高阶调谐齿轮参数设计及动态响应研究

张佳雄，魏 静，张春鹏，侯少帅

（重庆大学机械传动国家重点实验室，重庆 400044）

摘要： 提出一种高阶调谐齿轮传动原理，定义了调谐齿轮的错时相位角。基于动态啮合力开展高阶调谐齿轮参数设计研究，推导出调谐齿轮最佳传动参数，验证调谐齿轮错时相位角、调谐阶数对动态响应的影响；结合具体案例，进行高阶调谐齿轮的动力学数值模拟，研究高阶调谐齿轮传动参数对系统动态啮合力以及振动响应的影响。研究结果表明，当调谐阶数为2（二阶调谐齿轮）、错时相位角为1/2个齿距时，调谐齿轮时变啮合刚度和接触力波动最小，振动位移以及振动加速度波动最小，从理论上验证了二阶调谐齿轮具有明显的减振作用。

关键词： 高阶调谐齿轮；振动响应；相位调谐；接触力波动

中图分类号： TH132.41；TH122 **文献标志码：** A **文章编号：** 1004-4523(2022)02-0369-10

DOI：10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2022.02.012

引 言

齿轮传动是目前在机床、汽车、飞机、舰船和许多机械装备中运用范围最广的机械传动，但齿轮啮合冲击直接影响着齿轮传动的可靠性和运转平稳性，而啮合刚度波动是产生啮合冲击的根源，减小齿轮啮合刚度波动，以此来改善齿轮啮合冲击以及减小传动系统振动具有重要的意义。

研究表明，啮合相位是研究齿轮传动性能的一个重要参数[1-3]。早在1967年，Schlegel等就发现并研究了行星轮系相位调谐现象，并且利用相位调谐使传动噪声降低了11 dB；Ambarisha等[1]研究了啮合相位对行星模态响应的影响，推导了相位调谐理论，并得出了通过啮合相位可以抑制行星齿轮动力学中的行星模态响应；王世宇等[2-3]建立了直齿行星系统的弯扭耦合动力学模型，研究了相位调谐因子与构件运动特性之间的关系，并通过优化行星啮合相位来预测和抑制齿圈齿轮的某些谐波共振；张霖霖等[4]研究了啮合相位对人字齿行星齿轮系统均载的影响；史志伟[5]建立了一种计算不同行星轮啮合相位的计算方法；尤明明等[6]通过调节相位使得某NGW型高速行星齿轮箱振动偏大的问题得以有效解决；沈稼耕[7]从固有频率变化周期、重根性、振型特性等方面分析了啮合相位对模态的影响；戴麟等[8-9]通过实验对比，证明相位调谐方法降噪的可行性；谢帮等[10]采用解析方法研究了啮合相位对振动特性的影响。Peng等[11-12]提出了利用行星相位来诊断故障行星的方法；徐长航等[13]通过调节自升式海洋平台齿轮齿条升降机构小齿轮之间相位差的方式实现错齿啮合，从而达到提高机构承载能力和动力性能的目的；此外，也有学者对人字齿左右两边交错角做了相关研究，Mo等[14]采用集总参数法建立了人字型行星齿轮传动系统的动力学模型，并发现了交错角对载荷分担系数有明显影响，而对最大啮合力影响不大；Kang等[15]通过实验发现了人字齿从右到左的交错角是最关键的动态冲击响应参数。

由直齿轮演变出各种承载能力更强、传动性能更好的齿轮，如斜齿轮、螺旋齿轮、人字齿轮等。但也存在一些缺陷，如人字齿增加了成本，斜齿轮产生了轴向力等；目前，关于行星轮系相位调谐的研究已经相对成熟。本文基于相位调谐思想，提出高阶调谐齿轮传动原理，并对高阶调谐齿轮传动参数设计开展研究；基于动态啮合力进行高阶调谐齿轮参数设计，并求解调谐齿轮的动态响应，验证调谐齿轮传动原理的正确性。

