Graded Materials, FGM)微板的热弹性耦合自由振动响应。与复合材料层合微板不同,材料性质沿厚度连续变化的 FGM 微板的热传导方程为厚度方向坐标的变系数微分方程,这将给方程求解在数学上带来很大困难。Emami 和 Alibeigloo<sup>[27]</sup>采用单向耦合准一维热传导理论和修正的应变梯度理论,研究了材料性质沿横向幂函数变化的 FGM Mindlin 矩形微板的 TED。通过将热传导方程的系数和温度场同时展开成关于横向坐标的泰勒级数,将热传导方程转化为一系列常系数的微分方程组,求得了变系数热传导方程的级数形式的近似解析解,进而采用复频率法计算出了四边简支 FGM 矩形微板的 TED。基于 Kirchhoff 经典板理论,采用单向耦合的准一维热传导方程, Li 等<sup>[28-29]</sup>研究了 FGM 微圆板和微矩形板的热弹性阻尼,发展了求解材料性质在横向任意非均匀变化微板的复杂变系数热传导方程的分层均匀化方法,获得材料性质按幂函数变化的 FGM 微板在各种支承条件下的热弹性阻尼半解析解,研究了材料梯度指数、环境温度、边厚比、振动模态等对热弹性阻尼的影响规律,定量地分析了热薄膜力对热弹性阻尼的影响程度。

从上述已有的研究成果可见,除文献[27]之外

所有的研究工作都在微板结构的弯曲振动模型建立中忽略了横向剪切变形的影响,采用了 Kirchhoff 薄板理论。众所周知,经典板理论忽略横向剪切变形和转动惯性力,从而夸大了结构的弯曲刚度,过高地估计了结构自由振动的固有频率。因此,在微板谐振器的厚度与面内尺寸的比值超过薄板的界限后,经典板理论也将会过高地预测结构的热弹性阻尼。本文基于 Levinson 高阶剪切变形理论<sup>[30]</sup>和单向耦合热传导理论建立均匀材料矩形微板热-弹耦合自由振动的控制微分方程。在上下表面绝热边界条件下寻求用挠度函数表示的准一维热传导方程的解析解。从而将包含热弯曲内力的结构振动方程转化为只包含挠度振幅的偏微分方程。在四边简支边界条件下,推导出 Levinson 微板的复频率解析解,从而可由复频率法求得反映热弹性阻尼水平的逆品质因子解析解。通过数值结果定量地分析了剪切变形对热弹性阻尼值的影响程度。

## 1 问题的数学模型

考虑矩形微板,长度为  $a$ 、宽度为  $b$ 、厚度为  $h$ 。选取直角坐标系  $(x, y, z)$ ,将坐标面  $(x, y)$  置于微板的几何中面。则板的定义域为:  $0 < x < a, 0 < y < b, -h/2 < z < h/2$ 。基于 Levinson 高阶剪切变形板理论和单向耦合的热传导理论,采用解析方法研究矩形微板热弹性耦合小振幅自由振动,通过复频率法分析微板的热弹性阻尼。

### 1.1 位移分量

基于 Levinson<sup>[30]</sup>和 Wang 等<sup>[31]</sup>高阶剪切变形理论中所采用的位移假设,微板的位移场可表示为

$$u(x, y, z, t) = z\varphi_x(x, y, t) - \frac{4z^3}{3h^2} \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (1a)$$

$$v(x, y, z, t) = z\varphi_y(x, y, t) - \frac{4z^3}{3h^2} \left( \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \quad (1b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (1c)$$

式中  $t$  为时间;  $(u, v, w)$  分别为板内任意一点沿  $(x, y, z)$  轴方向的位移分量;  $\varphi_x$  和  $\varphi_y$  为中面法线分别绕  $y$  和  $x$  轴的转角。显然,令横向坐标  $z$  的三次项为 0, 式(1)即可退化为 Mindlin 板的位移场<sup>[31]</sup>。

### 1.2 应变分量

对于微板的小振幅自由振动,将式(1)代入弹性力学的几何方程可得应变分量

$$\epsilon_x = z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{4z^3}{3h^2} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \quad (2a)$$

$$\epsilon_y = z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{4z^3}{3h^2} \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \quad (2b)$$

$$\gamma_{xy} = z \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) - \frac{4z^3}{3h^2} \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \quad (2c)$$

$$\gamma_{xz} = (1 - 4z^2) \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (2d)$$

$$\gamma_{yz} = (1 - 4z^2) \left( \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \quad (2e)$$

### 1.3 应力分量

对于线弹性材料,由胡克定理给出应力分量

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) - \frac{E\alpha\theta}{1-\nu}, \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) - \frac{E\alpha\theta}{1-\nu}, \quad \sigma_z = 0 \quad (3a) \\ (\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) &= \frac{E}{2(1+\nu)} (\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}) \quad (3b) \end{aligned}$$

式中  $E, \nu$  和  $\alpha$  分别为微板的弹性模量、泊松比和线性热膨胀系数;  $\theta = T - T_0$  为由热弹性耦合振动引起的板内变温场,  $T$  为瞬态温度场,  $T_0$  为环境温度(为常数)。由式(2d),(2e)可知,式(3b)能够精确满足上下自由表面切应力为零的边界条件。然而,在 Mindlin 板理论中的假设位移场给出的横向切应力沿着板厚为常数,显然不满足上下表面的切应力为零的条件。为了补偿实际剪应力与假定的恒定剪应力沿厚度分布之间的差引入剪切修正因子。

### 1.4 运动方程

针对式(1)可以采用两种不同的方法来建立微板的运动方程。在 Levinson 板理论<sup>[30]</sup>中,通过将空间应力形式的弹性力学波动方程沿板厚进行静力等效积分来获得以等效内力和内力矩表示的运动方程。而在 Wang 等<sup>[31]</sup>板理论中,运动方程则是通过能量变分原理推导出的,其中引入了所谓的高阶弯矩和高阶剪力。然而,由于将挠度的导数作为独立变量进行变分,在夹紧边上出现了一阶剪力为零的不合理结果<sup>[32-33]</sup>。这是由于在夹紧边界上,Reddy 板理论除了给出与 Levinson 板理论相同的挠度和转角为零的边界条件外,还给出了挠度的斜率为零的条件。在简支边界上,Levinson 板理论只给出弯矩为零的自然边界条件,而 Reddy 板理论则另外给出了高阶弯矩为零的自然边界条件。这是因为基于 Reddy 板理论导出的以挠度为基本未知函数的自由振动控制方程是关于空间坐标的 6 阶偏微分方程<sup>[34]</sup>,一条边界上需要三个边界条件来确定特解。

