

# 黏滞阻尼器联合负刚度对斜拉索减振控制的增效研究

郜 辉<sup>1</sup>, 王 浩<sup>1</sup>, 汪志昊<sup>2</sup>, 张 寒<sup>1</sup>, 倪有豪<sup>1</sup>

(1. 东南大学混凝土及预应力混凝土结构教育部重点实验室, 江苏 南京 211189;  
2. 华北水利水电大学河南省生态建材工程国际联合实验室, 河南 郑州 450045)

**摘要:** 阻尼器的负刚度特性有助于提升其对斜拉索的减振效果, 为探究负刚度装置(NS)对黏滞阻尼器(VD)应用于斜拉索减振控制的增效作用, 开展了VD联合NS对斜拉索减振控制的增效研究。采用复模态分析方法获得了斜拉索-VD-NS耦合系统的特征方程, 并进一步推导了斜拉索附加模态阻尼比的近似解; 分析了NS的负刚度系数和安装高度对斜拉索模态阻尼比和振动频率的影响; 基于输出反馈的LQR控制, 获得了给定负刚度系数时VD对斜拉索多阶模态减振控制的最优参数, 进而研究了负刚度系数和NS安装高度对斜拉索多阶模态振动控制的增效作用。研究表明: 增加NS的负刚度系数或安装高度均有助于提升VD对斜拉索单阶模态和多阶模态减振效果, 同时减小了VD的最优阻尼系数; NS对VD减振性能的提升归功于负刚度系数或NS安装高度的增大对VD位移幅值的放大效应, 提升了VD的耗能能力。

**关键词:** 黏滞阻尼器; 斜拉索; 多模态振动控制; 负刚度; 减振增效

**中图分类号:** U441<sup>+</sup>.3; U448.27 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2022)02-0255-09

**DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2022.02.001

## 引 言

大跨度斜拉桥的斜拉索极易在风、风-雨等外界环境激励下发生持续、大幅的有害振动<sup>[1-3]</sup>, 有效的斜拉索减振技术对斜拉桥的安全运营至关重要。安装黏滞阻尼器(VD)作为一种广泛应用的斜拉索减振措施, 其减振效果受到了国内外学者的普遍关注, 研究表明<sup>[4-7]</sup>: VD为斜拉索提供的最优附加模态阻尼比近似等于阻尼器安装位置与斜拉索长度比值的一半, 且斜拉索各阶模态所需的最优阻尼系数与斜拉索的模态阶次成反比。随着大柔度超长斜拉索的工程应用, VD已难以满足超长斜拉索多阶模态的减振需求。

为提升VD对斜拉索的减振效果, 一些学者提出了基于MR阻尼器的斜拉索智能、半主动控制措施<sup>[8-9]</sup>, 并发现控制力的负刚度特性有助于提升斜拉索的减振效果<sup>[10]</sup>。受此启发, 耦合被动负刚度装置(NS)的被动负刚度阻尼器(NSD)在斜拉索振动控制领域得到了较多关注, 主要包括: ①在垂直阻尼器运动方向布置预压弹簧的预压弹簧式NSD<sup>[11-12]</sup>; ②基于永磁体作用力的磁致NSD<sup>[13-14]</sup>; ③结合“惯容单元”的惯性质量NSD<sup>[15-18]</sup>。Chen等<sup>[11]</sup>首先阐明了预

压弹簧式NSD对斜拉索振动控制的优越性, 并指出该负刚度装置的刚度系数可近似由其平衡位置的切线刚度模拟; Zhou等<sup>[12]</sup>试验验证了预压弹簧式NSD对斜拉索的减振提升效果。Shi等<sup>[13-14]</sup>试验验证了磁致NSD对斜拉索的减振优越性, 通过理论与试验结果对比分析了斜拉索抗弯刚度对NSD减振效果的影响, 并指出磁致NSD的刚度系数可采用等效线性化方法模拟。Lu等<sup>[15]</sup>、Li等<sup>[16]</sup>、汪志昊等<sup>[17]</sup>、李寿英等<sup>[18]</sup>验证了惯性质量NSD对斜拉索减振效果的提升作用。Majd等<sup>[19]</sup>建立NSD对斜拉索减振控制的精细化设计公式, 并评估了其对于斜拉索多阶模态的减振效果。上述研究表明<sup>[12-19]</sup>: 负刚度元件有助于放大阻尼元件的位移, 实现VD的耗能增效和斜拉索减振效果提升。

然而, 上述研究中VD和NS的安装位置相同, 尚未发现VD和NS安装在斜拉索不同位置的公开文献报道。近期, Zhou等<sup>[20]</sup>研究了VD联合集中质量对斜拉索的振动控制性能, 发现集中质量位置高于VD时比二者在相同位置时的减振性能更优。为了进一步探究NS对VD应用于斜拉索减振控制的增效作用, 本文开展了VD联合NS对斜拉索减振控制的增效研究, 推导了斜拉索附加模态阻尼比的近似解; 分析了NS负刚度系数和安装高度对斜拉索

**收稿日期:** 2020-07-25; **修订日期:** 2020-10-27

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(51722804, 51878274, 51978155); 国家“万人计划”青年拔尖人才(W03070080); 中央高校基本科研业务费资助项目(2242020k1G013)。

模态阻尼比和振动频率的影响规律;最后,基于输出反馈的LQR控制获得了VD对斜拉索多阶模态减振控制的最优参数,进而研究了NS负刚度系数和安装高度对斜拉索多阶模态减振控制的增效作用。

## 1 耦合系统特征方程

图1为斜拉索-VD-NS耦合系统分析模型,其自由振动微分方程可表示为:

$$T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^2 f_j \delta(x - x_j) \quad (1)$$

式中  $T$  表示斜拉索张力;  $m$  表示斜拉索每延米质量;  $u(x, t)$  表示  $t$  时刻  $x$  位置处斜拉索的振动位移;  $\delta(\cdot)$  为 Dirac delta 函数;  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  分别表示 VD 和 NS 作用于斜拉索的横向力, 可分别表示为:

$$f_1(t) = c \frac{\partial u(x_1, t)}{\partial t}, \quad f_2(t) = k_{ns} u(x_2, t) \quad (2)$$