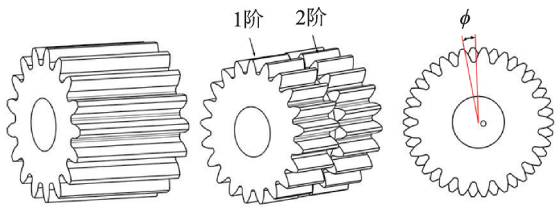
1 高阶调谐齿轮传动原理

1.1 调谐齿轮与错时相位角

一对传统的直齿轮啮合，不存在啮合相位差的说法。但对直齿轮做图1所示的改变，就可使得单对齿轮啮合也存在啮合相位差，且这种改变不影响

收稿日期： 2020-08-11；**修订日期：** 2020-12-07

基金项目： 国家自然科学基金资助项目（51775058）；2016年民机专项项目（MJ-2016-D-28）；中央高校科研业务费专项项目（2020CDCGJX030）；国家重点研发计划（2018YFB2001602）。



(a) 直齿轮

(a) Spur gear

(b) 二阶调谐齿轮

(b) Second-order tuning gear

图 1　二阶调谐齿轮定义

Fig. 1　Definition of second-order tuning gear

齿轮传动比，把这种可以通过调节啮合相位差改变传动性能的新型齿轮定义为调谐齿轮。

图 1(b)展示的改进后的齿轮为二阶调谐齿轮，即把渐开线圆柱直齿轮沿轮齿方向从中部分成两段(两阶)，一阶轮齿不动，另一阶轮齿绕轴心旋转一个角度 ϕ，得到一个新的齿轮，使其啮合时左右两阶产生啮合相位差，通过调节 ϕ，改变啮合相位差，从而改变传动性能。

图 1 中，定义角度 ϕ 为错时相位角。错时相位角可这样理解，第一阶齿轮啮合比第二阶齿轮啮合提前转动一段时间 Δt，转过角度 ϕ 时，这导致两阶齿轮产生一个啮合相位差 $\Delta\Psi$，所以定义 ϕ 为错时相位角。

由于齿轮啮合每转过一个齿距角 $2\pi/z$ 即完成一个完整的啮合周期，所以在此过程中第一阶啮合比第二阶啮合多完成了 $\phi/(2\pi/z)$ 个啮合过程。对于以啮频为基频的刚度函数而言，每个啮合过程意味着刚度函数经过一个周期，相位变化为 2π，设 Φ_i 为啮合相位，则在一个啮合周期内，错时相位角与啮合相位的关系为：

$$\Phi_i = \phi_i z \tag{1}$$

1.2　高阶调谐齿轮

把齿轮沿齿向分成两阶，构成二阶调谐齿轮。相应地，把齿轮分成 n 阶，就组成了 n 阶调谐齿轮，假设每两阶之间的错时相位角 ϕ 均为 $1/n$ 个齿距角，则形成 n 阶调谐齿轮，如图 2 所示。

如图 2 所示，把直齿轮分成 n 段，一个齿距角分成 n 份，若 n 无穷大，且第 n 段比 $n-1$ 段绕轴心超前转了 $1/n$ 个齿距，则调谐齿轮演变成斜齿轮，此时引入轴向力。若 n 为有限份，且顺序依次颠倒，奇数阶超前，偶数阶滞后，则调谐齿轮不会引入轴向力。若顺序不颠倒，且总齿宽一定，当 n 无限大时，调谐齿轮演变成斜齿轮，会引入轴向力。本文研究对象 n 为有限大的自然数。