然而,Levinson 板的自由振动控制方程为 4 阶偏微分方程(由后面的推导结果可知),一条边上只需要两个边界条件即可定解。在这里,微板的运动方程将采用 Levinson 板理论导出。将应力形式的弹性力学空间运动方程沿着板厚分别进行力和力矩的等效积分,并利用上下表面的应力边界条件得到 Levinson 板自由振动微分方程

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= I_2 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} - \frac{4I_4}{3h^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \right) \quad (4b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y &= I_2 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} - \frac{4I_4}{3h^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2} \right) \quad (4c) \end{aligned}$$

其中等效内力和内力矩的定义分别为

$$(M_x, M_y, M_{xy}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz \quad (5a)$$

$$(Q_x, Q_y) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \quad (5b)$$

式中  $M_x, M_y$  和  $M_{xy}$  为弯矩和扭矩,  $Q_x$  和  $Q_y$  为剪力。 $I_i$  为等效惯性参数,其定义为

$$\begin{aligned} (I_0, I_2, I_4) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z^2, z^4) \rho dz = \\ &\left( \rho h, \frac{\rho h^3}{12}, \frac{\rho h^5}{80} \right) \quad (6) \end{aligned}$$

式中  $\rho$  为质量密度。将式(3)代入式(5),并利用式(2)可得到用位移表示的内力和内力矩

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{4D}{5} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) - \frac{D}{5} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - M_T \quad (7a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \frac{4D}{5} \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) - \frac{D}{5} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) - M_T \quad (7b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \frac{2(1-\nu)D}{5} \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) - \frac{(1-\nu)D}{5} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (7c) \end{aligned}$$

$$Q_x = A_s \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (7d)$$

$$Q_y = A_s \left( \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \quad (7e)$$

式中  $A_s = Eh/[3(1+\nu)]$  为剪切刚度,  $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$  为弯曲刚度。  $M_T$  为热弯矩, 定义为

$$M_T = \frac{\alpha E}{1-\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \theta z dz \quad (8)$$

将式(4b)和(4c)分别关于  $x$  和  $y$  求偏导数后相加, 并利用式(4a)可得

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ I_0 w_0 + I_2 \kappa_0 - \frac{4I_4}{3h^2} (\kappa_0 + \nabla^2 w_0) \right] \quad (9a)$$

其中

$$\kappa_0 = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (9b)$$

然后将式(7)代入式(9)可得位移形式的运动方程

$$\frac{4}{5} D \nabla^2 \kappa_0 - \frac{1}{5} D \nabla^4 w_0 - \nabla^2 M_T = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ I_0 w_0 + I_2 \kappa_0 - \frac{4I_4}{3h^2} (\kappa_0 + \nabla^2 w_0) \right] \quad (10)$$

将式(7d)和(7e)代入式(4a)可得

$$\kappa_0 = -\nabla^2 w_0 + \frac{I_0}{A_s} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (11)$$

再将式(11)代入式(10), 消去曲率函数  $\kappa_0$  可得只包含挠度  $w_0$  的运动微分方程

$$D \nabla^4 w_0 + \nabla^2 M_T = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ I_0 w_0 - \left( I_2 + \frac{4DI_0}{5A_s} \right) \nabla^2 w_0 + \frac{4I_2 I_0}{5A_s} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \right] \quad (12)$$

其中, 热弯矩与变温场确定, 而变温场需要由热弹耦合的热传导方程求得。

### 1.5 热传导方程

基于单向耦合热弹性理论<sup>[1]</sup>, 微板的热传导方程为

$$k \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) = \rho C \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\alpha E T_0}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (13)$$

式中  $k$  为导热系数,  $C$  为单位质量下的比热容,  $e$  为体积应变, 具体可表示为

$$e = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left[ z \kappa_0 - \frac{4z^3}{3h^2} (\kappa_0 + \nabla^2 w_0) \right] + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \theta \quad (14)$$

对于横向自由振动的微板谐振器而言, 温度梯度沿着板厚度方向的变化要远大于沿面内的变化。因此, 可忽略温度关于面内坐标的二阶导数项, 并将式(14)代入式(13)得到单向耦合的准一维热传导

方程

$$k \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \left[ 1 + \frac{(1+\nu) E \alpha^2 T_0}{(1-\nu)(1-2\nu) \rho C} \right] \rho C \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\alpha E T_0}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial t} \left[ z \kappa_0 - \mu z^3 (\kappa_0 + \nabla^2 w_0) \right] \quad (15)$$

对于常见的均匀材料,  $\frac{(1+\nu) E \alpha^2 T_0}{(1-\nu)(1-2\nu) \rho C} < 10^{-4}$ <sup>[5-16]</sup>。为了简便计算, 可以忽略这一微量, 得到简化的热传导方程

$$k \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \rho C \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\alpha E T_0}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial t} \left[ z \kappa_0 - \frac{4z^3}{3h^2} (\kappa_0 + \nabla^2 w_0) \right] \quad (16)$$

## 2 热弹性耦合振动响应

由于系统没有外界机械和温度载荷激励, 位移场和温度场的动力响应可假设为如下调和模式

$$(w_0, \varphi_x, \varphi_y, \theta) = (\bar{w}, \bar{\varphi}_x, \bar{\varphi}_y, \bar{\theta}) e^{i\omega t} \quad (17)$$

式中  $\omega$  为板振动频率,  $\bar{w}$  为横向位移的振幅,  $\bar{\varphi}_x, \bar{\varphi}_y$  为转角的振幅,  $\bar{\theta}$  为温度的振幅,  $i = \sqrt{-1}$ 。将式(17)代入式(12)和(15)消去时间坐标, 可得下列偏微分方程:

$$D \nabla^4 \bar{w} + \mu_2 \nabla^2 \bar{w} + \mu_0 \bar{w} + \nabla^2 \bar{M}_T = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2} = \frac{i\omega}{\chi} \left\{ \bar{\theta} + \frac{\Delta_E}{(1-\nu)\alpha} \left[ z \bar{\kappa}_0 - \frac{4z^3}{3h^2} (\bar{\kappa}_0 + \nabla^2 \bar{w}_0) \right] \right\} \quad (19)$$

其中

$$\Delta_E = \frac{E \alpha^2 T_0}{\rho C}, \chi = \frac{k}{\rho C} \quad (20a)$$

$$\mu_0 = \omega^2 I_0 \left( \omega^2 \frac{4I_2}{5A_s} - 1 \right), \mu_2 = \omega^2 \left[ I_2 + \frac{4DI_0}{5A_s} \right] \quad (20b)$$

$$\bar{\kappa}_0 = \frac{\partial \bar{\varphi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\varphi}_y}{\partial y},$$

$$\bar{M}_T = \frac{\alpha E}{1-\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\theta}(x, y, z) z dz \quad (20c)$$

