

基于实模态的非比例阻尼体系复模态叠加法

付相球¹, 潘旦光^{1,2}

(1. 北京科技大学土木工程系, 北京 100083; 2. 北京科技大学城市地下空间工程北京市重点实验室, 北京 100083)

摘要: 为提高非比例阻尼体系强迫振动时复模态叠加法的计算效率, 基于模态摄动法基本原理, 提出一种利用无阻尼体系实模态的复模态叠加法。该方法由模态摄动法将非比例阻尼体系的复模态表示为实模态线性组合, 在此基础上, 建立了强迫振动复模态叠加法的实模态的线性组合解。以一个带附加阻尼的强非比例阻尼三层框架结构为例进行地震反应分析, 计算结果表明当附加实模态数不小于 8 时, 模态摄动法所得的特征值误差小于 2%; 在复模态叠加法模态截断方面, 基于累积振型参与质量和累积振型贡献系数所得的模态数偏少, 建议采用首层平动的累积振型加速度贡献系数作为模态截断的依据, 此时, 复模态叠加法所得水平位移的峰值误差小于 10%, 累积误差小于 15%, 显示了良好的计算精度; 且该方法的计算时间小于基于状态空间法的复模态叠加法。以一个钢结构框架办公楼地震反应分析为例, 验证了该方法的适用性。综合来看, 对于强非比例阻尼体系, 强制解耦的实模态叠加法计算误差较大, 而该方法可兼顾计算效率与精度。

关键词: 地震反应分析; 模态叠加法; 非比例阻尼; 模态摄动法; 状态空间法

中图分类号: TU311.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2021)06-1142-09

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2021.06.005

引言

非比例阻尼体系广泛存在于现有的结构体系中, 如下部钢筋混凝土上部钢结构的竖向混合结构^[1-2]、附加阻尼器的振动控制结构^[3]、土-结构相互作用体系^[4-7]等。虽然直接积分法可用于非比例阻尼体系的动力反应分析, 但计算工作量较大。模态叠加法计算效率高, 且可识别对结构动力反应具有显著贡献的模态, 因而得到广泛的应用^[8-9]。

对于非比例阻尼体系, Foss^[10]提出以状态空间法求解非比例阻尼系统的复模态, 该方法可以得到精确的动力反应。但计算维数扩大了一倍, 且将实数域运算转换到复数域, 计算量约为实模态分析的 8 倍^[11]。为提高非比例阻尼体系模态叠加法的计算效率, Cronin^[12]通过忽略阻尼矩阵中的非对角元素, 强制解耦非比例阻尼体系以应用实模态叠加法求解体系的近似反应, 简单易行但误差难以控制^[13-14]。Roesset 等^[15]提出等效阻尼比的概念用于近似解耦非比例阻尼, 并常被用于混合结构的地震反应分析^[16-17], 这种方法实际上也属于强制解耦方法, 各阶模态的阻尼比在一定程度上考虑了耦合阻尼的影响, 提高了计算精度, 但不能解决计算误差无法估计

的问题^[18]。Ibrahimbegovic 等^[11]提出了应用实模态进行非比例阻尼体系动力反应的迭代模态叠加法, 这种方法将耦合阻尼的影响作为非线性荷载, 得到高精度的计算结果。张静等^[19]针对大规模非对称实矩阵的标准特征值问题, 发展了适用于大型复特征值问题求解的 Lanczos-QR 方法, 提高了计算效率, 同时避免了范数误差。事实上, 非比例阻尼体系复模态叠加法的理论是完备的, 问题在于状态空间复模态求解及复数域的叠加计算时间较长。为提高复模态的计算效率, 可将非比例阻尼系统看成由比例阻尼体系摄动后得到的新系统, 应用摄动法求解特征方程^[20-21]。Cha^[22]提出一阶摄动方法求解弱非比例阻尼系统; Tang 和 Wang^[23]提出一种可以处理重根问题的摄动方法。但一般的摄动法只适用于弱非比例阻尼的体系, 且需要用到原系统完整的模态空间。Lou 等^[24-25]提出的模态摄动法利用原系统的非完整模态即可得到二阶摄动精度, 并已应用到无阻尼离散和连续系统特征值问题的分析。Pan 等^[26]应用模态叠加法基本原理, 构建等效比例阻尼系统作为原系统, 提出一种可求解强非比例体系特征值问题的计算方法, 并以一个两自由度体系和一个单层框架结构验证计算方法的精度。

模态摄动法本质上属于 Ritz 法, 计算精度与附加模态的数目有关, 文献^[26]中两个算例的自由度

都比较小,采用完整模态或接近完整模态进行计算,结果的精度都很高。本文在文献[26]的基础上,进一步研究自由度较多体系非完整模态下模态摄动法的计算精度,在此基础上,建立一种基于无阻尼体系实模态的复模态叠加法。同时,以非比例阻尼体系的地震反应为例,讨论复模态叠加法中的模态截断问题,分析了基于累积振型参与质量、累积振型贡献系数及累积振型加速度贡献系数所得模态数对计算精度的影响,并对比研究本文方法和状态空间复模态叠加法计算效率的差异。最后,将本文方法应用到一个带附加阻尼钢结构框架地震反应分析,验证了本文方法的适用性。

1 基于实模态的复模态叠加法

一个 N 自由度线性黏滞阻尼体系的强迫振动方程为

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f(t) \quad (1)$$

式中 u, \dot{u} 和 \ddot{u} 分别为 $N \times 1$ 阶的位移、速度和加速度向量; $f(t)$ 为荷载向量; m, c 和 k 分别为 $N \times N$ 阶的质量、阻尼和刚度矩阵。对于非比例阻尼体系,状态空间法把 N 维 2 阶微分方程转变为 $2N$ 维 1 阶微分方程^[10]

$$A\dot{y} + By = F(t) \quad (2)$$

式中 $y = \begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \end{Bmatrix}$ 为状态向量, $A = \begin{bmatrix} c & m \\ m & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & -m \end{bmatrix}$, $F(t) = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$ 。