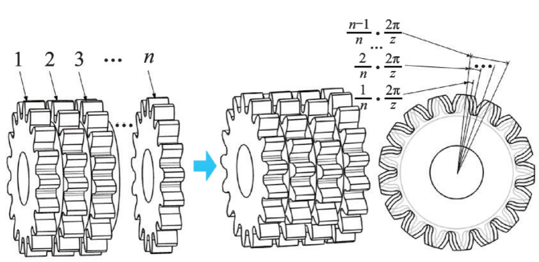


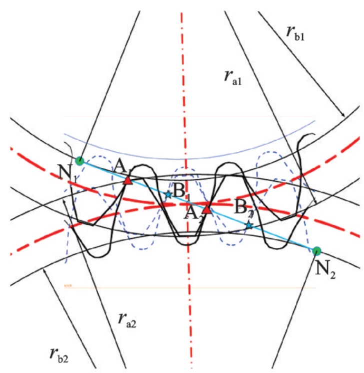
图 2　n 阶调谐齿轮示意图

Fig. 2　Schematic diagram of n-order tuning gear

1.3　调谐齿轮多齿对交替啮合原理

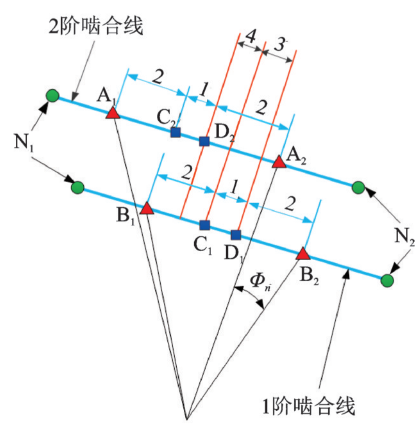
传统渐开线圆柱直齿轮单双齿交替啮合，单齿啮合区，轮齿承受较大载荷，由双齿到单齿转变的瞬间，会产生较大啮合冲击，严重影响传动的平稳性以及齿轮使用寿命。调谐齿轮的初衷是让不同时刻啮合齿轮副数目波动较小，且同一时刻啮合齿轮副数目增多，以此来改善直齿轮传动性能和受载能力。

基于渐开线圆柱直齿轮单双齿啮合交替啮合原理，图 3 给出了二阶调谐齿轮三-四齿交替啮合的原理，图 3 中，1，2，3，4 分别代表单齿、双齿、三齿、四齿啮合区，对于高阶调谐齿轮，把各阶齿轮合成一个整体，可以调节各阶之间错时相位角 ϕ，得到不同数目齿对交替啮合的调谐齿轮。图中 r_{ai} 和 r_{bi} 分别表示齿顶半径和基圆半径。



(a) 啮合原理

(a) Principle of meshing



(b) 简化示意图

(b) Simplified diagram

图 3　调谐齿轮三-四齿交替啮合原理图

Fig. 3　Schematic diagram of three-four-tooth alternate meshing of tuning gear

2　基于动态啮合力的高阶调谐齿轮参数设计

2.1　直齿轮啮合力计算

啮合刚度的时变波动是动态啮合力产生波动的一个根源，而啮合力是齿轮传动的一个重要响应。啮合力的波动是引入啮合冲击的一个重要因素。在不考虑误差、冲击等理想状态下，齿轮动态啮合力为一周期函数。

对于直齿轮传动，若大齿轮的齿数为 z_1，小齿轮的齿数为 z_2，小齿轮的转速为 ω，当直齿轮的压力角为 α 时，直齿轮啮合受力分析为[3-4]：

$$
\begin{aligned}
&F_0=\sum_{k=1}^{\infty}\left[a^k\sin(kz_1\omega t+\Phi_i)+b^k\cos(kz_1\omega t+\Phi_i)\right],\\
&F_{x0}=F\cos\alpha=\cos\alpha\cdot\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\left[a^k\sin(kz_1\omega t+\Phi_i)+b^k\cos(kz_1\omega t+\Phi_i)\right],\\
&F_{y0}=F\sin\alpha=\sin\alpha\cdot\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\left[a^k\sin(kz_1\omega t+\Phi_i)+b^k\cos(kz_1\omega t+\Phi_i)\right]
\end{aligned}
\tag{2}
$$