为了求解方便, 引入下列无量纲量

$$\xi = \frac{x}{a}, \eta = \frac{y}{b}, (W, \delta) = \frac{1}{a} (\bar{w}, b),$$

$$(\zeta, \lambda) = \frac{1}{h} (z, a) \quad (21a)$$

$$\Theta = \alpha \bar{\theta}, K = a \bar{\kappa}_0, m_T = \frac{a}{D} \bar{M}_T,$$

$$\Omega = a^2 \omega \sqrt{\frac{\rho h}{D}}, c_s = \frac{1}{4(1-\nu)\lambda^2} \quad (21b)$$

$$g = \lambda^2 \chi \sqrt{\frac{\rho h}{D}}, q = \frac{\Delta_E}{\lambda \alpha (1 - \nu)},$$

$$p = \sqrt{-i \frac{\Omega}{g}} \quad (21c)$$

将式(21)代入方程(18)和(19), 可得无量纲振动方程和热传导方程:

$$\tilde{\nabla}^4 W + \mu_2 \Omega^2 \tilde{\nabla}^2 W + (\mu_{00} + \mu_{02} \Omega^2) \cdot \Omega^2 W + \tilde{\nabla}^2 m_T = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial \zeta^2} + p^2 \bar{\Theta} = -p^2 q \left[ \zeta K - \frac{4}{3} (K + \nabla^2 \tilde{W}) \zeta^3 \right] \quad (23)$$

其中

$$\mu_{00} = -1, \mu_{02} = \frac{1}{60(1-\nu)\lambda^4},$$

$$\mu_2 = \left[ \frac{1}{5(1-\nu)} + \frac{1}{12} \right] \frac{1}{\lambda^2} \quad (24a)$$

$$K = -\nabla^2 W - c_s \Omega^2 W,$$

$$\tilde{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \quad (24b)$$

微分方程(23)的通解为

$$\bar{\Theta} = A \sin p\zeta + B \cos p\zeta - q \left[ K + \frac{8}{p^2} (K + \tilde{\nabla}^2 W) \right] \zeta + \frac{4q}{3} (K + \tilde{\nabla}^2 W) \zeta^3 \quad (25)$$

式中 系数  $A, B$  对坐标  $\zeta$  来说为积分常数, 但是它们还是坐标  $\xi, \eta$  的函数。

在微板的上、下表面给出无量纲绝热边界条件

$$\left. \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \zeta} \right|_{\zeta = \pm \frac{1}{2}} = 0 \quad (26)$$

将式(25)代入式(26), 可得

$$A = -\frac{q}{p \cos \frac{p}{2}} \left( \tilde{\nabla}^2 W + \frac{8c_s}{p^2} \Omega^2 W \right), B = 0 \quad (27)$$

将式(27)代入式(25), 利用式(24a)可得 Levinson 微板的变温场

$$\bar{\Theta} = q \left[ \zeta - \frac{\sin p\zeta}{p \cos(p/2)} \right] \left( \tilde{\nabla}^2 W + \frac{8c_s}{p^2} \Omega^2 W \right) + q c_s \Omega^2 W \left( 1 - \frac{4}{3} \zeta^2 \right) \zeta \quad (28)$$

利用式(20c)和(21b)可得无量纲的热弯矩

$$\Omega = \left\{ \frac{-\mu_{00} + (\mu_2 + \beta_2) \Omega_{K0} \pm \sqrt{[-\mu_{00} + (\mu_2 + \beta_2) \Omega_{K0}]^2 - 4\mu_{02} (1 + \beta_1) \Omega_{K0}^2}}{2\mu_{02}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (35)$$

在式(34)中令  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ , 可先得到无阻尼(等温)Levinson 板的实频率

$$\Omega_0 = \left\{ \frac{-\mu_{00} + \mu_2 \Omega_{K0} \pm \sqrt{[-\mu_{00} + \mu_2 \Omega_{K0}]^2 - 4\mu_{02} \Omega_{K0}^2}}{2\mu_{02}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (36)$$

$$m_T = 12(1 + \nu) \lambda \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Theta \zeta d\zeta \quad (29)$$

将式(28)代入式(29), 可得

$$m_T = \beta_1 \tilde{\nabla}^2 W + \beta_2 c_s \Omega^2 W \quad (30)$$

其中

$$\beta_1 = (1 + \nu) \lambda q f(\Omega),$$

$$\beta_2 = (1 + \nu) \lambda q \left[ \frac{8}{p^2} f(\Omega) + \frac{4}{5} \right] \quad (31a)$$

$$f(\Omega) = 1 + \frac{24}{p^3} \left( \frac{p}{2} - \tan \frac{p}{2} \right) \quad (31b)$$

将式(30)代入式(22), 可得包含阻尼的振动方程

$$(1 + \beta_1) \tilde{\nabla}^4 W + (\mu_2 + c_s \beta_2) \Omega^2 \tilde{\nabla}^2 W + (\mu_{00} + \mu_{02} \Omega^2) \Omega^2 W = 0 \quad (32)$$

微分方程(32)为矩形微板在 Levinson 高阶剪切理论下热-弹耦合自由振动的无量纲控制方程, 其中包含了复频率参数  $\Omega$ 。结合给定的边界条件, 求解微分方程(32)的特征值问题, 即可得到微结构的振动模态  $W$  和固有频率  $\Omega$ 。利用式(24), (25)和(17), 可进一步得到系统的有阻尼动态响应。

为了便于获得问题的精确解析解, 这里假设矩形微板的四边简支。则可以证明微分方程(28)的边界条件可表示为(证明见附录)

$$W = 0, \tilde{\nabla}^2 W = 0 \quad (33)$$

显然  $W = A_{mn} \sin(m\pi\xi) \sin(n\pi\eta)$  满足上述边界条件, 其中  $A_{mn}$  为任意常数,  $m, n = 1, 2, 3, \dots$ 。将其代入方程(32)由系数  $A_{mn}$  的任意性可得特征方程

$$\mu_{02} \Omega^4 + [\mu_{00} - (\mu_2 + c_s \beta_2) \Omega_{K0}] \Omega^2 + (1 + \beta_1) \Omega_{K0}^2 = 0 \quad (34)$$

式中  $\Omega_{K0} = (m^2 + n^2/\delta^2) \pi^2$  为无阻尼 Kirchhoff 板的无量纲固有频率。

由式(31)可知参数  $\beta_1$  和  $\beta_2$  是关于复频率  $\Omega$  的超越函数, 因此代数方程(34)是关于  $\Omega$  的超越方程, 难以获得其解析解。这里采用文献中计算热弹性阻尼时常用的近似方法<sup>[3-6]</sup>, 即令  $\beta_1 = \beta_1(\Omega_0), \beta_2 = \beta_2(\Omega_0)$ 。其中  $\Omega_0$  是无阻尼 Levinson 微板的固有频率。于是, 由方程(34)可求得具有热弹性阻尼的 Levinson 板的复频率解析解