式中  $c$  和  $k_{ns}$  分别表示 VD 的阻尼系数和 NS 的负刚度系数。

式(1)应满足边界条件:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (3)$$

并在阻尼器安装位置处应满足协调条件:

$$\begin{cases} u(x_1^-, t) = u(x_1^+, t) = u(x_1, t) \\ u(x_2^-, t) = u(x_2^+, t) = u(x_2, t) \\ T \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x_j^+} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x_j^-} \right) = f_j(t), j = 1, 2 \end{cases} \quad (4)$$

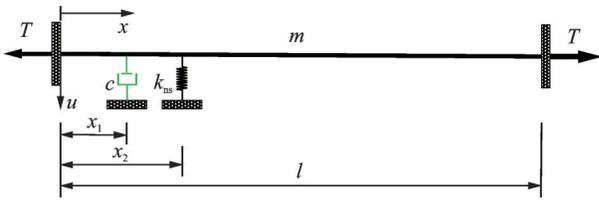


图1 斜拉索-VD-NS耦合系统分析模型

Fig.1 The analytical model of the cable-VD-NS system

设斜拉索第  $n$  阶模态自由振动的横向位移、VD 和 NS 作用于斜拉索的横向力分别表示为:

$$\begin{cases} u(x, t) = U(x) \exp(i\omega_n t) \\ f_1(t) = F_1 \exp(i\omega_n t) \\ f_2(t) = F_2 \exp(i\omega_n t) \end{cases} \quad (5)$$

式中  $U(x)$  表示斜拉索的振型坐标,  $F_1$  和  $F_2$  分别表示 VD 和 NS 的输出幅值,  $\omega_n$  表示耦合系统第  $n$  阶模态的复特征频率, 可表示为:

$$\omega_n = |\omega_n| (\sqrt{1 - \zeta_n^2} + i\zeta_n) \quad (6)$$

式中  $\zeta_n$  表示耦合系统第  $n$  阶模态的模式阻尼比。

将式(5)代入式(1), 得:

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} + \beta_n^2 U(x) = 0, \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq x_1 \\ x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0 \leq x^* \leq x_2^* \end{cases} \quad (7)$$

式中  $\beta_n = \omega_n \sqrt{m/T}$  表示耦合系统第  $n$  阶模态的复波数,  $x^* = l - x$ ,  $x_2^* = l - x_2$ 。

方程(7)的解可表示为:

$$U(x) = \begin{cases} U(x_1) \frac{\sin \beta_n x}{\sin \beta_n x_1}, & 0 \leq x \leq x_1 \\ U(x_1) \frac{\sin \beta_n (x_2 - x)}{\sin \beta_n (x_2 - x_1)} + \\ U(x_2) \frac{\sin \beta_n (x - x_1)}{\sin \beta_n (x_2 - x_1)}, & x_1 \leq x \leq x_2 \\ U(x_2) \frac{\sin \beta_n x^*}{\sin \beta_n x_2^*}, & 0 \leq x^* \leq x_2^* \end{cases} \quad (8)$$

式中  $U(x_1)$  和  $U(x_2)$  表示 VD 和 NS 安装位置处斜拉索振动的位移幅值。

将式(8)代入式(4), 斜拉索-VD-NS 耦合系统特征方程可表示为:

$$\begin{aligned} \tan \beta_n l &= \frac{A + iB}{C + iD}, \\ A &= \kappa \sin^2 \beta_n x_2, \\ B &= \eta \sin^2 \beta_n x_1 + \\ &\quad \kappa \eta \sin \beta_n x_1 \sin \beta_n x_2 \sin \beta_n (x_2 - x_1), \\ C &= 1 + \kappa \sin \beta_n x_2 \cos \beta_n x_2, \\ D &= \eta \sin \beta_n x_1 \cos \beta_n x_1 + \\ &\quad \kappa \eta \sin \beta_n x_1 \cos \beta_n x_2 \sin \beta_n (x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (9)$$

其中:

$$\kappa = \frac{k_{ns}}{T\beta_n}, \quad \eta = \frac{c}{\sqrt{mT}} \quad (10)$$

方程(9)可采用固定点迭代法进行求解, 迭代方程为:

$$\beta_n^{j+1} l = n\pi + \arctan \frac{A(\beta_n^j) + iB(\beta_n^j)}{C(\beta_n^j) + iD(\beta_n^j)},$$

$$\beta_n^0 = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

由式(6)可知, 斜拉索第  $n$  阶模态的模式阻尼比由下式计算:

$$\zeta_n = \frac{\text{Im}(\omega_n)}{|\omega_n|} = \frac{\text{Im}(\beta_n)}{|\beta_n|} \approx \frac{\text{Im}(\Delta\beta_n)}{|\beta_n^0|} \quad (12)$$

式中  $\Delta\beta_n = \beta_n - \beta_n^0$ 。

## 2 斜拉索模态阻尼比近似解

VD 和 NS 作为两节点连接元件, 在实际应用中均应安装在斜拉索的近锚固端。因此, 假定 VD 和

NS的安装高度远小于斜拉索长度且NS和VD仅能引起耦合系统复波数的微小扰动,即:

$$x_1 \ll l, x_2 \ll l, \Delta\beta_n = \beta_n - \beta_n^0 \ll \beta_n^0 \quad (13)$$

根据上述假定,可以得到下列近似式:

$$\begin{aligned} \beta_n^0 &\simeq \frac{n\pi}{l}, \tan\beta_n l \simeq \beta_n l - \beta_n^0 l, \\ \sin\beta_n x_1 &\simeq \beta_n^0 x_1, \sin\beta_n x_2 \simeq \beta_n^0 x_2, \\ \sin\beta_n(x_2 - x_1) &\simeq \beta_n^0(x_2 - x_1), \\ \cos(\beta_n x_1) &\simeq \cos(\beta_n x_2) \simeq 1 \end{aligned} \quad (14)$$

将式(14)代入方程(9),可得:

$$\frac{\Delta\beta_n l}{\beta_n^0 l} = \frac{\bar{\kappa}_n \frac{x_2^2}{x_1^2} + i\bar{c}_n \left[ 1 + \bar{\kappa}_n \frac{x_2}{x_1} \left( \frac{x_2 - 1}{x_1} \right) \right]}{1 + \bar{\kappa}_n \frac{x_2}{x_1} + i\bar{c}_n \left[ 1 + \bar{\kappa}_n \left( \frac{x_2 - 1}{x_1} \right) \right]} \frac{x_1}{l} \quad (15)$$

