

动力可靠度约束下基于概率测度变换-全局收敛移动渐近线法的结构优化设计

杨家树^{1,2}, 陈建兵^{1,2}

(1. 同济大学土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092; 2. 同济大学土木工程学院, 上海 200092)

摘要: 基于动力可靠度的结构优化是实现随机动力系统优化设计的重要途径。针对设计变量为系统中部分随机变量分布均值的情形, 提出了一种基于动力可靠度的结构优化设计方法。在该方法中, 通过概率密度演化理论实现了结构动力可靠度的高效分析。在此基础上, 结合概率测度变换, 可以在不增加任何确定性结构分析的前提下, 实现动力可靠度对设计变量的灵敏度分析。进而, 通过将上述概率密度演化-测度变换方法嵌入全局收敛移动渐近线法, 实现了基于动力可靠度的结构优化设计问题的高效求解。数值算例的结果表明, 所提方法可以显著降低结构分析次数, 具有较高的效率与稳健性。

关键词: 随机动力系统; 可靠性优化设计; 概率密度演化; 概率测度变换; 动力可靠度

中图分类号: TU318⁺.1; TU352.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2022)01-0072-10

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2022.01.008

引言

随机因素广泛存在于真实的工程结构系统中^[1]。只有定量地考虑随机因素的影响, 才能得到合理或优化的结构设计方案^[2-3]。经过数十年的发展, 确定性的结构优化设计方法已经日臻成熟。为了进一步促进结构优化设计在实际工程设计中的应用, 推动工程结构设计向更加合理化、自动化与智慧化发展, 基于可靠度的结构优化设计已经成为国内外学者广泛关注的研究热点^[4]。

近十余年来, 学者们对此开展了卓有成效的研究, 发展了一系列方法, 包括序列近似规划方法^[5-7]、序列优化与可靠性评估方法^[8]和单循环方法^[9]等。这些方法往往基于一次可靠度方法, 因此难以处理极限状态函数非线性较强的可靠度优化问题, 特别是非线性动力系统基于可靠度的结构优化问题。

对土木工程结构而言, 地震等灾害性动力作用在设计中往往起到主导作用。因此, 考虑动力作用下基于可靠度的结构优化设计十分必要。然而, 到目前为止, 基于动力可靠度的结构优化设计的研究远远滞后于基于静力可靠度的结构优化设计研究。一个重要原因是, 与静力可靠度分析相比, 动力可靠度分析的难度更高^[10]。

近年来, 在基于动力可靠度的结构优化设计领域, 已提出了一些基于随机模拟方法, 例如基于 Markov 链 Monte Carlo 模拟的方法^[11-12]、线搜索方法^[13]以及可行方向内点法^[14]等。但受限于随机模拟方法巨大的工作量及其随机收敛性质, 这些方法的效率和稳健性仍有待进一步提高。

概率密度演化理论(PDEM)的发展为结构动力可靠度的高效分析提供了一条途径^[15-16]。最近, 与概率测度变换(COM)的结合^[17]则进一步为高效的灵敏度分析创造了条件。概率密度演化-测度变换(PDEM-COM)方法的引入可以显著地提高结构动力可靠度及其灵敏度分析的效率^[18]。本文进一步将概率密度演化-测度变换方法拓展到设计变量与部分随机变量耦合情况下具有动力可靠度约束的结构优化问题中。在此基础上, 结合全局收敛的移动渐近线法(GCMMA), 可实现上述结构优化问题的求解。算例分析表明, 本文提出的方法具有较高的效率与良好的稳健性。

1 基于动力可靠度的结构优化问题

基于动力可靠度的结构优化问题可定义为如下考虑动力可靠度约束的优化问题^[14]:

收稿日期: 2020-08-24; 修订日期: 2021-01-25

基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目(51725804); 上海市国际合作项目资助项目(18160712800)。

$$\begin{aligned} \min f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t. } g_j(\boldsymbol{x}) \leq 0, \quad j=1, 2, \dots, n_g \\ h_l(\boldsymbol{x}) \leq 0, \quad l=1, 2, \dots, n_h \\ \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i, \quad i=1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1)$$

式中 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 为设计向量, $f(\boldsymbol{x})$ 为目标函数, $g_j(\boldsymbol{x}) \leq 0, j=1, 2, \dots, n_g$ 为不涉及随机因素的标准约束, $h_l(\boldsymbol{x}) \leq 0, l=1, 2, \dots, n_h$ 为动力可靠度约束, \underline{x}_i 和 \bar{x}_i 分别为设计变量 x_i 的下限与上限。

采用首次超越破坏可靠度作为动力可靠度的度量, 则第 l 个动力可靠度约束可定义为:

$$h_l(\boldsymbol{x}) = R_l^{\text{th}} - R_l(\boldsymbol{x}, T) \leq 0 \quad (2)$$

式中 R_l 为与第 l 个失效模式相关的首次超越破坏可靠度, R_l^{th} 为结构动力可靠度 R_l 的阈值, T 为所关心的时段长度。考虑双壁破坏准则时, 首次超越破坏可靠度可以定义为:

$$R_l(\boldsymbol{x}, T) = \Pr\left\{ |Z_l(\boldsymbol{\Theta}, t, \boldsymbol{x})| \leq z_l^{\text{th}}, t \in (0, T] \right\} \quad (3)$$

式中 $\Pr\{\cdot\}$ 表示随机事件的概率, $\boldsymbol{\Theta}$ 为刻画系统随机源信息的随机向量, Z_l 为与第 l 个失效模式相关的结构反应, z_l^{th} 为结构反应 Z_l 的阈值。

考虑到一般结构失效概率的量级较小, 为了数值处理的便利, 式(2)可以等价地表示为:

$$h_l(\boldsymbol{x}) = \ln[P_{F_l}(\boldsymbol{x}, T) + \epsilon] - \ln P_{F_l}^{\text{th}} \leq 0 \quad (4)$$

式中 $P_{F_l}(\boldsymbol{x}, T) = 1 - R_l(\boldsymbol{x}, T)$ 为与第 l 个失效模式相关的结构失效概率, $P_{F_l}^{\text{th}} = 1 - R_l^{\text{th}}$ 为结构失效概率 $P_{F_l}(\boldsymbol{x}, T)$ 的阈值, $\ln(\cdot)$ 表示自然对数, ϵ 为一个很小的正实数, 文中取 $\epsilon = 10^{-10}$ 。这里, ϵ 的意义仅在于保证式(4)中的对数运算有定义。