为应用模态叠加法求解式(2)的运动方程,须求解特征方程

$$(\gamma A + B)\psi = 0 \quad (3)$$

式中 γ 和 ψ 分别为复特征值和相应的特征向量。若已知前 r ($r \leq N$) 对特征值 γ_j 和 $\gamma_{j+r} = \bar{\gamma}_j$, 以及相应的特征向量 ψ_j 和 $\psi_{j+r} = \bar{\psi}_j$ ($j=1, 2, \dots, r$), 其中“ $\bar{\cdot}$ ”表示复数共轭。则式(2)强迫振动的反应 y 可表示为

$$y = \sum_{j=1}^r (\Psi_j z_j + \bar{\Psi}_j \bar{z}_j) \quad (4)$$

式中 z_j 为广义坐标, \bar{z}_j 表示 z_j 的共轭复数, r 为截断的模态数。由模态叠加法的基本原理, 广义坐标 z_j ($j=1, 2, \dots, r$) 的运动方程为

$$\dot{z}_j - \gamma_j z_j = p_j/a_j \quad (5)$$

式中 $p_j(t) = \Psi_j^T F(t)$, $a_j = \Psi_j^T A \Psi_j$ 。

从计算过程看, 基于状态空间的复模态叠加法与常规模态叠加法相同, 但是, 式(3)特征值求解的维数增加了1倍且为复数运算, 使计算时间显著增

加。为提高计算效率, 关键是减少式(3)和式(4)的计算时间。为此, 本文基于模态摄动法原理, 以无阻尼体系的实模态为基础, 计算非比例阻尼的复模态, 以减少计算时间。

非比例阻尼矩阵可分解为

$$c = c_p + \Delta c \quad (6)$$

式中 c_p 为相应的比例阻尼矩阵, Δc 为比例阻尼矩阵与原阻尼矩阵的偏差。若已知无阻尼体系特征方程 $(k - \omega_j^2 m)\phi_j = 0$ 前 n 阶自振频率 ω_j 和相应的模态 ϕ_j ($j=1, 2, \dots, n$), 则比例阻尼矩阵 c_p 满足正交特性

$$\phi_j^T c_p \phi_k = \begin{cases} 2\zeta_j M_j \omega_j, & j=k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \quad (7)$$

式中 $\zeta_j = \phi_j^T c \phi_j / (2M_j \omega_j)$ 为模态阻尼比, $M_j = \phi_j^T m \phi_j$ 。在模态摄动法计算过程中, 比例阻尼矩阵 c_p 作为中间变量无需求解。

将 m, c_p 和 k 组成的系统称之为等效比例阻尼系统, 作为非比例阻尼体系的原系统。则采用状态空间法表示的等效比例阻尼体系中的特征值方程为

$$(s_j A_0 + B)\eta_j = 0 \quad (8)$$

式中 $A_0 = \begin{bmatrix} c_p & m \\ m & 0 \end{bmatrix}$, $\eta_j = \begin{Bmatrix} \phi_j \\ s_j \phi_j \end{Bmatrix}$, $s_j = -\zeta_j \omega_j + i\omega_j \sqrt{1 - \zeta_j^2}$, ($j=1, 2, \dots, n$), $i = \sqrt{-1}$ 。当 $j > n$ 时, $s_j = \bar{s}_{j-n}$, $\eta_j = \bar{\eta}_{j-n}$ 。

非比例阻尼体系新系统的特征值 γ_j 和模态 ψ_j 可以利用原系统的特征值 s_j 和模态 η_j 进行简单的摄动分析而近似地求得^[26], 即设:

$$\gamma_j = s_j + \Delta s_j \quad (9)$$

$$\Psi_j = \eta_j + \sum_{k=1, k \neq j}^{2n} \eta_k q_{kj} = \eta q_j \quad (10)$$

将式(9)和式(10)代入到方程(3)中得到

$$(s_j + \Delta s_j)A(\eta_j + \sum_{k=1, k \neq j}^{2n} \eta_k q_{kj}) = -B(\eta_j + \sum_{k=1, k \neq j}^{2n} \eta_k q_{kj}) \quad (11)$$

令 $x_k = \begin{cases} \Delta s_j / s_j, & k=j \\ q_{kj}, & k \neq j \end{cases}$, 式(11)两边同时前乘

以 η_j^T , 并将 l 从 1 到 $2n$ 依次取值可得 $2n$ 个代数方程, 将这 $2n$ 个代数方程用矩阵表示为

$$\left(\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} + x_j \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \right) x = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

式中 $D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}, E_{11}, E_{12}, E_{21}$ 和 E_{22} 都为 $n \times n$ 阶的方阵; R_1 和 R_2 为 $n \times 1$ 阶向量; x 为 $2n \times 1$ 阶向量。各矩阵和向量的元素具体表达见附录。

式(12)将复特征方程(3)转换成了 $2n$ 维的非线

性代数方程组,求解代数方程通常比求解特征方程要简单得多,本文采用Newton-Raphson迭代方法求解。在得到未知向量 x 后,非比例阻尼体系的第 j 个特征值为

$$\gamma_j = s_j(1 + x_j) \tag{13}$$

采用有阻尼体系的频率、阻尼比和特征值的表示方法

$$\gamma_j = -\zeta_j \bar{\omega}_j + i \bar{\omega}_j \sqrt{1 - \zeta_j^2} \tag{14}$$

则:

$$\bar{\omega}_j = |\gamma_j|, \zeta_j = -\text{Re}(\gamma_j)/|\gamma_j| \tag{15}$$

式中 Re 代表取元素的实部。为了避免与相应的等效比例阻尼的自振频率 ω_j 和阻尼比 ζ_j 混淆, $\bar{\omega}_j$ 和 ζ_j 表示第 j 阶的拟无阻尼自振频率和阻尼比。当式(10)中的 $n=N$ 时, $2N$ 个线性无关的特征向量 η_j 组成 $2N$ 维的完备空间,因此,非比例阻尼体系的特征向量 Ψ_j 可以在这个 $2N$ 维的空间中精确地展开,此时摄动解也将收敛到状态空间下的精确解。而通常高阶模态相比于低阶模态影响很小,因此方程(12)的维数 n 通常比 N 小得多,这表明本文所采用的摄动法无需求解原系统所有阶模态即可得到高精度的摄动解,从而减少计算时间。