式中  $\bar{\kappa}_n = \kappa\beta_n x_1 = k_{ns} x_1 / T$ ,  $\bar{c}_n = \eta\beta_n x_1 = c\omega_n x_1 / T$ 。

将式(15)代入式(12),斜拉索第 $n$ 阶模态的附加模态阻尼比可表示为:

$$\zeta_n = \frac{\bar{c}_n}{\left( 1 + \bar{\kappa}_n \frac{x_2}{x_1} \right)^2 + \bar{c}_n^2 \left[ 1 + \bar{\kappa}_n \left( \frac{x_2 - 1}{x_1} \right) \right]^2} \frac{x_1}{l} \quad (16)$$

VD的最优阻尼系数 $c_n^{\text{opt}}$ 可由下式计算:

$$\frac{\partial \zeta_n}{\partial c} = \frac{\partial \zeta_n}{\partial \bar{c}_n} \cdot \frac{\partial \bar{c}_n}{\partial c} = 0 \quad (17)$$

将式(16)代入式(17),可得:

$$c_n^{\text{opt}} = \frac{\left( 1 + \bar{\kappa}_n \frac{x_2}{x_1} \right) T}{\left[ 1 + \bar{\kappa}_n \left( \frac{x_2 - 1}{x_1} \right) \right] \omega_n x_1} \quad (18)$$

将式(18)代入式(16),斜拉索第 $n$ 阶模态的最优阻尼比可由下式计算:

$$\zeta_n^{\text{opt}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left( 1 + \bar{\kappa}_n \frac{x_2}{x_1} \right) \left[ 1 + \bar{\kappa}_n \left( \frac{x_2 - 1}{x_1} \right) \right]} \frac{x_1}{l} \quad (19)$$

为避免NS负刚度系数过大引起斜拉索-VD-NS耦合系统的稳定性问题,NS的无量纲负刚度系数应满足<sup>[13]</sup>:

$$\frac{\bar{\kappa}_n x_2}{x_1} > -1 \quad (20)$$

当NS的安装高度 $x_2 = 0.03l$ 时,图2对比了不同负刚度系数时斜拉索附加模态阻尼比的近似解和精确解。由图可知:随着负刚度系数的增大,斜拉索最优附加模态阻尼比逐渐增大,而相应的VD最优阻尼系数逐渐减小。因此,增大负刚度系数,不仅可以提升斜拉索的减振效果,而且可以进一步降低VD的设计成本。此外,当负刚度系数较小时,斜拉索附加模态阻尼比的近似解与精确解吻合良好,但

当 $\bar{\kappa}_n = -0.6$ 时,斜拉索最优附加模态阻尼比的近似解大于精确解,且VD最优阻尼系数的近似解小于精确解。这主要是由于负刚度系数较大时引起了斜拉索-VD-NS耦合系统复波数的较大扰动,近似解基本假定不再成立导致的。

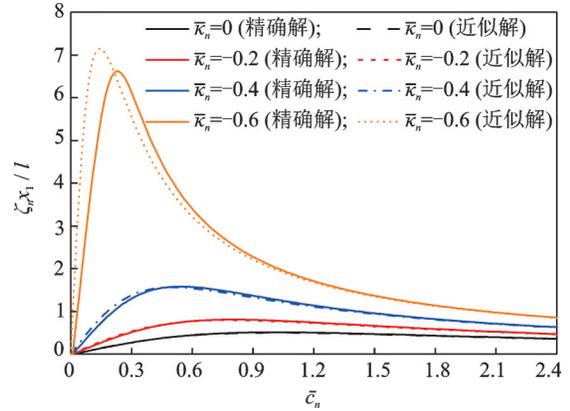


图2 不同负刚度系数时斜拉索附加模态阻尼比近似解与精确解对比( $x_1 = 0.02l$ ,  $x_2 = 0.03l$ )

Fig. 2 Comparison of the approximate solution and iterative solution of the cable modal damping ratio for several negative stiffness values ( $x_1 = 0.02l$ ,  $x_2 = 0.03l$ )

保持负刚度系数不变( $\bar{\kappa}_n = -0.3$ ),图3进一步对比了不同NS安装高度时斜拉索附加模态阻尼比的近似解和精确解。由图可知:随着NS安装高度的增加,斜拉索附加模态阻尼比逐渐增加,而VD的最优阻尼系数略有减小。因此,当负刚度系数不变时,可以通过增加NS的安装高度提升VD对斜拉索的减振效果。当 $\bar{\kappa}_n = -0.3$ ,  $x_2 = 0.05l$ ,斜拉索附加模态比的近似解已不能准确预估斜拉索的附加模态阻尼比和VD的最优阻尼系数。对比图2可知,当NS的安装高度较大时,较小的负刚度系数也会导致近似解产生较大的误差。

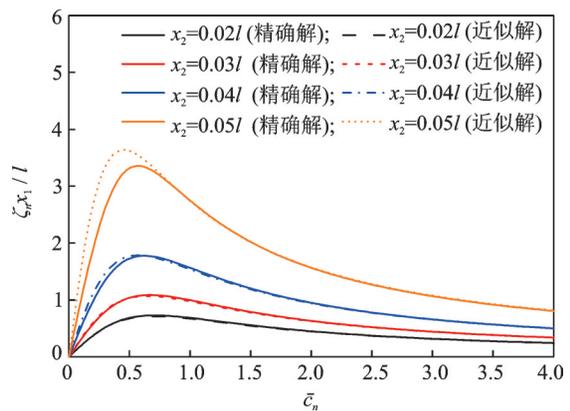


图3 不同NS安装高度斜拉索附加模态阻尼器近似解与精确解对比( $x_1 = 0.02l$ ,  $\bar{\kappa}_n = -0.3$ )

Fig. 3 Comparison of the approximate solution and iterative solution of the cable modal damping ratio for several NS locations ( $x_1 = 0.02l$ ,  $\bar{\kappa}_n = -0.3$ )