事实上, 采用式(4)所示的对数形式的可靠度约束一方面可以避免失效概率较小带来的数值误差, 另一方面也可以降低函数的非线性, 便于构造高精度的近似形式^[13]。因此, 本文中的结构动力可靠度约束均按照式(4)定义。需要指出, 为了便于工程应用, 采用可靠性指标构造可靠度约束是另一种较为常见的方式^[19]。

2 全局收敛移动渐近线法

尽管遗传算法和粒子群算法等启发式优化算法具有全局寻优能力, 但是这类优化算法在寻优过程中一般需要大量的函数调用。对基于可靠度的结构优化设计问题而言, 采用遗传算法或粒子群算法求解往往需要成百上千次的结构可靠度分析。因而采用遗传算法或粒子群算法求解实际工程结构的可靠性优化设计问题的计算工作量非常庞大。因此, 一

阶优化方法仍然是结构优化和基于可靠度的结构优化中常用的方法。

移动渐近线法(MMA)^[20]是结构优化中常用的一种序列近似规划方法。该方法将原始优化问题的目标函数和约束函数近似展开, 得到一系列具有显式代数形式的子优化问题, 而这些子优化问题的解组成的序列将收敛到原始优化问题的解。在此基础上, Svanberg从函数的保守凸可分近似(CCSA)思想出发, 提出了具有全局收敛性的移动渐近线法(以下简称GCMMA)^[21]。

在GCMMA中, 将非线性函数 $F(\boldsymbol{x})$ (可以是优化问题(1)中的目标函数、标准约束函数或动力可靠度约束函数)近似表示为^[21]:

$$F^{(k,v)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i^{(k,v)}}{\tilde{x}_i^{(k)} - x_i} + \frac{b_i^{(k,v)}}{x_i - \underline{x}_i^{(k)}} \right) + c^{(k,v)} \quad (5)$$

其中

$$a_i^{(k,v)} = (\tilde{x}_i^{(k)} - x_i^{(k)})^2 \cdot \left[\max \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^{(k)}), 0 \right) + \frac{\rho^{(k,v)}}{\tilde{x}_i - \underline{x}_i} \right] \quad (6)$$

$$b_i^{(k,v)} = (x_i^{(k)} - \underline{x}_i^{(k)})^2 \cdot \left[\max \left(-\frac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^{(k)}), 0 \right) + \frac{\rho^{(k,v)}}{\tilde{x}_i - \underline{x}_i} \right] \quad (7)$$

$$c^{(k,v)} = F(\boldsymbol{x}^{(k)}) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i^{(k,v)}}{\tilde{x}_i^{(k)} - x_i^{(k)}} + \frac{b_i^{(k,v)}}{x_i^{(k)} - \underline{x}_i^{(k)}} \right) \quad (8)$$

式中 k 为外层优化循环的计数; v 为内层优化循环的计数; $\boldsymbol{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})^T$ 为当前设计点; $x_i = x_i^{(k)}$ 和 $\underline{x}_i = \underline{x}_i^{(k)}$ 为当前循环中近似函数 $F^{(k,v)}(\boldsymbol{x})$ 的渐近线; $\rho^{(k,v)}$ 为控制近似函数 $F^{(k,v)}(\boldsymbol{x})$ 的保守性的参数。一般而言, 若 $\rho^{(k,v+1)} > \rho^{(k,v)}$, 则 $F^{(k,v+1)}(\boldsymbol{x})$ 比 $F^{(k,v)}(\boldsymbol{x})$ 更保守。参数 $\tilde{x}_i^{(k)}, \underline{x}_i^{(k)}$ 以及 $\rho^{(k,v)}$ 的更新方式可参考文献[20, 22]。以相应的近似函数代替原始优化问题(1)中的目标和约束函数, 即可得到给定循环中GCMMA的子优化问题。

通过在内层循环中调控参数 $\rho^{(k,v)}$, GCMMA要求子优化问题比式(1)所示的原始优化问题更加保守。因此, GCMMA的全局收敛性可以在理论上得到保证^[21]。此外, 由于GCMMA中的子优化问题均比原始优化问题更加保守, 任何子优化问题的最优解都是原始问题的可行解。这意味着即使优化过程在收敛前终止, 该方法仍然可以获得较初始解更优的可行解, 这一性质对于复杂结构的优化设计是十分有利的^[23]。此外, 相较于Chen等^[18]使用的序列近

似规划方法, GCMMA 可以更充分地利用优化循环的中间信息以调控子优化问题的保守程度。因此, 可以预期, GCMMA 将具有更高的效率。

本文即采用 GCMMA 求解基于动力可靠度的结构优化问题, 其中的子优化问题均采用原-对偶内点算法^[22]进行求解。

由式(5)~(8)可知, 在 GCMMA 中, 动力可靠度约束函数的近似展开需要结构首次超越破坏可靠度或失效概率关于设计变量的灵敏度信息。下文将引入概率密度演化-测度变换方法(PDEM-COM)以提高结构首次超越破坏可靠度及其灵敏度分析的计算效率。

3 基于概率密度演化-测度变换的结构动力可靠度及其灵敏度分析

3.1 概率密度演化理论

不失一般性, 考虑随机动力系统:

$$\dot{Z} = G(Z, \Theta, t; x) \quad (9)$$

式中 $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_m)^T$ 为 m 维状态向量; $G = (G_1, G_2, \dots, G_m)^T$ 为 m 维函数向量; t 为时间; x 为设计向量; $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_s)$ 为 s 维随机向量, 其联合概率密度函数记为 $p_{\Theta}(\theta)$, 其中 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$ 表示 Θ 的可实现值。方程(9)的初始条件为 $Z(\Theta, t=0; x) = z_0$, 其中 z_0 为状态向量 Z 的初始值。

根据概率守恒原理^[24], Z 与 Θ 的联合概率密度函数 $p_{Z\Theta}(z, \theta, t; x)$ 满足如下广义概率密度演化方程(GDEE):

$$\frac{\partial p_{Z\Theta}(z, \theta, t; x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^m \dot{Z}_i(\theta, t; x) \frac{\partial p_{Z\Theta}(z, \theta, t; x)}{\partial z_i} = 0 \quad (10)$$