式(12)中的 j 从 1 到 r 依次取值可得非比例阻尼体系前 r 阶特征值和复模态。由此,式(5)中 $p_j(t)$ 和 a_j 用实模态表示为:

$$p_j(t) = \mathbf{q}_j^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{f}(t) \\ \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{f}(t) \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$a_j = \mathbf{q}_j^T \mathbf{H} \mathbf{q}_j \tag{17}$$

式中

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} + \text{diag}[2M_l s_l] & \mathbf{C} + \text{diag}[2M_l(s_l + \bar{s}_l)] \\ \mathbf{C} + \text{diag}[2M_l(s_l + \bar{s}_l)] & \mathbf{C} + \text{diag}[2M_l \bar{s}_l] \end{bmatrix}$$

$\text{diag}[\cdot]$ 表示矩阵 $[\cdot]$ 为对角矩阵, l 为从 1 到 n 。求解

方程(5)得到广义坐标 z_j 的解。令 $\mathbf{q}_j = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{uj} \\ \mathbf{q}_{lj} \end{Bmatrix}$, 其中 \mathbf{q}_{uj}

与 \mathbf{q}_{lj} 分别为 \mathbf{q}_j 的前 n 和后 n 个元素组成的向量。由式(4)和(10)可得体系的位移为

$$\mathbf{u} = 2\text{Re}(\boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}_u + \mathbf{q}_l)\mathbf{z}) \tag{18}$$

式中 \mathbf{q}_u 和 \mathbf{q}_l 分别为 r 个 \mathbf{q}_{uj} 与 \mathbf{q}_{lj} 向量组成的 $n \times r$ 维的矩阵, $\mathbf{z} = \{z_1 \ z_2 \ \dots \ z_r\}^T$ 为 $r \times 1$ 的广义坐标。由式(16),式(17)和式(18)可知,基于实模态的复模态叠加法将复模态、广义单自由度体系的部分系数和位移表示为实模态的线性组合,简化了计算。

2 算例分析

为研究地震作用下基于实模态的复模态叠加法适用性,借鉴文献[11]的算例构建图 1 所示的框架结构,讨论模态摄动法的精度、模态截断指标以及复模态叠加法的计算精度和效率。该框架有限元模型包括 27 个梁单元共 72 个自由度,材料的弹性模量和密度分别为 $40 \text{ N/m}^2, 1 \text{ kg/m}^3$,梁截面惯性矩和面积分别为 $1 \text{ m}^4, 1 \text{ m}^2$,单元长度为 1 m 。采用集中质量模型,由静力凝聚消除转动自由度后,体系包含 48 个有效无阻尼实模态。框架结构在节点 3, 8, 12, 17, 20 与 25 的水平方向有附加阻尼器,阻尼器系数分别为 $c_1=3 \text{ N}\cdot\text{s/m}, c_2=5 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ 。以耦合系数 α 表示非比例阻尼矩阵耦合的程度^[27]

$$\alpha = \max\left(\frac{C_{lk}^2}{C_{ll}C_{kk}}\right) \quad (l \neq k) \tag{19}$$

式中 C_{lk} 表示阻尼矩阵 \mathbf{C} 中的第 l 行第 k 列元素。体系的耦合系数为 1,为强非比例阻尼体系。输入地震时程为 1940 年 5 月在加州地震中记录到的 El Centro 波的 N-S 方向的加速度分量,如图 2 所示。

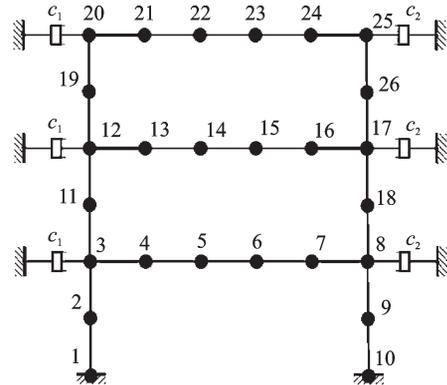


图 1 附加阻尼器的三层框架结构

Fig. 1 Three-layer frame with concentrated dampers

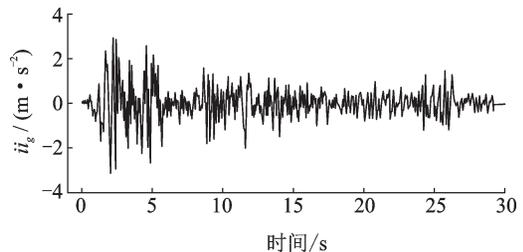


图 2 El Centro 波加速度时程

Fig. 2 El Centro ground acceleration history

2.1 模态摄动法的精度

当模态摄动法采用完整的无阻尼体系特征向量空间计算时,其结果收敛到精确解,但大型复杂结构

通常仅计算有限阶模态,为保证计算精度,计算非比例阻尼体系第 j 阶的模态时,式(10)中所需的无阻尼体系的模态数 n 为

$$n = j + \Delta n \quad (20)$$

式中 Δn 为计算所需的附加模态数。

以状态空间法所得的拟无阻尼频率 $\hat{\omega}_j^*$ 与阻尼比 $\hat{\zeta}_j^*$ 为精确解, n 阶模态下由模态摄动法得到的 $\hat{\omega}_j$ 和 $\hat{\zeta}_j$ 为近似解,则拟无阻尼频率与阻尼比的相对误差为:

$$e_\omega = \left| \frac{\hat{\omega}_j - \hat{\omega}_j^*}{\hat{\omega}_j^*} \right| \times 100\% \quad (21)$$

$$e_\zeta = \left| \frac{\hat{\zeta}_j - \hat{\zeta}_j^*}{\hat{\zeta}_j^*} \right| \times 100\% \quad (22)$$