### 3 NS对耦合系统动力特性影响

当NS安装位置 $x_2 = 0.03l$ 时,随着阻尼系数的增加,不同负刚度系数时斜拉索附加模态阻尼比与振动频率的关系曲线如图4所示。由图可知:当阻尼系数从0增加到无穷大时,斜拉索的振动频率从无阻尼频率增加至嵌固频率;斜拉索的附加模态阻尼比先从0增大到最优值,然后又从最优值减小到0;随着NS负刚度系数的增大,斜拉索的最优附加模态阻尼比逐渐增大,无阻尼频率和嵌固频率均逐渐减小,相比于斜拉索无阻尼频率,负刚度对嵌固频率的影响较小。

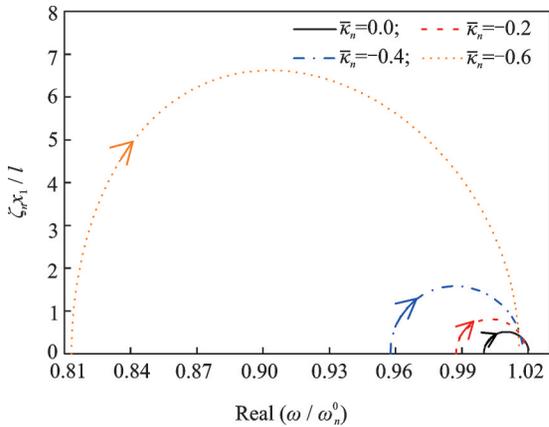


图4 不同负刚度系数时斜拉索振动频率-阻尼比关系曲线 ( $x_1 = 0.02l, x_2 = 0.03l$ )

Fig. 4 Frequency-damping curves of the cable for several negative stiffness values ( $x_1 = 0.02l, x_2 = 0.03l$ )

为了解释上述结论,图5进一步给出了不同阻尼系数时耦合系统的分析模型,当阻尼系数由0增加至无穷大时,耦合系统分析模型从图5(a)演变为图5(b),继而演变为图5(c)。由于负刚度的影响,图5(a)和图5(c)中斜拉索的振动频率会随着负刚

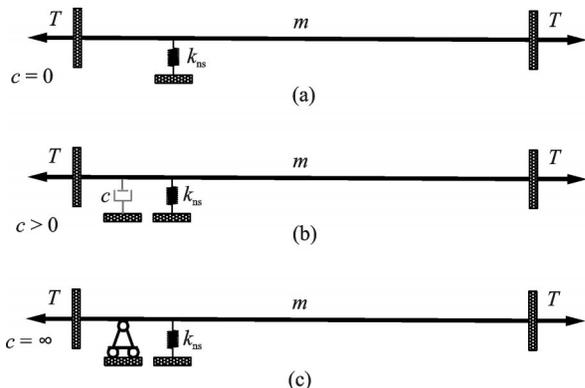


图5 不同阻尼系数时斜拉索-VD-NS耦合系统分析模型  
Fig. 5 The analytical model of the cable-VD-NS system for different damping coefficient values

度的增大而逐渐较小;由于图5(c)中VD发生嵌固,NS在拉索中的相对安装高度减小,因此负刚度对斜拉索嵌固频率的影响小于无阻尼频率。

当 $\bar{k}_n = -0.3$ 时,随着阻尼系数的增加,不同NS安装高度时斜拉索附加模态阻尼比与振动频率的关系曲线如图6所示。由图可知:随着NS安装高度的增加,斜拉索最优附加模态阻尼比逐渐增加,斜拉索无阻尼频率和嵌固频率逐渐减小,相比于斜拉索无阻尼频率,NS安装高度对嵌固频率的影响较小,这主要是由于VD嵌固时,NS在拉索中的相对安装高度小于无阻尼时的安装高度。

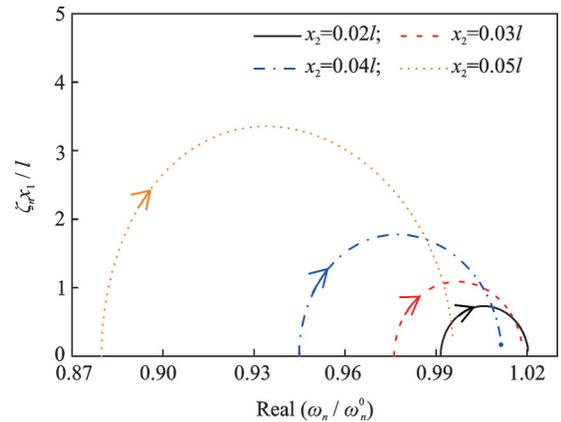


图6 不同NS安装高度时斜拉索振动频率-阻尼比关系曲线 ( $x_1 = 0.02l, \bar{k}_n = -0.3$ )

Fig. 6 Frequency-damping curves of the cable for several NS locations ( $x_1 = 0.02l, \bar{k}_n = -0.3$ )

### 4 NS对斜拉索多阶模态减振性能提升研究

#### 4.1 参数设计方法

为研究NS的负刚度系数和安装高度对斜拉索多阶模态的减振效果,基于输出反馈的LQR控制获得了给定负刚度系数下VD的最优阻尼系数,该方法以系统的输出变量作为反馈律,基于LQR控制理论优化阻尼器的设计参数,具体实施过程如下:

采用有限差分法,斜拉索-VD-NS耦合系统运动方程的矩阵形式可以表示为<sup>[21]</sup>:

$$M\ddot{u} + K_{ns}u = f - \gamma f_1(t) \tag{21}$$

式中  $M$ 表示斜拉索的质量矩阵; $K_{ns}$ 表示考虑NS影响的斜拉索刚度矩阵; $u, f, \gamma$ 分别表示斜拉索位移向量、外荷载向量和VD位置向量:

$$M = maI_n, K = \frac{T}{a} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} + \gamma_{ns} k_{ns} \gamma_{ns}^T \tag{22}$$

式中  $I_n$  表示  $n$ -维单位矩阵;  $a = l/(n+1)$  表示离散后斜拉索的单元长度;  $\gamma_{ns}$  表示 NS 的位置向量;  $\gamma$  和  $\gamma_{ns}$  中的元素与 VD 和 NS 安装高度有关,若 VD 和 NS 分别安装于拉索第  $j, k$  个节点,有:

$$\gamma_i = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \gamma_{ns, i} = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases} \quad (23)$$