式中 $\dot{Z}_i(\theta, t; x)$ 表示当 $\{\Theta = \theta\}$ 时, 式(9)所示系统的速度反应。方程(10)的初始条件为:

$$p_{Z\Theta}(z, \theta, t; x) \Big|_{t=0} = \delta(z - z_0) p_{\Theta}(\theta) \quad (11)$$

式中 $\delta(\cdot)$ 为 Dirac 函数。

特别地, 若仅关心一个物理量 Z (例如指定的结构层间位移或给定点的应力), 则式(10)退化为一维偏微分方程^[16]:

$$\frac{\partial p_{Z\Theta}(z, \theta, t; x)}{\partial t} + \dot{Z}(\theta, t; x) \frac{\partial p_{Z\Theta}(z, \theta, t; x)}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

其初始条件为:

$$p_{Z\Theta}(z, \theta, t; x) \Big|_{t=0} = \delta(z - z_0) p_{\Theta}(\theta) \quad (13)$$

式中 z_0 为 Z 的初始值。

通过求解式(12), 可以获得联合概率密度函数 $p_{Z\Theta}(z, \theta, t; x)$, 进而由数值积分, 可得到物理量 Z 的概率密度函数 $p_Z(z, t; x)$ 。

除对少数简单系统可得到解析解外^[25], 上述广义概率密度演化方程一般需要通过数值方式进行求解。该求解过程一般涉及概率空间剖分与代表点集选取、每一代表点处的确定性结构反应分析、每一代表点处广义概率密度演化方程的求解以及数值积分等步骤, 其具体数值求解细节可参考相关文献[16, 26-27]。此外, 概率密度演化理论对极限状态函数的形式没有额外限制, 因此适用于复杂结构系统的随机反应和动力可靠度分析^[28]。

3.2 结构动力可靠度及其灵敏度分析

基于概率密度演化理论的首次超越破坏可靠度分析可以通过吸收边界条件^[16, 29]、等价极值分布^[16, 30]和物理综合法^[31]等途径实现。本文所采用的是基于等价极值分布的结构首次超越破坏可靠度分析方法。

式(3)所示的首次超越破坏可靠度可以等价地表示为:

$$R_l(x, T) = \Pr\{Z_{\text{ext}}(\Theta, T; x) \leq 1\} \quad (14)$$

其中:

$$Z_{\text{ext}}(\Theta, T; x) = \max_{t \in (0, T]} \left\{ |Z_l(\Theta, t; x)| / z_l^{\text{th}} \right\} \quad (15)$$

构造虚拟随机过程^[32]:

$$W(\Theta, \tau; x) = Z_{\text{ext}}(\Theta, T; x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \tau\right) \quad (16)$$

式中 τ 为虚拟时间。根据式(12), 可知 W 与 Θ 的联合概率密度函数 $p_{W\Theta}(w, \theta, \tau; x)$ 满足:

$$\frac{\partial p_{W\Theta}(w, \theta, \tau; x)}{\partial \tau} + \dot{W}(\theta, \tau; x) \frac{\partial p_{W\Theta}(w, \theta, \tau; x)}{\partial w} = 0 \quad (17)$$

式中 $\dot{W}(\theta, \tau; x) = \pi/2 \cdot Z_{\text{ext}}(\theta, T; x) \cdot \cos(\pi\tau/2)$ 。偏微分方程(17)的初始条件为:

$$p_{W\Theta}(w, \theta, \tau; x) \Big|_{\tau=0} = \delta(w) p_{\Theta}(\theta) \quad (18)$$

通过求解方程(17)并在概率空间合成, 可得 $p_W(w, \tau; x)$ 。因为 $W(\Theta, \tau=1; x) = Z_{\text{ext}}(\Theta, T; x)$, 故有:

$$p_{Z_{\text{ext}}}(z; x) = p_W(w, \tau=1; x) \Big|_{w=z} \quad (19)$$

由式(14)可知, 对 $p_{Z_{\text{ext}}}(z; x)$ 在安全域内积分即可得到结构的首次超越破坏可靠度:

$$R_l(x, T) = \int_0^1 p_{Z_{\text{ext}}}(z; x) dz \quad (20)$$

相应的结构失效概率为 $P_{Fi}(\mathbf{x}, T) = 1 - R_i(\mathbf{x}, T)$ 。以上过程的具体数值求解步骤可见文献[16,26,30]。

如前所述,复杂结构的首次超越破坏可靠度分析一般需要通过广义概率密度演化方程的数值求解来实现。因此,首次超越破坏可靠度或失效概率对设计变量的灵敏度难以通过解析方式获得。一种可行的途径是采用有限差分方法(FDM)估计结构失效概率对设计变量的灵敏度。例如,采用中心差分可得:

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \approx \frac{h_i(\mathbf{x} + d_i \mathbf{e}_i) - h_i(\mathbf{x} - d_i \mathbf{e}_i)}{2d_i} = \frac{\ln [P_{Fi}(\mathbf{x} + d_i \mathbf{e}_i, T) + \epsilon]}{2d_i} - \frac{\ln [P_{Fi}(\mathbf{x} - d_i \mathbf{e}_i, T) + \epsilon]}{2d_i} \quad (21)$$

式中 \mathbf{e}_i 为 n 维欧氏空间中的第 i 个标准基向量, d_i 为有限差分步长。对于设计变量为随机变量分布均值的情况,在结构失效概率 $P_{Fi}(\mathbf{x}, T)$ 已由概率密度演化分析得到的前提下,结构失效概率 $P_{Fi}(\mathbf{x} - d_i \mathbf{e}_i, T)$ 与 $P_{Fi}(\mathbf{x} + d_i \mathbf{e}_i, T)$ 可以通过概率测度变换获得^[18]。

综上,基于概率密度演化-测度变换(PDEM-COM)的结构失效概率及其灵敏度分析方法的具体实施过程如下:

(1) 在第 k 个优化循环中,进行完整的概率密度演化(PDEM)分析^[16,26,30],以获得当前设计点 $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})^T$ 处的结构失效概率 $P_{Fi}(\mathbf{x}^{(k)}, T)$ 。记该步中使用的代表点集为 $\{(\theta_q, P_q) | q = 1, 2, \dots, n_{sel}\}$,其中 P_q 为代表点 θ_q 的赋得概率, n_{sel} 为代表点数量。