图3所示为模态摄动法所得前3阶模态相对误差随附加模态数的变化情况。表1列出前3阶采用不同方法所得拟无阻尼频率与阻尼比的计算结果,表2为不同方法的计算误差。其中 $n=48$ 表示完整模态空间,强制解耦法为直接去除模态阻尼矩阵的非对角元素的解耦方法。

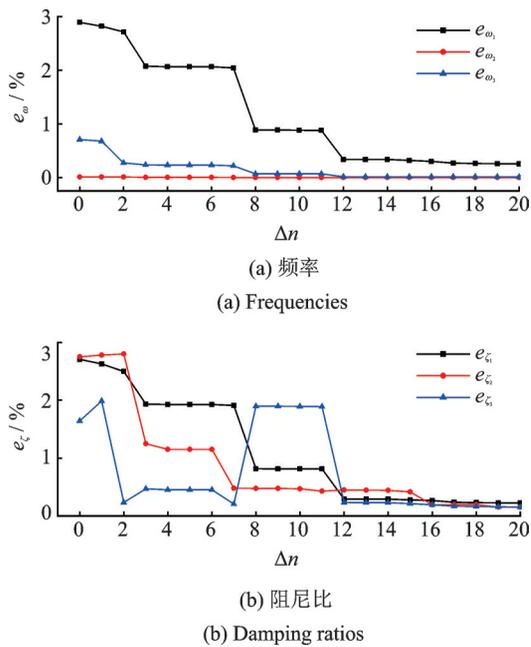


图3 前3阶频率与阻尼比的相对误差

Fig. 3 Relative errors of the first three natural frequencies and damping ratios

计算结果表明:(1)对于模态摄动法,随着附加模态数的增加,前3阶频率和阻尼比趋近于精确解;采用完整实模态的模态摄动法计算结果与精确解一致。附加模态数为8时,前3阶频率的相对误差小于1%,前3阶模态阻尼比的相对误差小于2%。这表明对于大型复杂结构,当采用附加模态数大于8的非完整模态进行模态摄动法计算时,即可得到很高

的计算精度。(2)强制解耦方法计算所得的频率误差小于5%,但阻尼比误差可达9.596%。这是因为强制解耦过程改变了阻尼矩阵,直接对模态阻尼比产生影响,因此阻尼比与精确解存在明显的差别;而由单自由度体系有阻尼频率 $\hat{\omega}_j = \omega_j \sqrt{1 - \hat{\zeta}_j^2}$ 可知,当阻尼比小于0.2时,阻尼引起体系有阻尼频率的变化很小,因此强制解耦方法计算时频率与精确解相差不大。

2.2 复模态叠加法地震反应分析

对于一般结构而言,少数低阶模态的叠加即可得到满足工程要求的解,因此存在模态截断的问题^[28]。然而对于非比例阻尼体系的复模态叠加法,能否采用实模态叠加法中的模态截断方法需要进一步的研究。针对本文的三层框架结构,三类实模态的模态截断指标:累积振型参与质量、首层平动位移的累积振型贡献系数以及首层平动的累积振型加速度贡献系数如表3所示。以模态截断指标超过90%作为模态选取的依据,则由累积振型参与质量、首层平动位移的累积振型贡献系数和首层平动的累积振型加速度贡献系数选取的模态数分别为5阶,3阶和20阶。

为定量研究不同模态截断下复模态叠加法的计算精度,采用峰值误差和累积误差综合表征每个自由度的位移反应误差:

$$e_{i\text{-max}} = \left| 1 - \frac{\max(|u_i(t)|)}{\max(|u_i^*(t)|)} \right| \times 100\% \quad (23)$$

$$e_{i\text{-sum}} = \frac{\int_0^T |u_i(t) - u_i^*(t)| dt}{\int_0^T |u_i^*(t)| dt} \times 100\% \quad (24)$$

式中 $e_{i\text{-max}}$ 表示第 i 个自由度位移与精确解的峰值误差, $e_{i\text{-sum}}$ 表示第 i 个自由度位移与精确解的累积误差, $u_i^*(t)$ 表示第 i 个自由度位移的精确解, $u_i(t)$ 表示第 i 个自由度位移的近似解, T 为积分时长。在El Centro波作用下,前3阶、前5阶、前20阶和全部48阶复模态采用式(18)计算所得顶层、中间层、底层水平位移时程如图4所示,在采用模态摄动法计算特征值时,附加实模态的个数均取8。同时为了进行比较,将状态空间法精确解也一并绘出。各自由度的峰值误差、累积误差如表4所示。

由图4与表4可以看出:1)当采用48阶复模态叠加计算时,计算结果与状态空间法完全重合,说明完整模态的复模态叠加法可以得到精确解;2)底层水平位移的模态截断误差最大,顶层水平位移的模态截断误差最小,说明底层水平位移反应对高阶模态更为敏感;3)当采用前3阶、前5阶复模态叠加计

表1 框架结构的拟无阻尼自振频率与阻尼比

Tab. 1 The quasi-undamped natural frequencies and damping ratios of the frame system

模态	频率/(rad·s ⁻¹)				阻尼比			
	精确解	摄动法 (n=48)	摄动法 (n=11)	强制解耦法	精确解	摄动法 (n=48)	摄动法 (n=11)	强制解耦法
1	0.673202	0.673202	0.667243	0.649202	0.741194	0.741194	0.735152	0.714869
2	0.989185	0.989185	0.989171	0.989070	0.000724	0.000724	0.000728	0.000766
3	1.771734	1.771734	1.770518	1.771385	0.047056	0.047056	0.047948	0.051618

表2 框架结构的拟无阻尼自振频率与阻尼比的相对误差/%

Tab. 2 The errors of quasi-undamped natural frequencies and damping ratios of the frame system /%

模态	e_ω			e_ζ		
	摄动法(n=48)	摄动法(n=11)	强制解耦法	摄动法(n=48)	摄动法(n=11)	强制解耦法
1	0	0.885	3.565	0	0.815	3.552
2	0	0.001	0.012	0	0.476	5.770
3	0	0.069	0.020	0	1.897	9.695