仅采用 VD 安装位置处斜拉索速度作为反馈变量,式(21)可以表示为如下的状态空间形式:

$$\dot{Z}_m = A_m Z_m + B_i f - G_m c H_c Z_m \quad (24)$$

式中

$$Z_m = \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \end{bmatrix}, A_m = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K_{ns} & 0 \end{bmatrix}, \\ B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix}, G_m = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}\gamma \end{bmatrix}, H_c = [0 \quad \gamma^T] \quad (25)$$

为了抑制斜拉索前  $k$  模态的振动,参照文献[21],VD 控制的性能指标为:

$$J = E \left[ \int_0^{\infty} Z_m^T Q Z_m + R F_{VD}^2 dt \right] = \\ E \left[ \int_0^{\infty} Z_m^T (Q + H_c^T R c^2 H_c) Z_m dt \right] = \\ \text{trace}(V_{k+1}^T P V_{k+1}) \quad (26)$$

式中  $E[\ ]$  表示数学期望;  $Q$  和  $R$  分别表示状态向量的权矩阵和 VD 控制力的权因子;  $V_{k+1}$  为特征向量矩阵  $V$  的子矩阵,由其前  $(k+1)$  列组成;矩阵  $P$  由下式计算<sup>[22]</sup>:

$$(A_m - G_m c H_c)^T P + P(A_m - G_m c H_c) + \\ H_c^T R c^2 H_c + Q = 0 \quad (27)$$

式(26), (27)表明,VD 的阻尼系数和性能指标与状态向量的权矩阵  $Q$  和 VD 控制力的权因子  $R$  有关,本文中矩阵  $Q$  取为:

$$Q = \begin{bmatrix} \bar{K} \\ \bar{M} \end{bmatrix} \quad (28)$$

式中  $\bar{K} = \text{diag}(V^T K V)$ ,  $\bar{M} = \text{diag}(V^T M_d V)$ 。

在此基础上,通过给定控制力权因子  $R$  的大小,优化控制的性能指标即可获得相应的 VD 阻尼系数。研究表明<sup>[21]</sup>:随着控制力的权因子  $R$  下降,性能指标也逐渐下降,而 VD 的最优阻尼系数逐渐增加;当控制力权因子下降至一定值时,性能指标和阻尼系数随着控制力权因子下降基本趋于稳定。为了平衡 VD 的控制性能和设计成本,本文中  $R$  满足:

$$[J(R) - J(0.01R)]/J(R) < \epsilon' \quad (29)$$

式中  $\epsilon'$  为给定的阈值范围,本文取为 0.01。

选定控制力权因子  $R$  后,再次优化控制性能指标即可获得给定负刚度系数下 VD 的最优阻尼系数。

## 4.2 优化设计参数

以苏通长江大桥的 A12 号斜拉索(具体位置如图 7 所示,相关参数如表 1 所示)为例研究了负刚度对斜拉索多阶模态减振效果的增效作用。设计时 VD 的安装高度为距离斜拉索下锚固端 2% 的斜拉索长度,为抑制斜拉索的风雨振,考虑了斜拉索的前 6 阶振动模态。

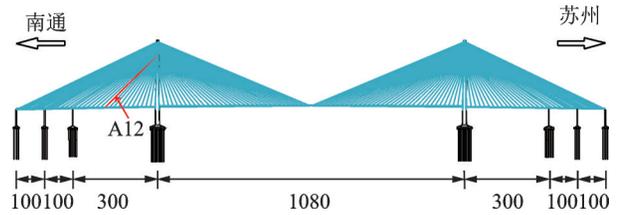


图 7 A12 号斜拉索的位置(单位:m)

Fig. 7 The location of the No. A12 cable (Unit:m)

表 1 A12 号斜拉索的主要参数  
Tab. 1 No. A12 cable in the Sutong Bridge

参数	数值
斜拉索长度 $l/m$	253.34
每延米质量 $m/(kg \cdot m^{-1})$	62.09
张力 $T/kN$	4227

当 NS 安装高度不同时,VD 的性能指标和阻尼系数随无量纲负刚度系数的变化关系如图 8 所示。表 2 列出了不同 NS 安装高度和负刚度系数时 VD 的阻尼系数设计值。

表 2 VD 阻尼系数设计值(单位:  $N \cdot s/m$ )

Tab. 2 The design damping coefficients of the VD (Unit:  $N \cdot s/m$ )

负刚度系数 $\bar{\kappa}_n$	NS 安装高度 $(x_2/l)$			
	0.02	0.03	0.04	0.05
0	121891	121891	121891	121891
-0.2	98376	97249	96193	94271
-0.3	86857	82684	78721	76868
-0.4	74977	66968	61427	—
-0.6	51311	36097	—	—

由图 8(a)可知:随着 NS 的负刚度或安装高度的增大,VD 的性能指标逐渐减小,表明增大 NS 的负刚度系数或安装高度均可提升 VD 对斜拉索多阶模态的减振效果。结合图 8(b)和表 2 可知,增大负刚度系数会显著降低斜拉索多阶模态减振控制所需的阻尼系数,而增加 NS 安装高度也会导致 VD 的阻尼系数略有降低。因此,增大 NS 的负刚度系数或安