(2) 对每个设计变量 $x_i^{(k)}, i = 1, 2, \dots, n$, 分别选择合适的有限差分步长 d_i , 获得扰动后的设计点 $\mathbf{x}^{(k)} \pm d_i \mathbf{e}_i$ 。由于设计变量均为随机变量的均值,上述扰动将改变随机变量的概率分布,进而影响代表点集的赋得概率。根据扰动后随机变量的概率分布,更新代表点的赋得概率,分别记为 $\{(\theta_q, P_q^+) | q = 1, 2, \dots, n_{sel}\}$ 和 $\{(\theta_q, P_q^-) | q = 1, 2, \dots, n_{sel}\}$ 。

(3) 根据步骤(2)中更新后的代表点集以及步骤(1)中已经完成的确定性结构反应分析结果,重新结合等价极值分布求解广义密度演化方程^[17,33],即可获得设计点 $\mathbf{x}^{(k)} \pm d_i \mathbf{e}_i$ 处的结构失效概率,即 $P_{Fi}(\mathbf{x}^{(k)} - d_i \mathbf{e}_i, T)$ 和 $P_{Fi}(\mathbf{x}^{(k)} + d_i \mathbf{e}_i, T)$ 。

(4) 将 $P_{Fi}(\mathbf{x}^{(k)} - d_i \mathbf{e}_i, T)$ 和 $P_{Fi}(\mathbf{x}^{(k)} + d_i \mathbf{e}_i, T)$ 代入有限差分式(21),即可得到可靠度约束函数对设计变量 x_i 的灵敏度。

值得注意的是,上述过程要求设计变量是随机变量的均值,但对随机变量并无限制或要求。换句话说,基于概率密度演化-测度变换的灵敏度分析过程中允许存在不依赖于设计变量的随机变量。此外,灵敏度分析过程采用了与可靠度分析相同的代表点,仅需进行赋得概率的更新,无需重新进行确定性结构分析,这使得与灵敏度分析相关的计算量大为降低。因此,本文提出的方法特别适用于结构分析计算成本较高的复杂结构基于动力可靠度的优化设计。

在上述可靠度与灵敏度分析过程中,概率测度变换仅仅在一个优化循环内使用。经验表明,在优化迭代的后期,设计变量和目标函数的变化一般较小。为了进一步提高计算效率,可以引入循环间的概率测度变换以实现首次超越破坏可靠度和灵敏度分析。在本文中,若当前优化循环中每个设计变量的变化均小于当前值的10%,则下一循环中的结构失效概率 $P_{Fi}(\mathbf{x}^{(k+1)}, T)$ 及其灵敏度也都根据当前循环中的代表点及其确定性分析结果由概率测度变换计算得到。

4 数值算例

4.1 两层弹性框架结构优化设计

为了验证本文方法的有效性,首先考察图1所示的两层弹性框架结构在地震动作用下基于可靠度的优化设计问题。

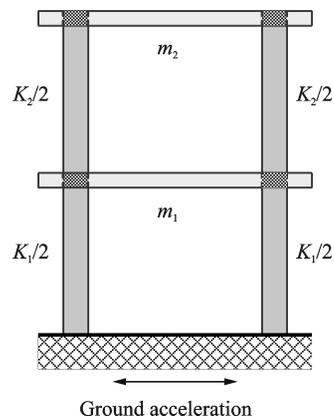


图1 两层弹性框架结构

Fig. 1 A two-storied linear frame structure

假定框架结构层间抗侧刚度 K_1 和 K_2 为服从正态分布的随机变量,以其均值 x_1 和 x_2 为设计变量。结构层集中质量分别为 $m_1 = 1.80 \times 10^5$ kg 和 $m_2 = 1.20 \times 10^5$ kg, 层高为 $h = 3.6$ m, 模态阻尼比为 $\xi = 0.03$ 。结构承受的地震加速度为 El Centro 地震动南北方向加速度记录与东西方向加速度记录的归一

化随机组合,即:

$$\ddot{u}_g(t) = \Theta_1 \cdot \ddot{u}_{g,NS}(t) + \Theta_2 \cdot \ddot{u}_{g,EW}(t) \quad (22)$$

式中 $\ddot{u}_g(t)$ 为模型输入的地震动加速度记录, $\ddot{u}_{g,NS}(t)$ 和 $\ddot{u}_{g,EW}(t)$ 分别为归一化的 El Centro 地震动南北方向加速度记录与东西方向加速度记录,组合系数 Θ_1 与 Θ_2 为服从正态分布的随机变量。本例中随机变量的分布信息如表 1 所示 (g 为重力加速度)。

表 1 两层弹性框架结构随机变量的分布信息

Tab. 1 Random variables of the two-storied frame structure

随机变量	分布类型	均值	变异系数
$K_1/(10^8 \text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	正态分布	x_1	0.05
$K_2/(10^8 \text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	正态分布	x_2	0.05
$\Theta_1/(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$	正态分布	$0.10g$	0.10
$\Theta_2/(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$	正态分布	$0.10g$	0.10

当框架结构中任意一层的层间最大位移超过层高的 1/250 时,认为结构失效。因此结构的失效概率可定义为:

$$P_F(x_1, x_2, T) = \Pr \left\{ \max_{t \in (0, T]} \left[\max_{r=1,2} |Z_r(x_1, x_2, t)| \right] > \frac{h}{250} \right\} \quad (23)$$

式中 T 为地震动持时, Z_r 为结构第 r 层层间位移反应。以最小化结构总刚度作为优化目标,同时,根据工程经验,要求结构底层刚度不小于上层刚度以避免不利受力状态。由此,优化问题可以定义为:

$$\begin{aligned} \min f(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 \\ \text{s.t. } g(x_1, x_2) &= x_2 - x_1 \leq 0 \\ h(x_1, x_2) &= \ln [P_F(x_1, x_2, T) + \epsilon] - \ln P_F^{\text{th}} \leq 0 \\ 0.5 &\leq x_1 \leq 1.2, 0.3 \leq x_2 \leq 1.0 \end{aligned} \quad (24)$$

在本例中,给定失效概率阈值 $P_F^{\text{th}} = 0.01$ 。这里,采用 0.01 作为失效概率阈值仅仅是为了说明方法的有效性。对于实际问题,可按照相关规范的规定确定目标失效概率或目标可靠性指标。