表3 不同模态截断指标计算结果/%

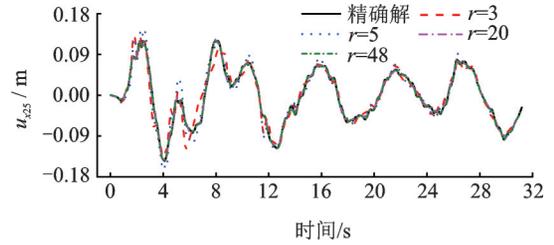
Tab. 3 Results of different modal truncation indexes/%

r	累积振型 参与质量	首层平动累积 振型贡献系数	首层平动累积振型 加速度贡献系数
	1	32.66	86.19
2	77.02	84.29	22.92
3	86.24	93.67	42.50
4	89.24	95.58	50.96
5	92.67	99.34	68.16
19	97.37	99.66	87.46
20	97.83	99.84	97.03

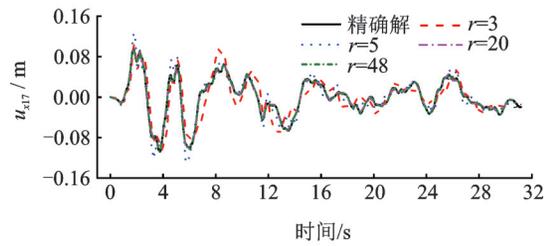
算时,各层水平位移的误差较大,其中底层水平位移峰值误差达到30%,累积误差超过了50%,说明对于该框架体系,采用累积振型参与质量和首层平动位移的累积振型贡献系数作为模态截断指标难以满足计算精度要求;4)当采用前20阶复模态叠加计算时,顶层和中间层的水平位移峰值误差及累积误差均在10%以内,底层水平位移累积误差偏大,略大于10%,但峰值误差只有5.8%,结合图4(c)的位移时程结果可以看出前20阶复模态叠加时底层水平位移与精确解结果较吻合。总体而言,累积振型参与质量和首层平动位移的累积振型贡献系数所取的复模态数偏少,基于首层平动的累积振型加速度贡献系数的模态截断方法可以满足计算精度要求。

为对比不同方法的计算精度,图5给出了前20阶模态下本文方法与状态空间法和强制解耦非比例阻尼矩阵后的实模态叠加法(简称实模态叠加法)的水平位移计算结果,并与精确解相比较。不同方法相应的峰值误差及累积误差如表5所示。

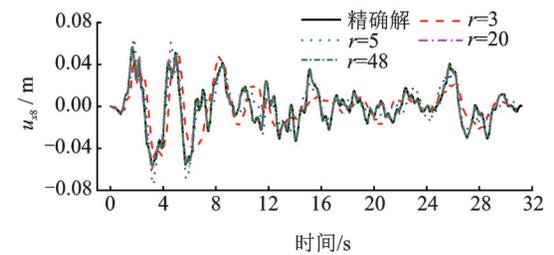
由图5、表5结果可以看出:1)本文方法与状态空间法的前20阶计算结果接近,两种方法的时程曲



(a) 顶层位移
(a) Displacement of top layer



(b) 中间层位移
(b) Displacement of middle layer



(c) 底层位移
(c) Displacement of bottom layer

图4 地震作用下水平位移计算结果

Fig. 4 Horizontal displacement under earthquake excitation

线与精确解吻合很好;三层水平位移的峰值误差均小于10%,除底层位移累积误差偏大高于10%以外,顶层及中间层位移累积误差也均小于10%,显示了良好的精度;2)实模态叠加法计算结果与精确

表 4 三层框架结构水平位移误差/%

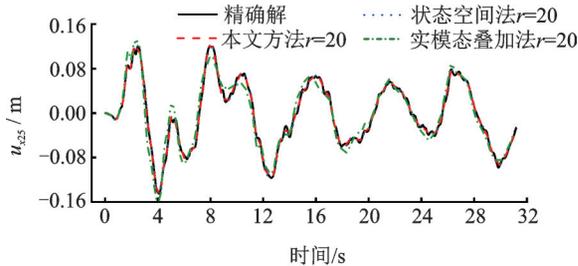
Tab. 4 Errors of horizontal displacements of the three-layer frame/%

		模态截断数		
		3	5	20
顶层水平位移	峰值误差	7.0	12.9	0.6
	累计误差	21.5	18.6	4.7
中间层水平位移	峰值误差	3.2	20.3	5.2
	累计误差	52.7	28.2	5.5
底层水平位移	峰值误差	15.0	31.3	5.8
	累计误差	81.1	53.4	14.1

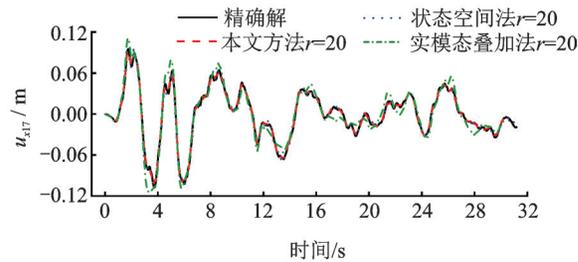
表 5 三层框架结构水平位移误差/%

Tab. 5 Errors of horizontal displacements of the three-layer frame/%

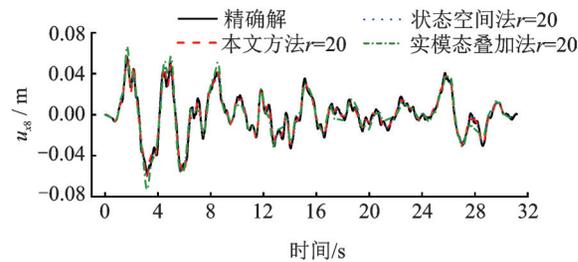
		计算方法($r=20$)		
		状态空间法	本文方法	实模态叠加法
顶层水 平位移	峰值误差	0.3	0.6	9.3
	累计误差	5.6	4.7	21.3
中间层水 平位移	峰值误差	4.1	5.2	5.4
	累计误差	8.1	5.5	25.4
底层水 平位移	峰值误差	4.7	5.8	28.8
	累计误差	18.7	14.1	27.4