式中　Φ_i 为啮合齿轮副的初始啮合相位；a^k，b^k 为傅里叶系数；F_{x0}，F_{y0} 分别为直齿轮 x，y 方向的动态啮合力。

2.2　高阶调谐齿轮动态啮合力最优化计算

基于直齿轮动态啮合力以及 n 阶调谐齿轮时变刚度理论，对 n 阶调谐齿轮动态啮合力进行探究，n 阶调谐齿轮可以看成 n 个直齿轮并联，设第一阶齿轮初始啮合相位为 0，由 n 阶调谐齿轮定义以及式(2)可以把 n 阶啮合力表示为傅里叶级数形式：

$$
\begin{cases}
F_1=\sum_{k=1}^{\infty}[a^k\sin(kz\omega t)+\\
\quad b^k\cos(kz\omega t)]\\
F_2=\sum_{k=1}^{\infty}[a^k\sin(kz\omega t+\dfrac{2\pi}{n})+\\
\quad b^k\cos(kz\omega t+\dfrac{2\pi}{n})]\\
\quad\vdots\\
F_n=\sum_{k=1}^{\infty}[a^k\sin(kz\omega t+\dfrac{(n-1)\cdot 2\pi}{n})+\\
\quad b^k\cos(kz\omega t+\dfrac{(n-1)\cdot 2\pi}{n})]
\end{cases}
\tag{3}
$$

对调谐齿轮整体进行受力分析。如图 4 所示，坐标系 x-o-y 建于第一阶啮合轮齿的啮合点，原点 o 在切平面 1 上，y 轴指向齿轮轴心，x 轴垂直于齿轮径向，F_1 为第一阶齿轮啮合力，F_n 为第 n(n 为正整数)阶齿轮啮合力，ϕ 为错时相位角。

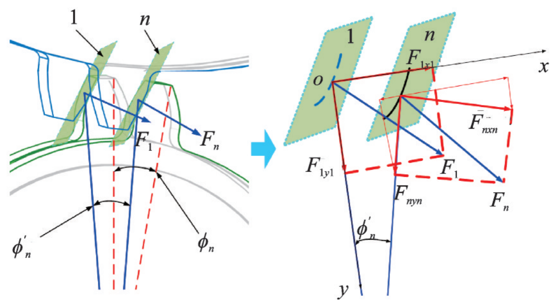


图 4　啮合力受力分析

Fig. 4　Force analysis of meshing force

在图 4 中，以 x-o-y 为绝对坐标系，平面 1 和 n 分别为第一阶和第 n 阶齿轮啮合点的切向平面，$\phi'_n=\phi_n\pm\Delta\phi$，忽略贡献较小部分可以认为 $\phi'_n=\phi_n$，则通过受力分析可得下式：

$$
\begin{aligned}
F_x&=F_{1x1}+F_{2x2}\cos\phi_2+\cdots+F_{nxn}\cos\phi_n-\\
&\quad F_{2y2}\sin\phi_2-\cdots-F_{nyn}\sin\phi_n,\\
F_y&=F_{1y1}+F_{2y2}\cos\phi_2+\cdots+F_{nyn}\cos\phi_n+\\
&\quad F_{2x2}\sin\phi_2+\cdots+F_{nxn}\sin\phi_n
\end{aligned}
\tag{4}
$$

式中　F_{nxn} 为第 n 阶调谐齿轮的 x 方向分量，F_{nyn} 为第 n 阶调谐齿轮的 y 方向分量，ϕ_n 为第 n 阶齿轮的错时相位角：

$$
\phi_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{2\pi}{z}
\tag{5}
$$

把式(5)代入式(4)可得调谐齿轮的动态啮合力为：

$$
\begin{cases}
F_x=F_{1x1}+F_{2x2}\cos(\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2\pi}{z})+\cdots+\\
F_{nxn}\cos(\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{2\pi}{z})-F_{2y2}\sin(\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2\pi}{z})-\cdots-\\
F_{nyn}\sin\phi_n\\
F_y=F_{1y1}+F_{2y2}\cos(\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2\pi}{z})+\cdots+\\
F_{nyn}\cos(\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{2\pi}{z})+F_{2x2}\sin(\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2\pi}{z})+\cdots+\\
F_{nxn}\sin(\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{2\pi}{z})
\end{cases}
\tag{6}
$$