然后由式(31)算得 $\beta_1(\Omega_0)$ 和 $\beta_2(\Omega_0)$ ,并将其代入式(35),即可得到系统的复频率 $\Omega$ 。最后,采用复频率法得到用逆品质因子表示的四边简支矩形 Levinson 微板的热弹性阻尼精确解析解

$$Q^{-1} = 2 \left| \frac{\text{Im}(\Omega)}{\text{Re}(\Omega)} \right| \quad (37)$$

式中  $\text{Re}(\Omega)$ 和 $\text{Im}(\Omega)$ 分别是无量纲复频率的实部和虚部。至此,已求得了四边简支 Levinson 微板谐振器的热弹性阻尼解析解。实际上,上述解答也可以推广至具有直边的周边简支多边形微板。

如果在式(1)中令高阶项为零,则上述解答退化为 Mindlin 板理论下周边简支微板的热-弹耦合振动响应。可以证明,如果选择 Mindlin 板的剪切修正系数为 $5/6$ ,则两种剪切变形理论下微分方程(22)和代数方程(34)中系数 $\mu_{00}$ , $\mu_{02}$ 和 $\mu_2$ 的值完全相同。因此,对于周边简支等温( $\beta_1 = \beta_2 = 0$ )矩形板 Mindlin 理论和 Levinson 理论预测的固有频率相同。

然而,由于两种剪切变形理论下的体积应变率各不相同,由此产生的耦合变温场不相同。由式(28)可以退化得到 Mindlin 微板变温场

$$\bar{\Theta}_M = q \left[ \zeta - \frac{\sin p\zeta}{p \cos(p/2)} \right] \cdot (\tilde{\nabla}^2 W + c_s \Omega_M^2 W) \quad (38)$$

如果令 $\beta_2 = \beta_1 / [5(1-\nu)\lambda^2]$ ,则式(35)退化为四边简支 Mindlin 矩形微板复频率的解析解。

特别地,在式(38)中令 $c_s = 0$ 即可得到 Kirchhoff 微板的变温场。进一步在式(34)中令 $\mu_2 =$

$\beta_2 = \mu_{02} = 0$ ,得到 Kirchhoff 微板的复频率<sup>[3,5-6]</sup>

$$\Omega_K = \Omega_{K0} \sqrt{1 + \beta_1(\Omega_{K0})} \approx \Omega_{K0} [1 + \beta_1(\Omega_{K0})/2] \quad (39)$$

由此,利用式(37)可以求得 Kirchhoff 微板 L-R<sup>[3]</sup>形式的热弹性阻尼解析解<sup>[10]</sup>。这里需要说明的是,解答(39)适用于各种边界条件。对于不同边界条件只要将相应等温板的频率代入式(39)中,即可得到 Kirchhoff 微板的复频率。

### 3 数值结果与讨论

在下面的数值计算中,分别选取微板的材料为陶瓷(SiC)和金属(Ni)。在平衡温度 $T_0 = 300$  K条件下材料物理参数如表1所示。在后面的数值结果中除非特别说明外,对应的振动模态都为一阶。首先,在表2中给出了由式(36)计算的对应不同振动模态和不同边/厚比的无阻尼正方形 Levinson 板的无量纲固有频率的数值结果,并与相应 Kirchhoff 板理论的结果进行了比较。由此发现,随着边/厚比的减小和模态阶数的增加 Levinson 板与 Kirchhoff 板的频率之差单调增大。例如,在一阶模态下对应 $a/h = 5$ 的相对误差为 $(\Omega_{L0} - \Omega_{K0})/\Omega_{K0} = 11.6\%$ ,而对应于模态 $((m, n) = (3, 3))$ 相对误差则达到了 $44.98\%$ 。另外,在 $a/h = 10$ 时还给出了 Reddy 高阶剪切板理论<sup>[31]</sup>和由 Levinson 板理论和 Reddy 板理论预测的结果,可见二者十分相近,这一结果验证了式(36)的正确性。

表 1 微板的材料性质参数( $T_0=300$  K)<sup>[23, 25]</sup>

Tab. 1 Parameters of material property of the micro plate ( $T_0=300$  K)<sup>[23, 25]</sup>

Materials	$E/$ GPa	$\rho/$ ( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )	$\kappa/$ ( $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ )	$C/$ ( $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ )	$\alpha/$ $\text{K}^{-1}$	$\nu$
SiC	427	3100	65	670.0	$4.3 \times 10^{-6}$	0.17
Ni	210	8900	92	438.2	$13.0 \times 10^{-6}$	0.30

表 2 不同模态下等温正方形微板在 Levinson 板理论下的无量纲固有频率 $\Omega_{L0}(a=b, \nu=0.3)$

Tab. 2 Values of dimensionless natural frequency  $\Omega_{L0}$  of the isothermal square micro plate based on Levinson plate theory corresponding to different modes ( $a=b, \nu=0.3$ )

Modes	$\Omega_{K0}$	$a/h$							
		100	50	30	20	10	8	5	
(1, 1)	19.739	19.732	19.710	19.660	19.563	19.065	19.065 <sup>&amp;</sup>	18.721	17.449
(1, 2)	49.348	49.309	49.169	48.857	48.270	45.483	45.487 <sup>&amp;</sup>	43.730	38.152
(2, 2)	78.957	78.957	78.501	77.716	76.260	69.794	69.809 <sup>&amp;</sup>	66.028	55.150
(1, 3)	98.696	98.539	97.987	96.770	94.545	85.038	85.065 <sup>&amp;</sup>	79.345	65.145
(2, 3)	128.300	128.040	127.110	125.080	121.440	106.680	106.740 <sup>&amp;</sup>	98.901	78.697
(3, 3)	177.650	177.140	175.380	171.580	164.960	140.060	140.170 <sup>&amp;</sup>	127.900	98.500

注:上标“&”表示文献[31]中 Reddy 高阶剪切理论的预测值

为了定量地分析不同板理论预测微板热弹性阻尼的差异,表3给出了前六种振动模式下,分别由三种板理论预测的正方形陶瓷(SiC)微板的热弹性阻尼值随着板的边/厚比的变化规律。其中Kirchhoff微板的热弹性阻尼 $Q_K^{-1}$ 是由L-R形式的解析解<sup>[10]</sup>得到的,Mindlin微板和Levinson微板的结果是由式(35)和(37)计算得到的。分析表中的数据发现经典板理论过高地估计了微板的热弹性阻尼,而且随着模态阶数和板厚的增大经典板理论与两种剪切变形板理论的预测值之间的差别变得逐渐显著。在 $a/h=10$ 和 $(m,n)=(3,3)$ 时的相对误差 $error=$