(a) 顶层位移
(a) Displacement of top layer



(b) 中间层位移
(b) Displacement of middle layer



(c) 底层位移
(c) Displacement of bottom layer

图 5 地震作用下三种方法的水平位移计算结果

Fig. 5 Horizontal displacement of three methods under earthquake excitation

解存在明显误差,三层水平位移的累积误差均大于 20%,其中底层位移的峰值误差也高于 20%,这说明对于强非比例阻尼的体系,实模态叠加方法忽略了非对角线阻尼的影响,导致较大的计算误差。

为对比本文方法与状态空间法的计算效率,前 20 阶模态叠加下计算时间如表 6 所示,计算过程统

一采用 2.19 GHz 处理器的笔记本, Matlab 计算软件。可以看出,模态摄动法求解特征方程所耗费的时间小于状态空间法直接求解复特征方程的时间,说明模态摄动法提高了求解特征方程的效率;本文方法由于计算过程中部分采用实模态线性组合,减少了复数运算,计算效率也明显高于状态空间方法。综合计算精度结果,本文方法兼顾了计算效率与精度,适用于强非比例阻尼体系的地震反应分析。

表 6 计算时间/ms

Tab. 6 Calculation time/ms

	状态空间法	本文方法
求解特征方程	8.2	6.9
模态叠加	690.0	480.0
总时间	698.2	486.9

3 五层钢结构地震反应分析

为验证本文方法对真实结构的适用性,下面采用不同方法分析北京市通州区某公司总部办公楼的地震反应。该办公楼主体为钢框架结构,层高 17.7 m,建筑长 50.4 m,分为 7 跨,其中一榀横向框架钢结构计算简图如图 6 所示。钢结构的梁和柱采用 Q345 钢,楼板选用 C25 混凝土。横向 7.2 m, 6 m 跨度框架梁截面为 HN450 mm×200 mm×9 mm×14 mm,横向 3 m 跨度框架梁截面为 HN300 mm×150 mm×6.5 mm×9 mm(数字代表工字钢的截面高度,截面宽度,腹板厚度,翼缘厚度);底层柱为 400 mm×400 mm×16 mm×16 mm 箱型截面,其他层柱为 400 mm×400 mm×14 mm×14 mm(数字代表箱型柱(方管)截面高度,截面宽度,上下厚度,左右厚度)箱型截面。办公楼重力荷载如楼板、墙体等以等效质量的方式施加在框架结构上,其中屋面重力荷载取 6.38 kN/m²,楼面重力荷载取 7 kN/m²。钢结构阻尼比取 0.02,采用瑞利阻尼分析,瑞利阻尼系

数的参考频率选用基频与荷载卓越频率。同时为提高该框架结构的抗震性能,各楼层横向 A-B 跨和 C-D 跨之间各设置一个黏滞阻尼器,采用斜对角布置如图 6 所示,附加阻尼器的阻尼系数为 $c=1500 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}$ 。

该框架结构的基本自振周期为 1 s,耦合系数 $\alpha=0.57$ 。累积振型加速度贡献系数超过 90% 时,所需的最少模态数为 7 阶。在 El Centro 波作用下,该框架结构的底层和顶层位移反应时程如图 7 所示,峰值与累积误差如表 7 所示。其中模态摄动法计算特征值时,附加实模态的个数仍取 8。

由图 7 及表 7 可以看出,本文方法所得底层与顶

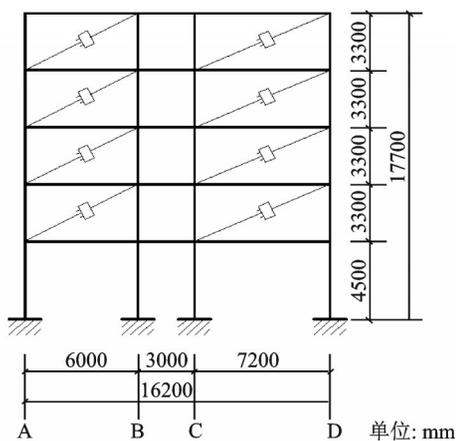


图 6 办公楼计算简图

Fig. 6 Calculation diagram of an office building

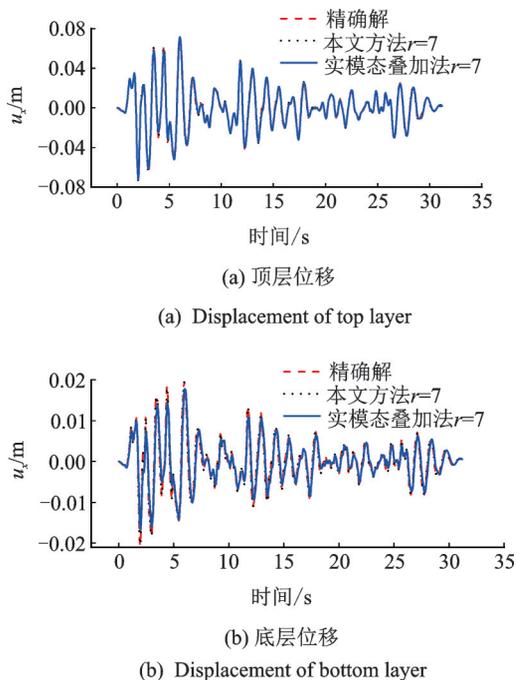


图 7 El Centro 波作用下三种方法的水平位移计算结果
Fig. 7 Horizontal displacement of three methods under El Centro wave

层位移的峰值误差均在 1% 以内,累积误差不超过 5%,具有很高的计算精度。而实模态叠加法底层位

移峰值误差大于 10%,累积误差达 29.40%。总体而言,本文方法计算精度高,可用于强非比例阻尼体系的地震反应分析,而强制解耦的实模态叠加法易造成无法预计的误差。