以 $x_{A1} = (1.00, 1.00)$ 为初始点,采用不同的可靠度和灵敏度分析方法结合 GCMMA 对优化问题 (24) 进行求解,最终的优化结果和计算成本对比如表 2 所示。PDEM-COM-FDM 即本文所提出的方法,采用概率密度演化-测度变换方法与有限差分计算结构的动力可靠度及其灵敏度。PDEM-FDM 表示采用概率密度演化理论计算结构动力可靠度并采用有限差分直接估计其灵敏度的方法。在本例中,以上两种方法中采用的代表点数量为 500。MCS-FDM-1 和 MCS-FDM-2 均表示采用 Monte Carlo 模拟方法计算结构动力可靠度并以有限差分估计其灵

敏度的方法。所不同的是, MCS-FDM-1 中采用的随机样本数量为 10000, 而 MCS-FDM-2 中采用的随机样本数量为 20000。

由于 MCS-FDM-1 中单次 Monte Carlo 模拟采用的样本数量不足,得到的灵敏度误差较大,甚至可能发生灵敏度符号错误的情况,在本算例中算法未能达到收敛。从表中对比可见,本文提出的方法可以显著降低优化过程中确定性结构分析的次数,进而提高基于动力可靠度的结构优化设计问题的求解效率。

表 2 不同可靠度与灵敏度分析方法对应的优化结果与计算效率(两层框架结构)

Tab. 2 Results and efficiency of different methods for reliability and sensitivity analysis (The two-storied frame structure)

灵敏度分析方法	最优目标函数值/ ($10^8 \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$)	结构分析次数	计算时间/s
PDEM-COM-FDM	1.38	2000	1140.22
PDEM-FDM	1.38	27500	6556.00
MCS-FDM-1	1.55	810000	16296.01
MCS-FDM-2	1.38	700000	14484.34

分别以 $x_{A1} = (1.00, 1.00)$, $x_{B1} = (1.20, 1.00)$ 和 $x_{C1} = (1.00, 0.80)$ 作为初始点,采用本文所提出的方法对式 (24) 所示优化问题进行求解,目标函数和结构失效概率的迭代过程分别如图 2 和 3 所示。从中可见,三种情况下本文所提出的方法都可以在少数几次迭代后达到收敛,且采用不同初始点所获得的最终目标函数值十分接近。因此,本文提出的方法不仅具有较高的效率,而且对初始设计的选择具有较强的稳健性。

从图 3 可以发现,本文方法得到的所有中间设计点对应的失效概率均小于给定的阈值 0.01 (可靠度 0.99), 这意味着所有的中间设计均为可行设计。

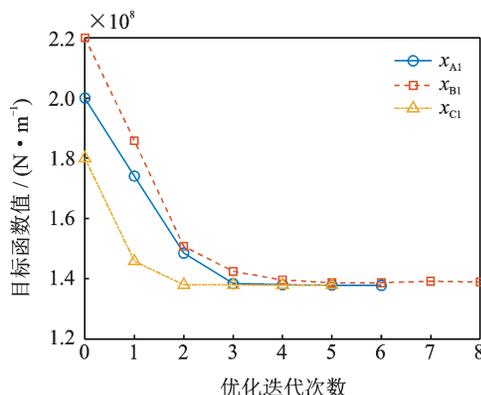


图 2 目标函数随迭代次数的变化(两层框架结构)

Fig. 2 Iteration history in terms of objective function value (The two-storied frame structure)

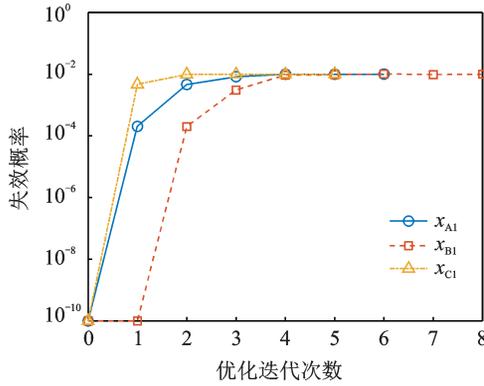


图3 失效概率随迭代次数的变化(两层框架结构)

Fig. 3 Iteration history in terms of failure probability (The two-storied frame structure)

前文已指出,这一性质对复杂结构的优化设计具有重要意义。此外,采用不同初始点所获得的最终设计对应的结构动力可靠度约束均处于有效状态。这表明,若在优化过程中不施加合理的可靠度要求,则可能导致优化设计得到的结构的可靠度水平较低。进一步地,若将式(24)的优化问题中的可靠性约束直接替换为最大层间位移约束,同时所有随机变量均取其均值,则优化算法给出的最终设计为 $x_D = (0.515, 0.304)$, 相应的结构失效概率高达 61.3%。可见,若在结构优化设计中合理地设定可靠性约束,可以在一定程度上提高优化后的结构抵抗参数扰动和不确定性的能力。

为了进一步说明本文所提方法的效率与精度,采用遗传算法(GA)对上述优化结果进行校核。这里,遗传算法的种群规模为 50,最大进化代数为 100,结构可靠性分析采用概率密度演化理论,代表点数量为 500。表 3 为本文方法与遗传算法得到的最终设计的对比。可以发现,当采用不同初始点时,本文方法得到的最终设计量和最终目标函数值与遗传算法的结果均十分接近。然而,遗传算法需要的结构分析次数以及总计算时间都要远高于本文所提出的方法。

表 3 本文方法与遗传算法优化结果对比

Tab. 3 Comparison between the proposed method and the genetic algorithm

	本文方法			GA
	初始点: x_{A1}	初始点: x_{B1}	初始点: x_{C1}	
$x_1/(10^8 \text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	0.85	0.84	0.85	0.85
$x_2/(10^8 \text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	0.53	0.55	0.53	0.52
目标函数/ $(10^8 \text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	1.38	1.39	1.38	1.37
结构分析次数	2000	2500	1500	2650000
计算时间/s	1140.22	1495.94	1065.84	130231.15

4.2 带阻尼器的 10 层框架结构优化设计

采用本文所提出的方法求解图 4 所示的 10 层框架结构在地震动作用下基于动力可靠度的优化设计问题。为计算分析方便,忽略梁柱构件的轴向变形,将结构简化为具有 10 个自由度的层间剪切模型。