装高度不仅有利于提升斜拉索的多阶模态减振效果,而且节约VD对斜拉索多阶模态振动控制的设计成本。

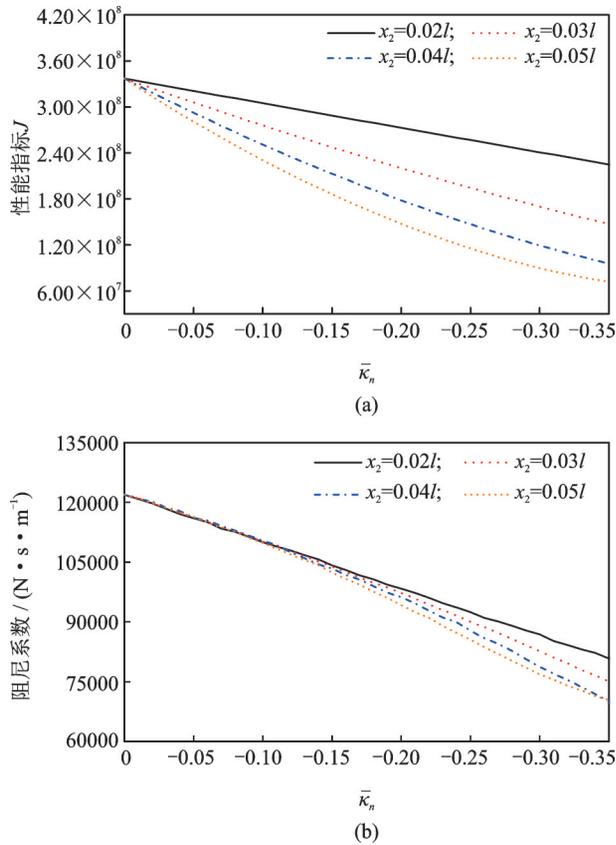


图 8 VD 的性能指标和阻尼系数随负刚度系数变化关系  
Fig. 8 The variation of performance index and damping coefficient of the VD with the negative stiffness coefficient

### 4.3 减振效果评估

根据表 2 的黏滞阻尼器设计参数,图 9 对比了  $x_2 = 0.03l$  时不同负刚度系数时斜拉索前 6 阶模态附加模态阻尼比。由图 9 可知:当 NS 安装高度不变

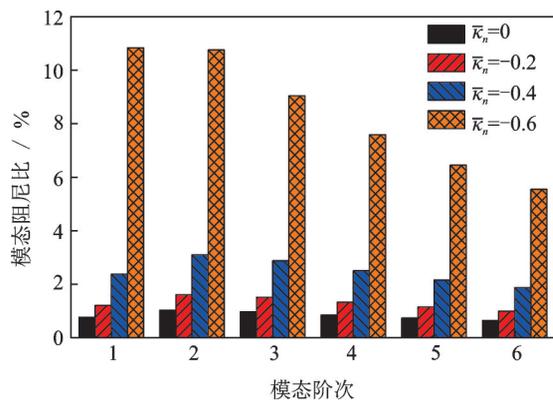


图 9 不同负刚度系数时斜拉索前 6 阶模态阻尼比对比 ( $x_1 = 0.02l, x_2 = 0.03l$ )  
Fig. 9 Comparison of the cable modal damping ratios in the first six cable modes for several negative stiffness values ( $x_1 = 0.02l, x_2 = 0.03l$ )

时,斜拉索前 6 阶模态的附加模态阻尼比均随着 NS 的负刚度系数的增大而增大,表明 NS 安装高度不变时,增大 NS 的负刚度系数可以实现 VD 对斜拉索多阶模态减振效果的显著提升。

图 10 进一步对比了  $\bar{\kappa}_n = -0.3$  时不同 NS 安装高度时对应的斜拉索前 6 阶模态附加模态阻尼比,可见,在 NS 负刚度系数不变时,增加 NS 的安装高度也能显著提升 VD 对斜拉索多阶模态的减振效果。

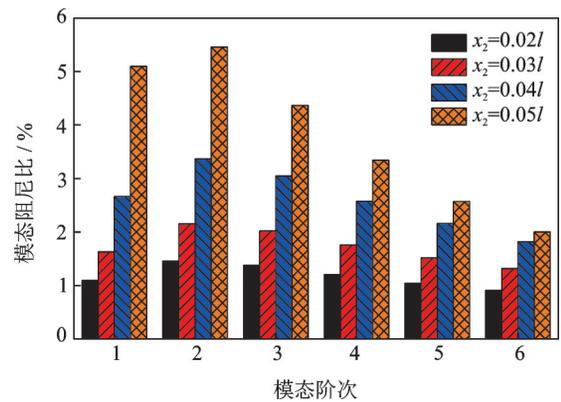


图 10 不同 NS 安装高度时斜拉索前 6 阶模态阻尼比对比 ( $x_1 = 0.02l, \bar{\kappa}_n = -0.3$ )  
Fig. 10 Comparison of the cable modal damping ratios in the first six cable modes for several NS locations ( $x_1 = 0.02l, \bar{\kappa}_n = -0.3$ )

图 11 和 12 分别为不同负刚度系数和不同 NS 安装高度时斜拉索在高斯白噪声输入下的位移时程曲线。图 13 和 14 进一步给出了斜拉索不同位置的位移均方根值。

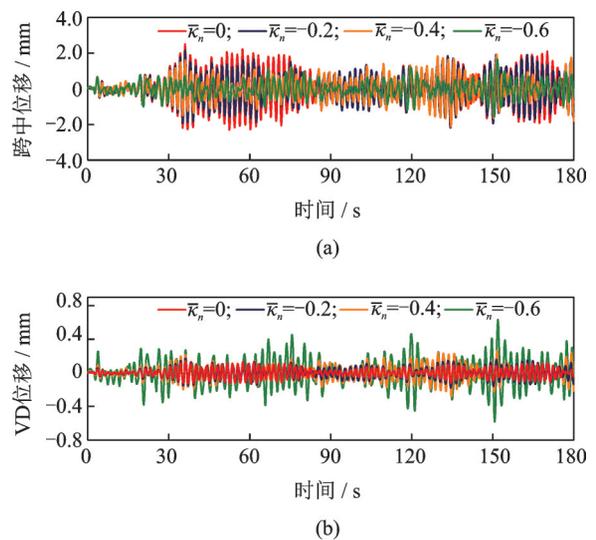


图 11 不同负刚度系数时斜拉索跨中位置和 VD 安装高度时的位移时程曲线 ( $x_1 = 0.02l, x_2 = 0.03l$ )  
Fig. 11 Time history of cable displacement at the mid-span and the VD location for several negative stiffness values ( $x_1 = 0.02l, x_2 = 0.03l$ )