$(Q_L^{-1} - Q_K^{-1})/Q_K^{-1}$ 达到了7.14%。虽然等温时的固有频率相同,但是由于热弹-耦合振动产生的温度场(28)和(38)不同,两种剪切变形板理论预测的热弹性阻尼之间也存在差异。在 $a/h=10$ , $(m,n)=(1,1)$ 条件下,相对误差仅为 $(Q_L^{-1} - Q_M^{-1})/Q_L^{-1}=0.03\%$ ;而在 $(m,n)=(3,3)$ 时相对误差达到2.1%。可见,对于厚板在高阶模态下的振动,Levinson高阶剪切变形板理论能够给出更为精确的热弹性阻尼预测结果。因为温度场(28)的非齐次解部分包含了关于厚度方向坐标的三次项。

表3 不同板理论下正方形陶瓷(SiC)微板的热弹性阻尼( $Q^{-1} \times 10^4$ )比较( $a=b, h=1 \mu\text{m}$ )

Tab. 3 Comparison of TED ( $Q^{-1} \times 10^4$ ) of the square micro plate of ceramic (SiC) based on different plate theories ( $a=b, h=1 \mu\text{m}$ )

Modes	$a/h=50$			$a/h=20$			$a/h=10$		
	$Q_K^{-1}$	$Q_M^{-1}$	$Q_L^{-1}$	$Q_K^{-1}$	$Q_M^{-1}$	$Q_L^{-1}$	$Q_K^{-1}$	$Q_M^{-1}$	$Q_L^{-1}$
(1,1)	1.3837	1.3793	1.3793	6.6978	6.5890	6.5881	6.0209	5.8610	5.8592
(1,2)	3.3256	3.3014	3.3000	7.5698	7.3897	7.3876	2.8849	2.7652	2.7694
(2,2)	4.9649	4.9072	4.9068	6.0209	5.8610	5.8592	1.8868	1.7785	1.7890
(1,3)	5.8451	5.7640	5.7634	5.1510	5.0038	5.0028	1.5374	1.4348	1.4486
(2,3)	6.8366	6.7228	6.7218	4.1857	4.0514	4.0517	1.2054	1.1104	1.1279
(3,3)	7.7265	7.5728	7.5714	3.1669	3.0442	3.0473	0.8883	0.8035	0.8249

为了考察面内几何尺寸对热弹性阻尼的影响规律,表4中给出了 $a/h=10, h=1 \mu\text{m}$ 的矩形金属(Ni)微板在前六阶振动模式下对应于不同长/宽比 $a/b$ 的热弹性阻尼。分析表中结果得知,两种理论预测结果的相对误差随着比值 $a/b$ 的增大而增大。另外,随着宽度方向( $y$ 方向)节线的增加,相对误差变大。在 $a/b=3$ 时给出相对误差 $error=(Q_L^{-1} - Q_K^{-1})/Q_K^{-1}$ 的数值,最大值发生在模态(1,3)。为了

反映具有不同长/宽比的微板的热弹性阻尼随板厚的变化规律,图1绘出了在长宽比分别等于 $a/b=1, 1.5, 2, 3$ 时矩形陶瓷(SiC)微板的热弹性阻尼随板厚连续变化的曲线。随着长宽比的增加,热弹性阻尼的最大值点向左移动(或相应的临界厚度减小);其中Kirchhoff板的最大阻尼值保持不变,而Levinson板的最大阻尼值逐渐降低,二者的差值逐渐增大。

表4 具有不同长宽比的矩形金属(Ni)微板在前六阶振动模式下的热弹性阻尼( $Q^{-1} \times 10^4$ ) ( $a/h=10, h=1 \mu\text{m}$ )

Tab. 4 TED ( $Q^{-1} \times 10^4$ ) of rectangular metal (Ni) micro plates with different length-to-width ratios in the first six modes ( $a/h=10, h=1 \mu\text{m}$ )

Modes	$a/b=1.5$		$a/b=2$		$a/b=2.5$		$a/b=3$		Error
	$Q_K^{-1}$	$Q_L^{-1}$	$Q_K^{-1}$	$Q_L^{-1}$	$Q_K^{-1}$	$Q_L^{-1}$	$Q_K^{-1}$	$Q_L^{-1}$	
(1,1)	19.9760	18.8740	14.7420	13.8110	10.808	10.0070	<b>8.1283</b>	<b>7.4233</b>	<b>8.67</b>
(1,2)	<b>8.1283</b>	<b>7.4233</b>	5.0141	4.4598	3.3792	2.9476	2.4230	2.0857	13.80
(2,1)	12.2750	11.4260	9.9152	9.1450	7.9498	7.2518	<b>6.4103</b>	<b>5.7793</b>	<b>9.84</b>
(2,2)	<b>6.4103</b>	<b>5.7793</b>	4.3151	3.8081	3.0500	2.6486	2.2502	1.9320	14.10
(1,3)	4.0790	3.5897	2.4230	2.0856	1.5977	1.3594	1.1304	0.9582	15.20
(3,1)	7.3093	6.6375	<b>6.4103</b>	<b>5.7792</b>	5.5403	4.9547	4.7568	4.2191	11.30

图2绘出了具有不同边/厚比的正方形金属(Ni)微板分别在Levinson和Kirchhoff板理论下热弹性阻尼随厚度的变化曲线。结果表明,在热弹性阻尼的最大值附近两种理论预测值的差别十分显

著,而且随着边/厚比的增大,差别更加明显。图3给出了具有不同边长的正方形陶瓷微板(SiC)热弹性阻尼与无阻尼Kirchhoff微板的固有频率之间的特性曲线。对于给定边长的微板,热弹性阻尼最大

值对应的固有频率值可定义为临界频率,相应的厚度成为临界厚度。随着板的面内尺寸增大,临界频率或临界厚度减小。

图 4 分别给出了  $a=50, 100 \mu\text{m}$  的正方形陶瓷 (SiC) 微板中热弹性阻尼引起的频移(Frequency shift)  $(\Omega - \Omega_0)/\Omega_0$  和衰减 (Attenuation)  $\text{Im}(\Omega)/\Omega_0$ 。由图可知:相对厚度在薄板范围内时, Kirchhoff 板理论与 Levinson 板理论的结果差别很小;随着厚度增大,两种理论预测的衰减曲线仍然基本重合,但是频移曲线的分离程度加剧,即 Levinson 板理论预测的频移量比 Kirchhoff 板理论的预测结果越来越小。衰减函数在临界厚度处取得极值,在此极值点处频移函数增加速度最快,能量耗散达到最高值。