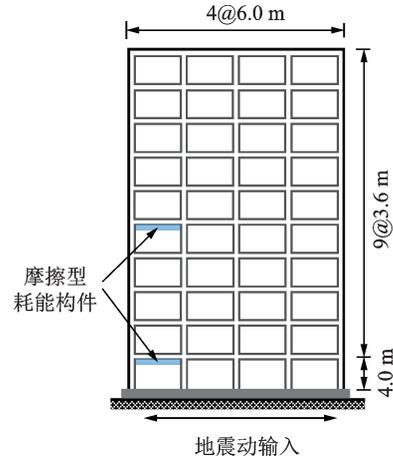


图 4 带有非线性耗能构件的 10 层框架结构

Fig. 4 A ten-storied frame structure with nonlinear hysteretic devices

结构底层层高为 4.0 m,其余层高均为 3.6 m,模态阻尼比为 $\xi = 0.05$ 。结构层集中质量分别为 $m_1 = m_2 = 3.4 \times 10^5 \text{ kg}$, $m_3 = m_4 = m_5 = 3.2 \times 10^5 \text{ kg}$, $m_6 = m_7 = m_8 = 2.8 \times 10^5 \text{ kg}$ 和 $m_9 = m_{10} = 2.6 \times 10^5 \text{ kg}$ 。假定框架结构层间抗侧刚度 $K_i, i = 1, 2, \dots, 10$ 为服从正态分布的随机变量,以其均值 $x_i, i = 1, 2, \dots, 10$ 为设计变量。

该结构承受与上例相同的地震动输入,即所输入地震动加速度时程由式(22)表示。为了降低地震动作用下的结构反应,分别在结构第一层和第五层安装摩擦型耗能构件,其恢复力为:

$$r(t) = k_1 [z_R(t) - q_1(t) + q_2(t)] \quad (25)$$

式中 k_1 为初始刚度, z_R 为层间相对位移, q_1 和 q_2 表示构件的非线性伸长量。在本例中, q_1 和 q_2 分别满足^[34]:

$$\dot{q}_1(t) = \dot{z}_R(t) H(\dot{z}_R(t)) \cdot$$

$$H(u(t) - u_y) \frac{u(t) - u_y}{u_p - u_y} H(u_p - u(t)) +$$

$$\dot{z}_R(t) H(\dot{z}_R(t)) H(u(t) - u_p) \quad (26)$$

$$\dot{q}_2(t) = -\dot{z}_R(t) H(-\dot{z}_R(t)) H(-u(t) -$$

$$u_y) \frac{-u(t) - u_y}{u_p - u_y} H(u_p + u(t)) - \dot{z}_R(t) \cdot$$

$$H(-\dot{z}_R(t)) H(-u(t) - u_p) \quad (27)$$

式中 $u(t) = z_R(t) - q_1(t) + q_2(t)$, $H(\bullet)$ 为 Heaviside 函数, u_y 和 u_p 分别表示耗能构件的屈服变形和最大变形。在本例中, $u_y = 0.0042 \text{ m}$, $u_p = 0.006 \text{ m}$ 。

为了考虑耗能构件力学性能的随机性,假定结构第一层和第五层所布置的耗能构件初始刚度 K_{11} 和 K_{12}

为随机变量。该优化问题中所涉及的随机变量的分布类型和参数如表4所示。

表4 10层框架结构中随机变量的概率分布信息

Tab. 4 Random variables of the ten-storied frame structure

随机变量	分布类型	均值	变异系数
$K_i; i=1, 2, \dots, 10/(10^8 \text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	正态分布	$x_i; i=1, 2, \dots, 10$	0.10
$\Theta_j; j=1, 2/(N \cdot \text{m}^{-2})$	正态分布	0.10g	0.15
$K_{1k}; k=1, 2/(10^7 \text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	对数正态分布	2.00	0.05

耗能构件的典型恢复力曲线如图5所示,可见耗能构件已表现出很强的非线性与耗能性质,从而实现减震效果。

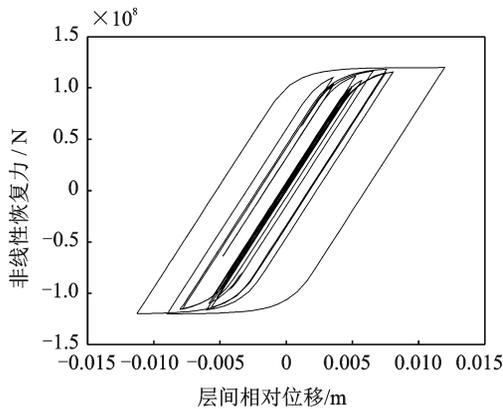


图5 耗能构件的典型恢复力曲线

Fig. 5 A typical restoring force curve of the nonlinear hysteretic device

一般情况下,可认为结构成本与结构总刚度成正比^[35]。因此,优化目标可取为最小化结构总刚度。当任一层间位移超过0.015 m时即认为结构失效。同时,要求较高楼层的刚度总不小于较低楼层的刚度,并给定层间刚度的上限与下限,则优化问题可以表示为:

$$\min f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{10} x_i$$

$$\text{s.t. } g_j(\mathbf{x}) = x_{j+1} - x_j \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 9$$

$$h(\mathbf{x}) = \ln [P_F(\mathbf{x}, T) + \epsilon] - \ln P_F^{\text{th}} \leq 0$$

$$1.0 \leq x_i \leq 6.0, \quad i = 1, 2, \dots, 10 \quad (28)$$

式中 $P_F^{\text{th}} = 0.01$ 为结构失效概率阈值, $P_F(\mathbf{x}, T)$ 为结构失效概率,定义为:

$$P_F(\mathbf{x}, T) =$$

$$\Pr \left\{ \max_{t \in (0, T]} \left[\max_{r=1, 2, \dots, 10} |Z_r(\mathbf{x}, t)| \right] > 0.015 \right\} \quad (29)$$

式中 T 为地震动持时, Z_r 为结构第 r 层层间位移反应。如前所述,对于实际问题,目标失效概率或目标可靠性指标可按照规范的相关规定确定。

在本例中,共有14个随机变量,其中10个随机变量的均值为设计变量。

分别以表5中的 \mathbf{x}_{A2} , \mathbf{x}_{B2} 和 \mathbf{x}_{C2} 作为初始点,采用本文所提出的方法求解式(28)所示的优化问题。在本例中,概率密度演化-测度变换分析中采用的代表点数量为600。目标函数值随优化迭代次数的变化情况如图6所示。可以看到,本文所提出的方法经过7次左右的迭代可达到收敛。值得注意的是,目标函数的下降主要发生在优化过程的前几次迭代中。这意味着即使很少的优化迭代步也将显著改善结构的性能。

表5 初始设计(10层框架结构)