表 7 结构水平位移误差/%

Tab. 7 Errors of horizontal displacements of the frame/%

		计算方法($r=7$)	
		本文方法	实模态叠加法
顶层水平位移	峰值误差	0.94	2.28
	累积误差	1.14	7.15
底层水平位移	峰值误差	0.73	13.83
	累积误差	1.75	29.40

4 结 论

工程实际结构中的阻尼常具有非比例阻尼的特征,本文基于模态摄动法提出基于实模态的复模态叠加法,用于地震荷载下的强迫振动分析。通过理论分析和数值计算可以得出以下结论:

1) 当采用无阻尼体系所有模态构成的完备空间进行模态摄动法计算时,可以得到非比例阻尼体系精确的复特征值和特征向量;对于非完备空间,当附加模态数大于 8 时,模态摄动法所得的复特征值误差小于 2%;

2) 非比例阻尼体系的复模态叠加法计算时,基于累积振型参与质量及累积振型贡献系数进行模态截断所得的模态数偏少,由此导致结构地震反应的误差较大,建议采用累积振型加速度贡献系数作为复模态叠加法的模态截断指标;

3) 本文方法将非比例阻尼体系的特征向量和强迫振动的解采用实模态线性组合进行计算,从而减少了复数运算,提高了计算效率;

4) 对于强非比例阻尼体系的地震反应分析,本文方法兼顾了计算效率与精度,而强制解耦非比例阻尼矩阵的实模态叠加法忽略了耦合阻尼的影响,计算误差难以控制。

参考文献:

- [1] 吕西林, 张 杰. 钢和混凝土竖向混合结构阻尼特性研究[J]. 土木工程学报, 2012, 45(3): 18-24.
Lü Xilin, Zhang Jie. Damping behavior of vertical structures with upper steel and lower concrete components [J]. China Civil Engineering Journal, 2012, 45(3): 18-24.
- [2] Huang Wei, Qian Jiang, Zhou Zhi. An approach to equivalent damping ratio of vertically mixed structures based on response error minimization [J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2015, 72: 119-128.

- [3] 邓吉宏, 韦勇, 陈国平, 等. 含附加阻尼器结构的阻尼矩阵识别[J]. 振动工程学报, 2008, 21(2):28-32.
Deng Jihong, Wei Yong, Chen Guoping, et al. Damping matrix identification of structures with appended damping elements [J]. Journal of Vibration Engineering, 2008, 21(2):28-32.
- [4] Juraj Králik, Juraj Jr Králik. Dynamic analysis of soil-structure interaction effects on NPP building using simplified and solid FE model of layered subsoil [J]. Journal of Measurements in Engineering, 2019, 7(1): 12-19.
- [5] 雷素素, 高永涛, 潘旦光. 考虑辐射阻尼的土-结构相互作用体系等效输入[J]. 岩土力学, 2016, 37(S1): 583-590.
Lei Susu, Gao Yongtao, Pan Danguang. Equivalent input of soil-structure interaction system considering radiation damping [J]. Rock and Soil Mechanics, 2016, 37(S1): 583-590.
- [6] 赵密, 高志懂, 杜修力, 等. 地震作用下深厚土层-结构相互作用的高效分析方法[J]. 工程力学, 2019, 36(10): 58-65.
Zhao Mi, Gao Zhidong, Du Xiuli, et al. Efficient analysis scheme for seismic soil-structure interaction with deep soil layer [J]. Engineering Mechanics, 2019, 36(10): 58-65.
- [7] 李培振, 陈跃庆, 吕西林, 等. 较硬分层土-桩基-结构相互作用体系振动台试验[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2006, 34(3):27-33.
Li Peizhen, Chen Yueqing, Lü Xilin, et al. Shaking table testing of hard layered soil-pile-structure interaction system [J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2006, 34(3):27-33.
- [8] Chopra A K. Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering [M]. New Jersey: Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1995.
- [9] Clough R W, Penzien J. Dynamics of Structures [M]. New York: McGraw-Hill, 1975: 194-198.
- [10] Foss K A. Coordinates which uncouple the equation of damped linear dynamic system [J]. Journal of Applied Mechanics-ASME, 1958, 25(1): 361-364.
- [11] Ibrahimbegovic A, Wilson E L. Simple numerical algorithms for the mode superposition analysis of linear structural systems with non-proportional damping [J]. Computers & Structures, 1989, 33(2): 523-531.
- [12] Cronin D L. Approximation for determining harmonically excited response of non-classically damped systems [J]. Journal of Manufacturing Science & Engineering, 1976, 98(1): 43-47.
- [13] Warburton G B, Soni S R. Errors in response calculations for non-classically damped structures [J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 1977, 5(4): 365-376.
- [14] Udawadia F E. A note on nonproportional damping [J]. Journal of Engineering Mechanics ASCE, 2009, 135(11): 1248-1256.
- [15] Roesset J M, Whitman R V, Dobry R. Modal analysis for structures with foundation interaction [J]. Journal of the Structure Division, 1973, 99(3): 399-416.
- [16] 黄维, 钱江, 周知. 竖向混合结构模态阻尼比计算研究[J]. 振动与冲击, 2014, 33(13): 13-18.
Huang Wei, Qian Jiang, Zhou Zhi. Equivalent modal damping ratio for vertically mixed structures [J]. Journal of Vibration and Shock, 2014, 33(13):13-18.
- [17] 楼梦麟, 雍国柱, 李建元. 阻尼特性对组合结构地震反应的影响[J]. 建筑科学与工程学报, 2007, 24(2): 28-33.
Lou Menglin, Yong Guozhu, Li Jianyuan. Influence of damping characteristics on seismic responses of composite structures [J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2007, 24(2): 28-33.
- [18] 申彦利, 杨庆山, 田玉基. 模态应变能方法精确性和适用性研究[J]. 工程力学, 2008, 25(6): 18-21.
Shen Yanli, Yang Qingshan, Tian Yuji. Study of accuracy and applicability of modal strain energy method [J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(6): 18-21.
- [19] 张静, 刘明辉, 郑钢铁. Lanczos-QR方法在大型非比例阻尼结构复模态计算中的应用[J]. 振动与冲击, 2011, 30(5):222-225.
Zhang Jing, Liu Minghui, Zheng Gangtie. Application of Lanczos-QR algorithm in large non-classical damping structures' modal analysis [J]. Journal of Vibration and Shock, 2011, 30(5): 222-225.
- [20] 桂国庆, 何玉敖. 非比例阻尼结构复模态问题求解的矩阵摄动法[J]. 同济大学学报(自然科学版), 1996, 24(6): 613-618.
Gui Guoqing, He Yuao. Matrix perturbation method for solving the complex modal problem of non-proportionally damped structures [J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 1996, 24(6): 613-618.
- [21] 楼梦麟. 线性广义特征值问题在模态子空间中的摄动解[J]. 同济大学学报: 自然科学版, 1994, 22(3): 268-273.
Lou Menglin. Perturbation method for the linear generalized eigenvalue problem in modal subspace [J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 1994, 22(3): 268-273.
- [22] Cha P D. Approximate eigensolutions for arbitrarily damped nearly proportional systems [J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 288(4-5): 813-827.
- [23] Tang J, Wang W L. Perturbation method for determining eigensolutions of weakly damped systems [J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 187(4): 671-681.
- [24] Lou M, Chen G. Modal perturbation method and its applications in structural systems [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2003, 129(8): 935-943.
- [25] Pan D, Chen G, Lou M. A modified modal perturbation method for vibration characteristics of non-prismatic Timoshenko beams [J]. Structural Engineering & Mechanics, 2011, 40(5): 689-703.
- [26] Pan Danguang, Fu Xiangqiu, Chen Qingjun, et al. A modal perturbation method for eigenvalue problem of non-proportionally damped system [J]. Applied Sci-