把式(3)代入式(6)并整理可得：

$$
\begin{cases}
F_x=\cos\alpha\sum_{k=1}^{\infty}[Q_1\sin(kz\omega t)+R_1\cos(kz\omega t)]-\\
\quad\sin\alpha\sum_{k=1}^{\infty}[Q_2\sin(kz\omega t)+R_2\cos(kz\omega t)]\\
F_y=\sin\alpha\sum_{k=1}^{\infty}[Q_1\sin(kz\omega t)+R_1\cos(kz\omega t)]+\\
\quad\cos\alpha\sum_{k=1}^{\infty}[Q_2\sin(kz\omega t)+R_2\cos(kz\omega t)]
\end{cases}
\tag{7}
$$

式(7)中，记：

$$
\begin{cases}
Q_1 = \sum_{j=1}^{n} \cos\frac{2\pi(j-1)}{nz}\left[a^k \cos\frac{(j-1)2\pi}{n} - b^k \sin\frac{(j-1)2\pi}{n}\right] \\
R_1 = \sum_{j=1}^{n} \cos\frac{2\pi(j-1)}{nz}\left[b^k \cos\frac{(j-1)2\pi}{n} + a^k \sin\frac{(j-1)2\pi}{n}\right] \\
Q_2 = \sum_{j=1}^{n} \sin\frac{2\pi(j-1)}{nz}\left[a^k \cos\frac{(j-1)2\pi}{n} - b^k \sin\frac{(j-1)2\pi}{n}\right] \\
R_2 = \sum_{j=1}^{n} \sin\frac{2\pi(j-1)}{nz}\left[b^k \cos\frac{(j-1)2\pi}{n} + a^k \sin\frac{(j-1)2\pi}{n}\right]
\end{cases} \tag{8}
$$

对式(7)做三角恒等变换，可得：

$$
\begin{aligned}
F_x &= \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\underbrace{\left[\cos\alpha\cdot(Q_1^2+R_1^2)^{\frac{1}{2}} - \sin\alpha\cdot(Q_2^2+R_2^2)^{\frac{1}{2}}\right]}_{I}\cdot \sin(kz\omega t+\Lambda)\Big\}, \\
F_y &= \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\underbrace{\left[\sin\alpha\cdot(Q_1^2+R_1^2)^{\frac{1}{2}} + \cos\alpha\cdot(Q_2^2+R_2^2)^{\frac{1}{2}}\right]}_{II}\cdot \sin(kz\omega t+\Lambda)\Big\}
\end{aligned} \tag{9}
$$

式中 I,II 为 n 阶调谐齿轮啮合力幅值，Λ 为 n 阶调谐齿轮整体啮合力初相位：

$$
\Lambda = \arctan\frac{R_1}{Q_1} = \arctan\frac{R_2}{Q_2} \tag{10}
$$

把式(8)代入式(9)中并整理得：

$$
\begin{cases}
I = \underbrace{\left[(a^k)^2+(b^k)^2\right]^{\frac{1}{2}}}_{E}\cdot H_1(n) \\
II = \underbrace{\left[(a^k)^2+(b^k)^2\right]^{\frac{1}{2}}}_{E}\cdot H_2(n)
\end{cases} \tag{11}
$$

式中 $H_1(n),H_2(n)$ 为啮合力 F_x,F_y 的幅值因子；E 为与 n 无关的常数。

$$
\begin{aligned}
H_1(n) = {}& \cos\alpha\left\{\left[\sum_{j=1}^{n}\cos\frac{2\pi(j-1)}{nz}\cdot\cos\frac{2\pi(j-1)}{n}\right]^2 + \left[\sum_{j=1}^{n}\cos\frac{2\pi(j-1)}{nz}\sin\frac{2\pi(j-1)}{n}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} - \\
& \sin\alpha\left\{\left[\sum_{j=1}^{n}\sin\frac{2\pi(j-1)}{nz}\cos\frac{2\pi(j-1)}{n}\right]^2 + \left[\sum_{j=1}^{n}\sin\frac{2\pi(j-1)}{nz}\sin\frac{2\pi(j-1)}{n}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}, \\
H_2(n) = {}& \sin\alpha\left\{\left[\sum_{j=1}^{n}\cos\frac{2\pi(j-1)}{nz}\cdot\cos\frac{2\pi(j-1)}{n}\right]^2 + \left[\sum_{j=1}^{n}\cos\frac{2\pi(j-1)}{nz}\sin\frac{2\pi(j-1)}{n}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} + \\
& \cos\alpha\left\{\left[\sum_{j=1}^{n}\sin\frac{2\pi(j-1)}{nz}\cos\frac{2\pi(j-1)}{n}\right]^2 + \left[\sum_{j=1}^{n}\sin\frac{2\pi(j-1)}{nz}\sin\frac{2\pi(j-1)}{n}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{12}
$$