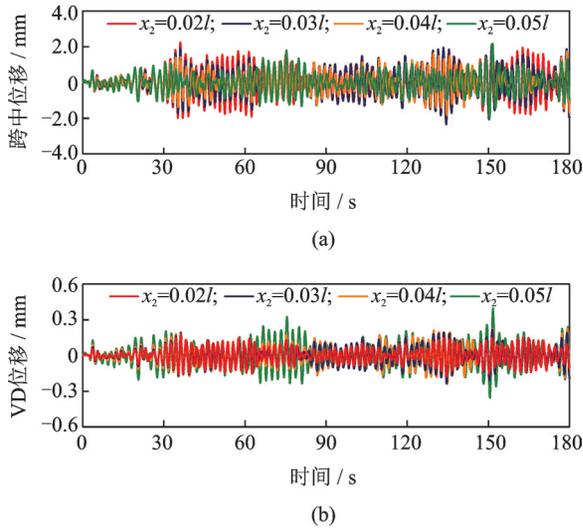


图 12 不同 NS 安装高度时斜拉索跨中位置和 VD 安装高度时的位移时程曲线 ( $x_1 = 0.02l, \bar{\kappa}_n = -0.3$ )

Fig. 12 Time history of cable displacement at the mid-span and the VD location for several NS locations ( $x_1 = 0.02l, \bar{\kappa}_n = -0.3$ )

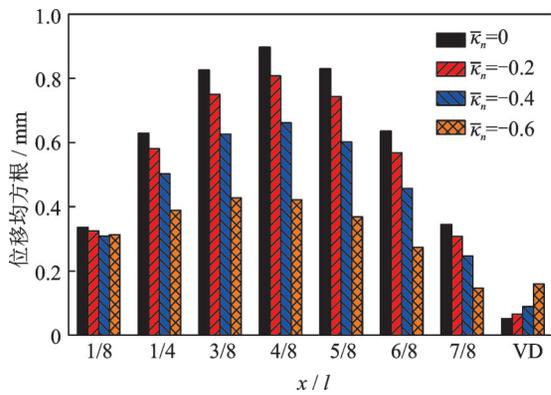


图 13 不同负刚度系数时斜拉索的位移均方根 ( $x_1 = 0.02l, x_2 = 0.03l$ )

Fig. 13 The displacement RMS of the cable for several negative stiffness values ( $x_1 = 0.02l, x_2 = 0.03l$ )

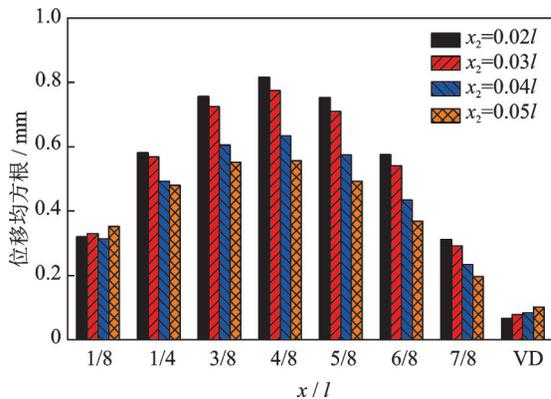


图 14 不同 NS 安装高度时斜拉索的位移均方根 ( $x_1 = 0.02l, \bar{\kappa}_n = -0.3$ )

Fig. 14 The displacement RMS of the cable for several NS locations ( $x_1 = 0.02l, \bar{\kappa}_n = -0.3$ )

由图 11~14 可知:增大 NS 的负刚度系数或安装高度均会降低斜拉索的位移响应幅值和位移均

方根值,但增大了 VD 安装高度处的位移幅值和位移均方根值。增大 VD 的位移有利于提升 VD 的耗能能力<sup>[17]</sup>。因此,NS 对 VD 减振性能的提升作用归功于 NS 的负刚度系数或安装高度的增大对 VD 位移的放大效应,实现了 VD 的耗能增效。

## 5 结 论

(1) 当 NS 和 VD 安装高度不同时,增大负刚度系数或 NS 安装高度均会降低斜拉索的无阻尼频率和嵌固频率,相比于斜拉索的嵌固频率,NS 的负刚度系数和安装高度对斜拉索无阻尼频率的降低效应更明显。

(2) 相比于 NS 和 VD 安装高度相同的负刚度阻尼器,NS 安装高度高于 VD 时对斜拉索减振性能更优;增大 NS 的负刚度系数或安装高度不仅能提升 VD 对斜拉索单阶模态和多阶模态的减振效果,而且降低了 VD 所需的最优阻尼系数。

(3) 随着负刚度系数和 NS 安装高度的增大,斜拉索的动力响应逐渐减小,而 VD 的位移逐渐增大;NS 对 VD 减振性能的提升作用归功于 NS 的负刚度系数或安装高度的增大对 VD 位移的放大效应,实现了 VD 的耗能增效。

## 参考文献:

[1] 刘庆宽,郑云飞,刘小兵,等.斜拉桥斜拉索的风荷载、风致振动与控制[J].工程力学,2015,32(9):1-8.  
Liu Qing-kuan, Zheng Yunfei, Liu Xiaobing, et al. Wind load, wind induced vibrations and control of cables of cable-stayed bridges [J]. Engineering Mechanics, 2015, 32(9): 1-8.

[2] 顾明,杜晓庆,李寿英.斜拉桥拉索风雨激振的实验和理论研究[J].振动工程学报,2007,20(5):473-479.  
Gu Ming, Du Xiaoqing, Li Shouying. Study on rain-wind induced vibration of 3 DOF continuous cables in cable-stayed bridges[J]. Journal of Vibration Engineering, 2007, 20(5): 473-479.

[3] 王剑,毕继红,关键,等.风雨激振中斜拉索表面水线运动的三维数值模拟[J].振动工程学报,2020,33(3):559-569.  
Wang Jian, Bi Ji-hong, Guan Jian, et al. Three-dimensional numerical simulation on rivulet movement of wind-rain-induced vibration of stay cables[J]. Journal of Vibration Engineering, 2020, 33(3): 559-569.