Tab. 5 Three different initial designs for the ten-storied frame structure

初始设计	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
\mathbf{x}_{A2}	5.00	5.00	5.00	5.00	5.00	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50
\mathbf{x}_{B2}	5.00	5.00	5.00	5.00	4.50	4.50	4.50	4.00	4.00	4.00
\mathbf{x}_{C2}	5.50	5.50	5.50	5.00	5.00	5.00	4.50	4.50	4.00	4.00

表6为采用不同初始点获得的最优目标函数值以及优化过程中进行的结构分析次数。由于动力可靠度分析以及灵敏度分析过程中存在数值误差,不同初始点对应的最优目标函数值略有不同。虽然如此,最优目标函数值的相对差别仅为2.5%左右,完全在工程上可接受的范围内。这说明,本文所提出

的方法对初始设计的选择具有较高的鲁棒性。

若采用MCS-FDM-2进行可靠度分析和灵敏度分析,式(28)所示优化问题的求解过程中涉及的结构分析次数将超过1000000次(估计值),而本文所提出的方法所需结构分析次数仅有MCS-FDM-2的不足1%。可见,本文提出的方法可以极大地降低

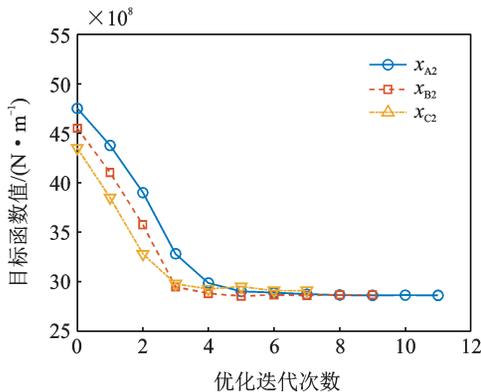


图6 目标函数值随迭代次数的变化(10层框架结构)

Fig. 6 Iteration history in terms of objective function value (The ten-storied frame structure)

表6 采用不同初始点获得的最终目标函数值及求解过程中的结构分析次数(10层框架结构)

Tab. 6 Final objective function values and numbers of structural analyses with different initial designs (The ten-storied frame structure)

初始设计	最优目标函数值/ ($10^8 \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$)	结构分析次数
x_{A2}	28.63	10200
x_{B2}	28.41	8400
x_{C2}	29.10	9600

结构优化过程中的结构分析次数,从而显著提高基于可靠度的结构优化问题的求解效率。

5 讨论和结论

针对设计变量与部分随机变量耦合情况下具有动力可靠度约束的结构优化设计问题,结合概率密度演化-测度变换(PDEM-COM)方法与全局收敛移动渐近线法(GCMMA),提出了一类新的求解框架。数值算例表明,本文所提出的方法具有较高的效率。具体结论如下:

(1) 当设计变量为系统中部分随机变量的均值时,概率密度演化-测度变换方法可以重复利用代表点处的结构分析结果,从而在不引入新的结构分析的前提下,实现首次超越破坏可靠度对设计变量的灵敏度估计。因此,本方法可以显著提高基于动力可靠度的结构优化设计问题的求解效率。

(2) 算例的结果表明,本文提出的方法可以在少数几次迭代后达到收敛。可以预期,在本文所考虑的设计变量的数量范围内,算法可以在10次迭代内达到收敛,相应的可靠性分析次数不超过20次。此外,GCMMA通过内层循环对中间设计点的可行性进行调整,从而保证了本方法得到的中间设计均为较初始设计更好的可行设计。

(3) 由于概率密度演化理论适用于线性与非线性结构的随机反应分析,本文提出的方法可用于地震动作用下线性和非线性结构基于可靠度的优化设计。

鉴于本文方法仅适用于设计变量与所有随机变量或部分随机变量耦合的动力可靠性优化设计,如何将上述概率密度演化-测度变换方法扩展到设计变量含有确定性物理量的可靠性优化设计之中,是需要进一步开展的研究工作。此外,在未来的工作中,有望将本文基本思想推广到具有动力可靠度约束的结构拓扑优化设计之中。

参考文献:

- [1] Ang AH-S, Tang W. 工程中的概率概念——在土木与环境工程中的应用[M]. 陈建兵, 彭勇波, 刘威, 等,译. 北京: 中国建筑工业出版社, 2017.
Ang AH-S, Tang W. Probability Concepts in Engineering[M]. Translated by Chen Jianbing, Peng Yongbo, Liu Wei, et al. Beijing: China Architecture & Building Press, 2017.
- [2] 赵国藩, 曹居易, 张宽权. 工程结构可靠度[M]. 北京: 科学出版社, 2011.
Zhao G F, Cao J Y, Zhang K Q. Reliability of Engineering Structures[M]. Beijing: Science Press, 2012.
- [3] 李杰. 论第三代结构设计理论[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2017, 45(5): 617-624+632.
Li J. On the third generation of structural design theory [J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2017, 45(5): 617-624+632.
- [4] 蒋琛, 邱浩波, 高亮. 随机不确定性下的可靠性设计优化研究进展[J]. 中国机械工程, 2020, 31(2): 190-205.
Jiang C, Qiu H B, Gao L. Research progresses in reliability-based design optimization under aleatory uncertainties[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2020, 31(2): 190-205.
- [5] 程耿东, 许林. 基于可靠度的结构优化的序列近似规划算法[J]. 计算力学学报, 2006, 23(6): 641-646.
Cheng G D, Xu L. Sequential approximate programming approach to reliability based structural optimization [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2006, 23(6): 641-646.
- [6] Yi P, Cheng G, Jiang L. A sequential approximate programming strategy for performance-measure-based probabilistic structural design optimization [J]. Structural Safety, 2008, 30(2): 91-109.
- [7] Meng Z, Zhou H, Hu H, et al. Enhanced sequential approximate programming using second order reliability method for accurate and efficient structural reliability-