故由啮合力幅值因子 $H_1(n),H_2(n)$ 决定 I,II 的大小，当 $\alpha=20^{\circ}$，做出 $1\leqslant n\leqslant 20$（n 为整数）的 $H_i(n)$（$i=1,2$）图像拟合曲线如图 5 所示。

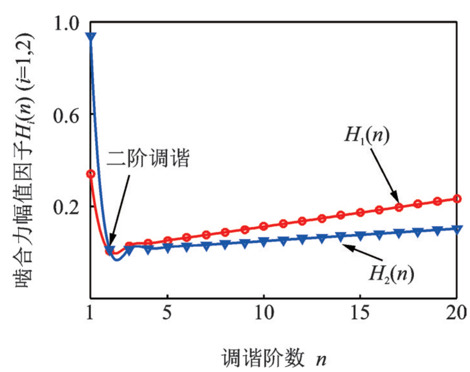


图 5 阶数-幅值图

Fig. 5 Order-amplitude diagram

由图 5 可知，当 $n=2$（n 为正整数）时，错时相位角 $\phi=\pi/z$，即二阶调谐，此时啮合力波动最小，此后随着 n 值增大，幅值呈现上升趋势。

2.3 二阶调谐齿轮动态啮合力计算

为验证 n 阶调谐齿轮动态啮合力理论计算的普适性，对二阶调谐齿轮进行进一步研究。设二阶调谐齿轮的错时相位角为 ϕ，则根据式(4)可知：

$$
\begin{cases}
F_x = F_{1x1} + F_{2x2}\cos\phi - F_{2y2}\sin\phi \\
F_y = F_{1y1} + F_{2y2}\cos\phi + F_{2x2}\sin\phi
\end{cases} \tag{13}
$$

式(13)中，根据式(2)可知：

$$\begin{cases} F_{1x1}=F_1\cos\alpha \\ F_{1y1}=F_1\sin\alpha \\ F_{2x2}=F_2\cos\alpha \\ F_{2y2}=F_2\sin\alpha \end{cases} \tag{14}$$

则根据式(2),(13)并忽略贡献较小部分,整理得下式:

$$\begin{cases} F_x=\cos\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\Big[a^k\sin(kz_1\omega t)+b^k\cos(kz_1\omega t)+ \\ \quad a^k\cos\phi\cos(k\Phi)\sin(kz_1\omega t)+ \\ \quad a^k\cos\phi\sin(k\Phi)\cos(kz_1\omega t)+ \\ \quad b^k\cos\phi\cos(k\Phi)\cos(kz_1\omega t)- \\ \quad b^k\cos\phi\sin(k\Phi)\sin(kz_1\omega t)\Big] \\ F_y=\sin\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\Big[a^k\sin(kz_1\omega t)+b^k\cos(kz_1\omega t)+ \\ \quad a^k\cos\phi\cos(k\Phi)\sin(kz_1\omega t)+ \\ \quad a^k\cos\phi\sin(k\Phi)\cos(kz_1\omega t)+ \\ \quad b^k\cos\phi\cos(k\Phi)\cos(kz_1\omega t)- \\ \quad b^k\cos\phi\sin(k\Phi)\sin(kz_1\omega t)\Big] \end{cases} \tag{15}$$

记:

$$\begin{cases} A=\cos\phi\cos(k\Phi) \\ B=\cos\phi\sin(k\Phi) \\ M=a^k+a^kA-b^kB \\ N=b^k+a^kB+b^kA \end{cases} \tag{16}$$