- [4] Krenk S. Vibrations of a taut cable with an external damper[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2000, 67(4): 772-776.
- [5] 段元锋, 李频, 周仙通, 等. 斜拉索外置式黏滞阻尼器实用设计方法[J]. *中国公路学报*, 2015, 28(11): 46-51.  
Duan Yuanfeng, Li Pin, Zhou Xiantong, et al. Practical design method for external viscous dampers of stay cables[J]. *China Journal of Highway and Transport*, 2015, 28(11): 46-51.
- [6] 周强, 王震, 姜文. 抗弯刚度对线性黏滞阻尼器拉索力学性能影响[J]. *土木工程学报*, 2015, 48(6): 73-80.  
Zhou Qiang, Wang Zhen, Jiang Wen. Influence of bending stiffness on mechanical property of cables equipped with linear viscous dampers[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2015, 48(6): 73-80.
- [7] 汪峰, 彭章, 刘章军. 设置黏滞阻尼器的斜拉索参数振动模型及控制分析[J]. *振动工程学报*, 2019, 32(6): 977-985.  
Wang Feng, Peng Zhang, Liu Zhangjun. Parametric vibration model and control analysis of cable stayed dampers with viscous dampers[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2019, 32(6): 977-985.
- [8] 王修勇, 陈政清, 倪一清, 等. 斜拉桥拉索磁流变阻尼器减振技术研究[J]. *中国公路学报*, 2003, 16(2): 52-56.  
Wang Xiuyong, Chen Zhengqing, Ni Yiqing, et al. Study of mitigating cables vibration on the cable-stayed bridges using magnetorheological (MR) dampers[J]. *China Journal of Highway and Transport*, 2003, 16(2): 52-56.
- [9] 禹见达, 陈政清, 曹宏, 等. 永磁调节式MR阻尼器试验研究及工程应用[J]. *振动工程学报*, 2006, 19(4): 532-536.  
Yu Jianda, Chen Zhengqing, Cao Hong, et al. Experimental study and implementation of the adjustable permanent magnet MR damper[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2006, 19(4): 532-536.
- [10] Li H, Liu M, Ou J P, Negative stiffness characteristics of active and semi-active control systems for stay cables[J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2008, 15(2): 120-142.
- [11] Chen L, Sun L M, Nagarajaiah S. Cable with discrete negative stiffness device and viscous damper: passive realization and general characteristics[J]. *Smart Structures and Systems*, 2015, 15(3): 627-643.
- [12] Zhou P, Li H. Modeling and control performance of a negative stiffness damper for suppressing stay cable vibrations[J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2016, 23(4): 764-782.
- [13] Shi X, Zhu S Y, Spencer B F. Experimental study on passive negative stiffness damper for cable vibration mitigation[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2017, 143(9): 04017070.
- [14] Shi X, Zhu S Y. Nonlinear impact of negative stiffness dampers on stay cables[J]. *Structural Monitoring and Maintenance*, 2018, 5(1): 15-38.
- [15] Lu L, Duan Y F, Spencer B F, et al. Inertial mass damper for mitigating cable vibration[J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2017, 24(10): e1986.
- [16] Li Y M, Shen W A, Zhu H P. Vibration mitigation of stay cables using electromagnetic inertial mass dampers: full-scale experiment and analysis[J]. *Engineering Structures*, 2019, 200: 109693.
- [17] 汪志昊, 郜辉, 许艳伟, 等. 惯性质量对斜拉索阻尼器减振增效作用试验研究[J]. *振动工程学报*, 2019, 32(3): 377-385.  
Wang Zhihao, Gao Hui, Xu Yanwei. Experimental study on the improvement effect of inertial mass on vibration control performance of stay cables with dampers[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2019, 32(3): 377-385.
- [18] 李寿英, 李振宇, 陈政清. 黏滞惯性质量阻尼器对斜拉索减振效果的数值分析[J]. *中国公路学报*, 2019, 32(10): 230-236.  
Li Shouying, Li Zhenyu, Chen Zhengqing, et al. Numerical analysis on the effectiveness of viscous inertial mass dampers on stay cables of cable-stayed bridges[J]. *China Journal of Highway and Transport*, 2019, 32(10): 230-236.
- [19] Majd J, Cheng S H, Faouzi G. Multimode vibration control of stay cables using optimized negative stiffness damper[J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2020, 27(4): e2503.
- [20] Zhou H J, Huang X G, Xiang N, et al. Free vibration of a taut cable with a damper and a concentrated mass[J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2018, 25(11): e2251.
- [21] Gao H, Wang H, Li J, et al. Optimum design of viscous inerter damper targeting multi-mode vibration mitigation of stay cables[J]. *Engineering Structures*, 2021, 226: 111375.
- [22] Agrawal A K, Yang J N. Design of passive energy dissipation systems based on LQR control methods[J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1999, 10(12): 933-944.

## Performance enhancement of the viscous damper combined with the negative stiffness device for cable vibration control

GAO Hui<sup>1</sup>, WANG Hao<sup>1</sup>, WANG Zhi-hao<sup>2</sup>, ZHANG Han<sup>1</sup>, NI You-hao<sup>1</sup>

(1.Key Laboratory of Concrete and Prestressed Concrete Structures of Ministry of Education, Southeast University, Nanjing 211189, China; 2.International Joint Research Lab for Eco-building Materials and Engineering of Henan Province, North China University of Water Resources and Electric Power, Zhengzhou 450045, China)

**Abstract:** The negative stiffness behavior of a damper can improve its performance for cable vibration control. To explore the performance enhancement effect of the negative stiffness (NS) device on the viscous damper (VD) in mitigating cable vibrations, the combined effect of the VD and NS for cable vibration control is investigated. The characteristic equation of the cable-VD-NS system is established based on the complex modal method. On the basis, the asymptotic solution of the cable modal damping ratio is derived. The effect of the NS coefficient and the NS location on the modal damping ratio and vibration frequency of the cable is evaluated. Based on the constrained static output LQR method, the design parameters of the VD for a given NS coefficient for suppression cable multi-mode vibrations are obtained. Furthermore, the effect of the NS coefficient and the NS location on the VD performance in mitigating cable multi-mode vibrations is investigated. The results show that increasing the NS coefficient or the NS location can improve the control performance of the VD and reduce the optimal damping coefficient of the VD, including the single-mode and multi-mode vibrations of the cable. The performance enhancement of the NS on the VD is mainly attributed to the increment of the NS coefficient or the NS location can amplify the displacement of the VD, which can improve the energy dissipation capacity of the VD.

**Key words:** viscous damper; stay cable; multi-mode vibration control; negative stiffness; vibration mitigation performance enhancement

**作者简介:** 部 辉(1993—),男,博士研究生。电话:13164397792; E-mail: hgao1993@seu.edu.cn。

**通讯作者:** 王 浩(1980—),男,教授。电话:13739196535; E-mail: wanghao1980@seu.edu.cn。