- based design optimization [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, 62: 562-579.
- [8] Du X P, Chen W. Sequential optimization and reliability assessment method for efficient probabilistic design [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2004, 126 (2) : 225-233.
- [9] Liang J, Mourelatos Z P, Nikolaidis E. A single-loop approach for system reliability-based design optimization [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2007, 129 (12) : 1215-1224.
- [10] Melchers R E, Beck A T. *Structural Reliability Analysis and Prediction*[M]. 3rd ed. Hoboken, NJ: Wiley, 2018.
- [11] Wang J, Katafygiotis L S. Reliability-based optimal design of linear structures subjected to stochastic excitations[J]. *Structural Safety*, 2014, 47: 29-38.
- [12] Jensen H A, Jerez D J, Valdebenito M. An adaptive scheme for reliability-based global design optimization: a Markov chain Monte Carlo approach[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2020, 143: 106836.
- [13] Jensen H A, Valdebenito M A, Schuëller G I, et al. Reliability-based optimization of stochastic systems using line search[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009, 198(49): 3915-3924.
- [14] Jensen H A, Becerra L G, Valdebenito M A. On the use of a class of interior point algorithms in stochastic structural optimization [J]. *Computers & Structures*, 2013, 126: 69-85.
- [15] 李杰, 陈建兵. 随机结构非线性动力响应的概率密度演化分析[J]. *力学学报*, 2003, 35(6): 716-722.
Li J, Chen J B. The probability density evolution method for analysis of dynamic nonlinear response of stochastic structures [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2003, 35(6): 716-722.
- [16] Li J, Chen J B. *Stochastic Dynamics of Structures*[M]. Singapore: Wiley, 2009.
- [17] Chen J B, Wan Z Q. A compatible probabilistic framework for quantification of simultaneous aleatory and epistemic uncertainty of basic parameters of structures by synthesizing the change of measure and change of random variables [J]. *Structural Safety*, 2019, 78: 76-87.
- [18] Chen J B, Yang J S, Jensen H A. Structural optimization considering dynamic reliability constraints via probability density evolution method and change of probability measure[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2020, 62(5): 2499-2516.
- [19] Carlon A G, Lopez R H, Espath L F R, et al. A stochastic gradient approach for the reliability maximization of passively controlled structures[J]. *Engineering Structures*, 2019, 186: 1-12.
- [20] Svanberg K. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, 24(2): 359-373.
- [21] Svanberg K. A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2002, 12(2): 555-573.
- [22] Svanberg K. MMA and GCMMA—two methods for nonlinear optimization[R]. Stockholm: KTH Royal Institute of Technology, 2007.
- [23] Jensen H A, Sepulveda J G. Structural optimization of uncertain dynamical systems considering mixed-design variables [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2011, 26(2): 269-280.
- [24] Li J, Chen J. The principle of preservation of probability and the generalized density evolution equation [J]. *Structural Safety*, 2008, 30(1): 65-77.
- [25] 蒋仲铭, 李杰. 三类随机系统广义概率密度演化方程的解析解[J]. *力学学报*, 2016, 48(2): 413-421.
Jiang Z M, Li J. Analytical solution of the generalized probability density evolution equation of three classes stochastic systems [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, 48(2): 413-421.
- [26] Chen J B, Yang J Y, Li J. A GF-discrepancy for point selection in stochastic seismic response analysis of structures with uncertain parameters [J]. *Structural Safety*, 2016, 59: 20-31.
- [27] Chen J B, Chan J P. Error estimate of point selection in uncertainty quantification of nonlinear structures involving multiple nonuniformly distributed parameters[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2019, 118(9): 536-560.
- [28] Yang D X, Liu L B. Reliability analysis of structures with complex limit state functions using probability density evolution method [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2014, 50(2): 275-286.
- [29] 李杰, 陈建兵. 随机结构动力可靠度分析的概率密度演化方法[J]. *振动工程学报*, 2004, 17(2): 5-9.
Li J, Chen J B. Probability density evolution method for dynamic reliability analysis of stochastic structures [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2004, 17(2): 5-9.
- [30] 陈建兵, 李杰. 随机结构动力可靠度分析的极值概率密度方法[J]. *地震工程与工程振动*, 2004, 24(6): 39-44.
Chen J B, Li J. The extreme value probability density function based method for dynamic reliability assessment of stochastic structures [J]. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2004, 24(6): 39-44.
- [31] 李杰. 工程结构整体可靠性分析研究进展[J]. *土木工程学报*, 2018, 51(8): 1-10.

- Li J. Advances in global reliability analysis of engineering structures [J]. Chinese Civil Engineering Journal, 2018, 51(8): 1-10.
- [32] Li J, Chen J B, Fan W L. The equivalent extreme-value event and evaluation of the structural system reliability[J]. Structural Safety, 2007, 29(2): 112-131.
- [33] 万志强, 陈建兵. 数据稀缺与更新条件下基于概率密度演化-测度变换的认知不确定性量化分析[J]. 工程力学, 2020, 37(1): 34-42.
- Wan Z Q, Chen J B. Quantification of epistemic uncertainty due to data sparsity and updating based on the framework via synthesizing probability density evolution method and change of probability measure[J]. Engineering Mechanics, 2020, 37(1): 34-42.
- [34] Pradlwarter H J, Schuëller G I, Dorka U. Reliability of MDOF-systems with hysteretic devices [J]. Engineering Structures, 1998, 20(8): 685-691.
- [35] Valdebenito M A, Schuëller G I. Efficient strategies for reliability-based optimization involving non-linear, dynamical structures[J]. Computers & Structures, 2011, 89(19): 1797-1811.

Structural optimization under dynamic reliability constraints by synthesizing change of probability measure and globally convergent method of moving asymptotes

YANG Jia-shu^{1,2}, CHEN Jian-bing^{1,2}

(1.State Key Laboratory of Disaster Reduction in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China;

2.College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Dynamic-reliability-based design optimization is a reasonable framework for the optimization of stochastic dynamical systems. In the present paper, a method is proposed for solving dynamic-reliability-based design optimization problems where design variables are considered as the mean values of the probability density functions of part of the random variables involved in the system. In this method, the reliability of stochastic dynamical system is evaluated efficiently by the probability density evolution method (PDEM). Then, by performing the changes of probability measure (COM), the sensitivity of the dynamic reliability with respect to design variables can be efficiently estimated without any additional structural analysis. By incorporating the PDEM-COM synthesized method into a globally convergent version of the method of moving asymptote, dynamic-reliability-based design optimization problems can be solved efficiently. The effectiveness of the proposed method is verified by two numerical examples. The results of the numerical examples indicate that the proposed method is efficient and robust.

Key words: stochastic dynamical system; reliability optimization design; probability density evolution method; change of probability measure; dynamic reliability

作者简介: 杨家树(1994—),男,博士研究生。电话:(021)65981505; E-mail: jiashuyang@tongji.edu.cn。

通讯作者: 陈建兵(1975—),男,教授。E-mail: chenjb@tongji.edu.cn。