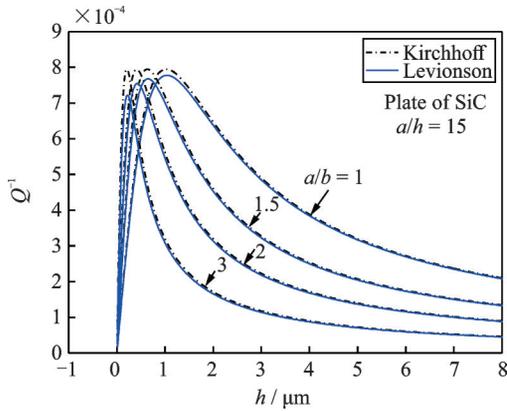


图 1 具有不同长宽比的矩形陶瓷 (SiC) 微板的热弹性阻尼随板厚的关系曲线 ( $a/h = 15$ )  
 Fig. 1 Curves of the TED versus the thickness of rectangular ceramic (SiC) micro plates with different values of the length-to-width ratio ( $a/h = 15$ )

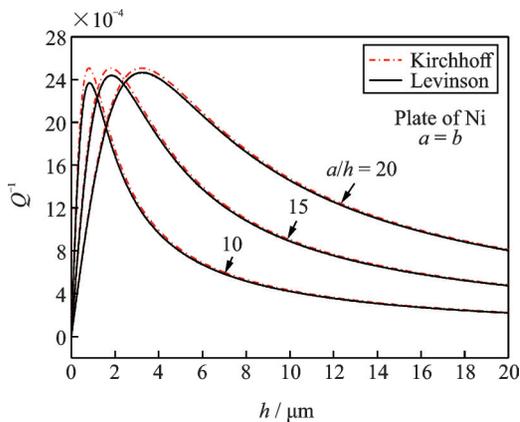


图 2 具有不同边/厚比的正方形金属 (Ni) 微板的热弹性阻尼随板厚的关系曲线 ( $a = b$ )  
 Fig. 2 Curves of the TED versus the thickness of square metal (Ni) micro plates with different values of the length-to-width ratio ( $a = b$ )

最后讨论微板内的变温场沿着厚度的变化特性。考虑正方形微板,将一阶模态振幅  $W =$

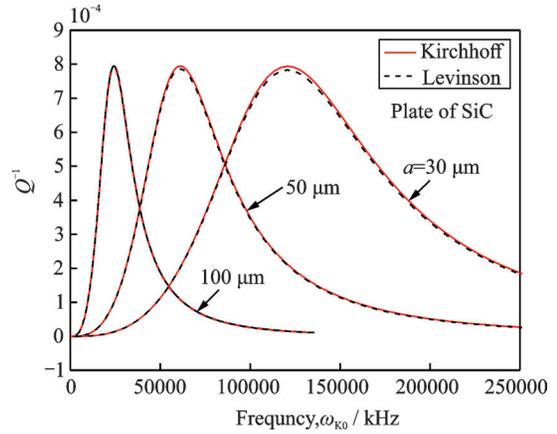


图 3 不同边长的正方形陶瓷 (SiC) 微板的热弹性阻尼与 Kirchhoff 板的基频之间的关系曲线  
 Fig. 3 Curves of TED versus the fundamental frequency of the Kirchhoff plate for the square ceramic (SiC) micro plate with different values of the length of the side

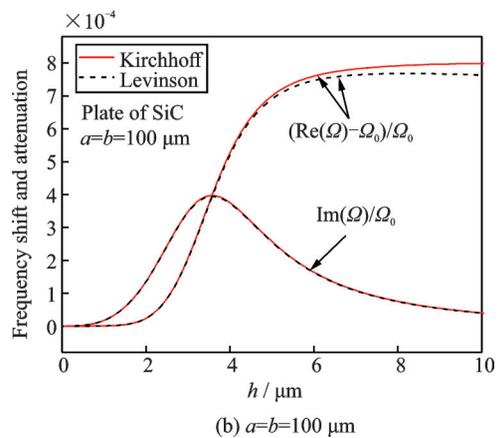
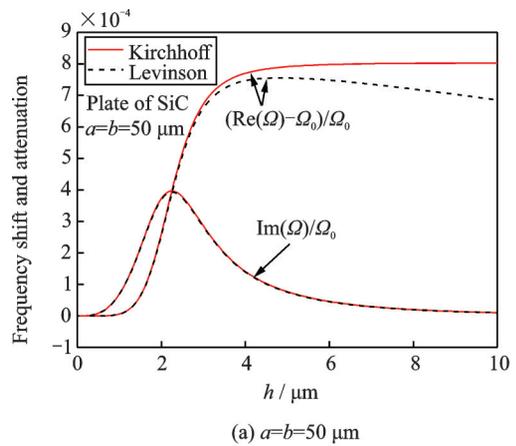


图 4 陶瓷 (SiC) 正方形微板的频移和衰减随板厚变化的特性曲线  
 Fig. 4 Frequency shift and attenuation versus the plate thickness in the ceramic (SiC) micro square plate

$A_{11} \sin \pi \xi \sin \pi \eta$  代入式 (28) 和 (38) 可得到各种板理论下温度场振幅,统一表达式为

$$\bar{\theta} = F(\xi)W \tag{40}$$

其中,Levinson 微板

$$F_L = q \left[ \zeta - \frac{\sin(p_L \zeta)}{p_L \cos(p_L/2)} \right] \left( -2\pi^2 + \frac{8c_s}{\rho_L^2} \Omega_L^2 \right) + c_s \Omega_L^2 \left( 1 - \frac{4}{3} \zeta^2 \right) \zeta \quad (41a)$$

$$c_s = \frac{1}{4(1-\nu)\lambda^2} \quad (41b)$$

Mindlin 微板

$$F_M = q \left[ \zeta - \frac{\sin(p_M \zeta)}{p_M \cos(p_M/2)} \right] (-2\pi^2 + c_s \Omega_M^2), \quad c_s = \frac{1}{5(1-\nu)\lambda^2} \quad (42)$$

Kirchhoff 微板

$$F_K = -2\pi^2 q \left[ \zeta - \frac{\sin(p_K \zeta)}{p_K \cos(p_K/2)} \right] \quad (43)$$

图 5 给出了三种板理论下厚度为  $h = 2 \mu\text{m}$ , 边厚比  $a/h = 5, 10, 20$  的正方形金属 (Ni) 微板变温场函数  $F(\zeta)/\alpha$  曲线。该曲线可反映温度场沿厚度的变化态势, 具体变温场与挠度振幅函数有关。结果表明, 对于厚板 ( $a/h = 5$ ) 和中厚板 ( $a/h = 10$ ), 经典板理论与剪切变形理论的预测结果之间的差别十分显著, 但是两种剪切变形理论的结果之间的差别非常小; 对于薄板 ( $a/h = 30$ ) 三种理论的预测结果几乎没有差别。这时, Kirchhoff 板理论的结果已经具有足够的精度。