- ence, 2020, 10(1): 341.
- [27] Claret A M, Venancio-Filho F. A modal superposition pseudo-force method for dynamic analysis of structural systems with non-proportional damping[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 1991, 20 (4) : 303-315.
- [28] 潘旦光, 李雪菊, 谭晋鹏, 等. 地震作用下悬臂类结构的模态截断方法[J]. 建筑结构学报, 2020, 41(2): 55-62.
- Pan Danguang, Li Xueju, Tan Jinpeng, et al. Modal truncation method on cantilever-type structures under seismic excitations[J]. Journal of Building Structures, 2020, 41(2):55-62.

Complex mode superposition method of non-proportional damping system based on real modes

FU Xiang-qiu^{1,2}, PAN Dan-guang^{1,2}

(1.Department of Civil Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China; 2.Beijing Key Laboratory of Urban Underground Space Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

Abstract: A complex mode superposition method based on real modes of the undamped system is proposed to improve the calculation efficiency of forced vibration of the non-proportional damping system. The complex eigenvalues and modes are represented by the linear combination of real modes through the modal perturbation method. So the forced vibration solution can be expressed by the real modes. Then, the seismic response is analyzed by a three-story frame structure with additional damping which is a strong non-proportional damping system. The result shows that eigenvalue errors are less than 2% when the number of additional real modes exceeds 8. The numbers of complex modes calculated from the cumulative mode participating mass and modal contribution factor error of displacement are not enough, and the modal contribution factor error of acceleration is suggested to be a better modal truncation index. Compared with the state-space method, the proposed method is more efficient, the peak errors of the displacement response are less than 10%, and the cumulative errors are less than 15%, by a few low modes determined by modal contribution factor error of acceleration. Finally, the applicability of the proposed method is verified by seismic response analysis of an office building with a steel frame. Overall, the proposed method can balance calculation efficiency and accuracy for highly non-proportional damping systems, while the real mode superposition method with forced decoupling shows large errors.

Key words: seismic response analysis; mode superposition method; non-proportional damping; modal perturbation method; state-space method

作者简介: 付相球(1994-),男,博士研究生。电话:18811343143; E-mail: b20180019@xs.ustb.edu.cn

通讯作者: 潘旦光(1974-),男,教授。电话:13911623597; E-mail: pdg@ustb.edu.cn

附 录:

$$D_{11} = C + \text{diag} [2s_l M_l] + \text{diag} \left[\frac{\omega_l^2 - s_l^2}{s_j} M_l \right] \quad D_{12} = C + \text{diag} [(s_l + \bar{s}_l) M_l]$$

$$D_{21} = C + \text{diag} [(s_l + \bar{s}_l) M_l] \quad D_{22} = C + \text{diag} [2\bar{s}_l M_l] + \text{diag} \left[\frac{\omega_l^2 - \bar{s}_l^2}{s_j} M_l \right]$$

$$E_{11} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & 0 & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & 0 & \cdots & C_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{j1} & C_{j2} & \cdots & 0 & \cdots & C_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & 0 & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} + \text{diag} \left[\frac{2s_l M_l}{l \neq j} \right] \quad E_{12} = C + \text{diag} [(s_l + \bar{s}_l) M_l]$$

$$E_{21} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & 0 & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & 0 & \cdots & C_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{j1} & C_{j2} & \cdots & 0 & \cdots & C_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & 0 & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} + \text{diag} \left[\frac{(s_l + \bar{s}_l) M_l}{l \neq j} \right] \quad E_{22} = C + \text{diag} [2\bar{s}_l M_l]$$

$$R_1 = -\{ C_{1j} \quad C_{2j} \quad \cdots \quad C_{(j-1)j} \quad C_{jj} + 2s_j M_j + \frac{\omega_j^2 - s_j^2}{s_j} M_j \quad C_{(j+1)j} \quad \cdots \quad C_{nj} \}^T$$

$$R_2 = -\{ C_{1j} \quad C_{2j} \quad \cdots \quad C_{(j-1)j} \quad C_{jj} + (\bar{s}_j + s_j) M_j \quad C_{(j+1)j} \quad \cdots \quad C_{nj} \}^T$$