### 4 结 论

基于 Levinson 板理论和准一维单向耦合的热传导方程, 推导出了四边简支矩形微板自由振动的复频率以及板内变温场的精确解析解, 即式 (35) 和 (41)。进一步由复频率法给出了表征 Levinson 微板热弹性阻尼的逆品质因子。通过数值算例定量地分析了 Levinson 微板的热弹性阻尼随着板的几何尺寸和模态变化的规律, 并与 Mindlin 微板和 Kirchhoff 微板的结果进行了比较, 定量地分析了剪切变形对热弹性阻尼的影响程度。数值结果表明, Kirchhoff 板理论预测的热弹性阻尼值大于 Levinson 板理论和 Mindlin 板理论的预测值。这是由于经典板理论忽略了横向剪切变形从而过高地估计了微板的刚度。随着板厚的增加, 剪切变形对热弹性阻尼的影响变得显著。另外还从理论上证明了在四边简支条件下, 由 Mindlin 板理论和 Levinson 板理论导出的等温板的固有频率相等, 但是相应的热弹性阻尼值却不同, 对于厚板这一差别更加明显。因此, Levinson 高阶剪切变形理论能够更好地预测厚板谐振器的热弹

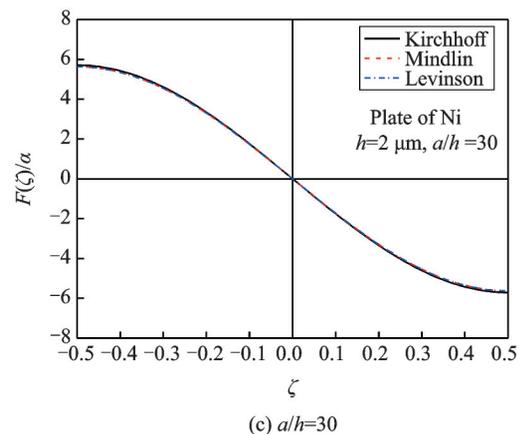
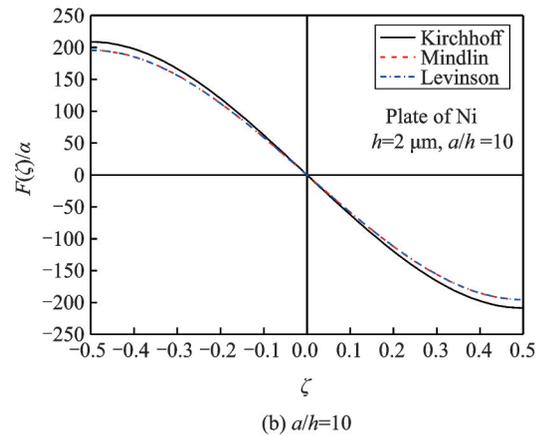
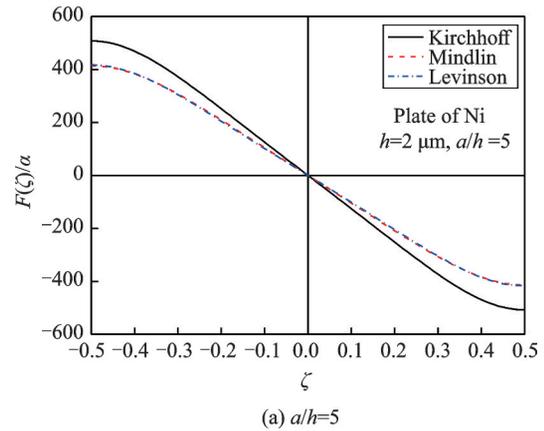


图 5 具有不同边厚比的正方形金属 (Ni) 板中变温场沿着板厚的变化的曲线

Fig. 5 Profiles of the temperature change along the plate thickness in a square metal (Ni) micro plate for different side-to-thickness ratios

性阻尼, 因为该理论确定的温度场中包含了厚度方向坐标的高阶项, 由此确定的应力场也能精确满足表面切应力为零的边界条件。

### 参考文献:

[1] Nowacki W. Thermoelasticity [M]. 2nd ed. Warszawa: PWN-Polish Scientific Publishers, 1986: 1-50.  
 [2] Zener C. Internal friction in solids. I. Theory of internal friction in reeds [J]. Physical Review, 1937, 53: 90-99.

- [3] Lifshitz R, Roukes M L. Thermoelastic damping in micro-and nanomechanical systems [J]. *Phys. Rev. B.*, 2000, 61: 5600-5609.
- [4] Nayfeh A H, Younis M I. Modeling and simulations of thermoelastic damping in microplates[J]. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2004, 14: 1711-1717.
- [5] Sun Y X, Tohmyoh H. Thermoelastic damping of the axisymmetric vibration of circular plate resonators [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 319: 392-405.
- [6] Sun Y X, Saka M. Thermoelastic damping in micro-scale circular plate resonators[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2010, 329:328-337.
- [7] Ali N A, Mohammadi A K. Thermoelastic damping in clamped-clamped annular microplate [J]. *Applied Mechanics and Materials*, 2012, 110-116: 1870-1878.
- [8] Salajeghe S, Khadem S E, Rasekh M. Nonlinear analysis of thermoelastic damping in axisymmetric vibration of micro circular thin-plate resonators[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2012, 36: 5991-6000.
- [9] Mohammadi A K, Ali N A. Effect of high electrostatic actuation on thermoelastic damping in thin rectangular microplate resonators [J]. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2015, 53: 317-329.
- [10] Li P, Fang Y M, Hu R F. Thermoelastic damping in rectangular and circular microplate resonators [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2012, 331:721-733.
- [11] Fang Y M, Li P, Wang Z L. Thermoelastic damping in the axisymmetric vibration of circular micro plate resonators with two-dimensional heat conduction [J]. *Journal of Thermal Stresses*, 2013, 36: 830-850.
- [12] Fang Y M, Li P, Zhou H Y, et al. Thermoelastic damping in rectangular microplate resonators with three-dimensional heat conduction [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2017, 133: 578-589.
- [13] Ma C Z, Chen S Y, Guo F L. Thermoelastic damping in micromechanical circular plate resonators with radial pre-tension [J]. *Journal of Thermal Stresses*, 2020, 43:175-190.
- [14] Sharma J N, Sharma R. Damping in micro-scale generalized thermoelastic circular plate resonators [J]. *Ultrasonics*, 2011, 51: 352-358.
- [15] Sharma J N, Grover D. Thermoelastic vibration analysis of MEMS/NEMS plate resonators with voids [J]. *Acta Mechanica*, 2012, 223:167-187.
- [16] Guo F L, Song J, Wang G Q, et al. Analysis of thermoelastic dissipation in circular micro-plate resonators using the generalized thermoelasticity theory [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, 333: 2465-2474.
- [17] Grover D. Damping in thin circular viscothermoelastic plate resonators [J]. *Canadian Journal of Physics*, 2015, 93: 1597-1605.
- [18] Chugh N, Partap G. Study of thermoelastic damping in microstretch thermoelastic thin circular plate [J]. *Journal of Vibration Engineering and Technologies*, 2020, DOI: 10.1007/s42417-020-00213-6.
- [19] Bishop G E, Kinra V. Equivalence of the mechanical and entropic description of elastothermodynamics in composite materials [J]. *Mechanics of Composite Materials and Structures*, 1996, 3: 83-95.
- [20] Bishop G E, Kinra V. Elastothermodynamic damping in laminated composites [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1997, 34:1075-1092.
- [21] Sun Y X, Jiang Y, Yang J L. Thermoelastic damping of the axisymmetric vibration of laminated trilayered circular plate resonators [J]. *Canada Journal of Physics*, 2014, 92: 1026-1032.
- [22] Zuo W L, Li P, Zhang J R, et al. Analytical modeling of thermoelastic damping in bilayered microplate resonators [J]. *International Journal of Mechanical Science*, 2016, 106: 128-137.
- [23] Zuo W L, Li P, Du J K, et al. Thermoelastic damping in trilayered microplate resonators [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2019, 151: 595-608.
- [24] Liu S B, Ma J X, Yang X F, et al. Theoretical analysis of thermoelastic damping in bilayered circular plate resonators with two-dimensional heat conduction [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2018, 135: 114-123.
- [25] Liu S B, Ma J X, Yang X F, et al. Theoretical 3D model of thermoelastic damping in laminated rectangular plate resonators [J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2018, 18:1850158.
- [26] Li X P, Wang L N, Pan W J. Study of thermoelastic damping in fully clamped bilayered rectangular microplate resonators based on three-dimensional heat conduction [J]. *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, 2020, 40(1): 20-22.
- [27] Emami A A, Alibeigloo A. Thermoelastic damping analysis of FG Mindlin microplates using strain gradient theory [J]. *Journal of Thermal Stresses*, 2016, 39: 1499-1522.
- [28] Li S R, Chen S, Xiong P. Thermoelastic damping in functionally graded material circular micro plates [J]. *Journal of Thermal Stresses*, 2018, 41(10-12): 1396-1413.
- [29] Li S R, Ma H K. Analysis of free vibration of functionally graded material micro-plates with thermoelastic damping [J]. *Archive Applied Mechanics*, 2020, 90: 1285-1304.
- [30] Levinson M. A new rectangular beam theory [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1981, 74: 81-87.

- [31] Wang C M, Reddy J N, Lee K H. Shear deformable beams and plates-relationship with classical solutions [J]. Engineering Structures, 2000, 23(7):873-874.
- [32] Xia Y M, Li S R, Wan Z Q. Bending solutions of FGM Reddy-Bickford beams in terms of those of the homogenous Euler-Bernoulli beams [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2019, 32(4):393-420.
- [33] Groh R M J, Weaver P M. Static inconsistencies in certain axiomatic higher-order shear deformation theories for beams plates and shells [J]. Composite Structures, 2015, 120: 231-245.
- [34] Wang C M, Kitipornchai S, Reddy J N. Relationships between vibration frequencies of Reddy and Kirchhoff polygonal plates with simply supported edges [J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2000, 122: 77-81.
- [33] Groh R M J, Weaver P M. Static inconsistencies in cer-

## Analytical solution of thermoelastic damping in Levinson micro rectangular plate resonators

LI Shi-rong<sup>1,2</sup>, LIU Rong-gui<sup>1</sup>, WU Yong<sup>1</sup>

(1.Department of Civil Engineering, Nantong Institute of Technology, Nantong 226002, China;

2.School of Civil Science and Engineering, Yangzhou University, Yangzhou 225127, China)

**Abstract:** Based on Levinson's higher-order shear deformation plate theory, accurate analytical solutions for the complex natural frequency and the field of temperature change of a simply supported rectangular micro plate resonator in thermoelastic coupled free vibration are obtained. Furthermore, inverse quality factor representing the TED is extracted by using the complex frequency approach. Numerical results are presented to show the variation regulation of the TED versus the aspect ratio of the micro Levinson plate in different vibration modes. By comparing the values of TED based on the Levinson plate theory with those based on both Mindlin and Kirchhoff plate theories, the level of effect of shearing deformation on the TED is analyzed. The numerical results show that for the moderate thick and thick plate resonators the values of TED evaluated by the classical plate theory are obviously greater than that by shearing strained plate theory. It is because that the classical plate theory ignores the transvers shear deformation and over estimates the rigidity of the structure. In addition, the comparison between the predicted values of TED of Mindlin and Levinson microplates with four simply supported edges is given. As a result, Levinson higher-order shear deformation plate theory can better predict the TED of the thick microplate, because the displacement field of Levinson plate theory can accurately satisfy the stress-free conditions at the upper and lower surface and the temperature field contains the higher order term of the through-thickness coordinate.

**Key words:** thermoelastic coupled vibration; Levinson plate theory; complex frequency; thermoelastic damping; analytical solution

作者简介: 李世荣(1957-),男,博士,教授。电话:15062809918;E-mail: srli@yzu.edu.cn

### 附 录

设 Levinson 微板在  $\xi = 1$  处简支,则有边界条件

$$W(1, \eta) = 0, m_x(1, \eta) = 0 \quad (\text{A1})$$

由式(7a)可得无量纲弯矩

$$\bar{m}_x = \frac{a\bar{M}_x}{D} = \frac{4}{5} \left( \frac{\partial \bar{\varphi}_x}{\partial \xi} + \frac{\nu}{\delta} \frac{\partial \bar{\varphi}_y}{\partial \eta} \right) - \frac{1}{5} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\nu}{\delta} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right) - m_T \quad (\text{A2})$$

利用式(A1)和(29),在  $\xi = 1$  处

$$\bar{m}_x = \frac{4}{5} \frac{\partial \bar{\varphi}_x}{\partial \xi} - \frac{1}{5} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - \beta_1 \tilde{\nabla}^2 W - \beta_2 c_s \Omega^2 W \quad (\text{A3})$$

由于在  $\xi = 1$  处  $W = \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = \frac{\partial \bar{\varphi}_y}{\partial \eta} = 0$ ,再利用式(24b)  $\frac{\partial \bar{\varphi}_x}{\partial \xi} = -\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = -\tilde{\nabla}^2 W$  可得

$$\bar{m}_x(1, \eta) = -(1 + \beta_1) \tilde{\nabla}^2 W \quad (\text{A4})$$

于是由式(A1)可得

$$(\beta_1 + 1) \tilde{\nabla}^2 W = 0, \text{即 } \tilde{\nabla}^2 W = 0 \quad (\text{A5})$$