将式(16)代入式(15)并根据三角函数万能公式可得:

$$\begin{cases} F_x=\sum_{k=1}^{\infty}\Big[(\cos\alpha\sqrt{M^2+N^2})\sin(kz_1\omega t+\Psi)\Big] \\ F_y=\sum_{k=1}^{\infty}\Big[(\sin\alpha\sqrt{M^2+N^2})\sin(kz_1\omega t+\Psi)\Big] \end{cases} \tag{17}$$

式中　Ψ为二阶调谐齿轮啮合力初相位:

$$\tan\Psi=\frac{M}{N} \tag{18}$$

当压力角 α 一定时,$\sin\alpha$,$\cos\alpha$ 为一常数,记 $F_A=\sqrt{M^2+N^2}$,则 F_A 为啮合力 F_x,F_y 的幅值,F_A 越小,F_x,F_y 的波动就越小。记 $G=M^2+N^2$,把式(17)代入 G,则有:

$$G=(a^k+a^kA-b^kB)^2+(b^k+a^kB+b^kA)^2= \\ \left[(a^k)^2+(b^k)^2\right](1+2A+A^2+B^2) \tag{19}$$

式中　$(a^k)^2+(b^k)^2$ 为常数,定义 $g(\phi,k,z_1)$ 啮合力幅值因子,则 $g(\phi,k,z_1)=1+2A+A^2+B^2$,再把式(17)代入 $g(\phi,k,z_1)$,则有:

$$g(\phi,k,z_1)=1+2\cos\phi\cos(kz_1\phi)+\cos^2\phi \tag{20}$$

式(20)对 ϕ 求导,得到下式:

$$\frac{\mathrm{d}g(\phi,k,z_1)}{\mathrm{d}\phi}=-2\big[\sin\phi\cos(kz_1\phi)+ \\ kz_1\cos\phi\sin(kz_1\phi)+\frac{1}{2}\sin(2\phi)\big] \tag{21}$$

则有:当 $\phi=nT(n=0,1,2,3,\cdots)$时,$g(\phi,k,z_1)$取最大值。

当 $\phi=nT+\frac{\pi}{kz}(n=0,1,2,\cdots;\ k=1,2,3,\cdots)$ 时,由于 $\phi_n\in[0,2\frac{\pi}{z}]$ 且 $z\geqslant z_{\min}=17$,此时 $g(\phi,k,z_1)$取最小值,即啮合力的 k 阶波动最小。T 为 $g(\phi,k,z_1)$的波动周期,且 T 与 k 和 z 有关。

3　高阶调谐齿轮传动参数影响分析及讨论

3.1　调谐齿轮动态验证

3.1.1　调谐齿轮基本参数

本文研究一对平行轴调谐齿轮,基本参数如表1所示。建立不同的模型进行动力学仿真,得到齿轮传动系统的动态响应。

表 1　齿轮基本参数

Tab. 1　Basic parameters of gears

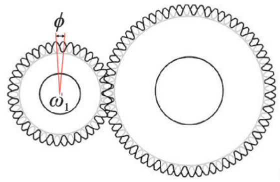
齿轮参数	主动轮	从动轮
齿数	19	27
模数/mm	4	
压力角/(°)	20	
齿宽/mm	60	60
齿轮材料	$45^{\#}$	
错时相位角 ϕ	$0/\frac{\pi}{2z}/\frac{\pi}{z}/\frac{3\pi}{2z}$	
转矩/(N·m)	-	180
转速/($\mathrm{r\cdot min^{-1}}$)	600	-

3.1.2　模型前处理

为验证高阶调谐齿轮传动原理,利用ABAQUS做了显式动力学验证,分别建立了二阶调谐齿轮 $\phi=0,\frac{\pi}{2z},\frac{\pi}{z},\frac{3\pi}{2z}$ 时以及三阶调谐齿轮 $\phi=\frac{2\pi}{3z}$ 五种模型。图6(a)给出了 $\phi=\frac{\pi}{z}$ 的三维模型。

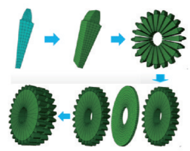
为了保证结果准确性,四个模型均保持全模型,然后提取平稳啮合区结果进行对比。本文利用面动成体原则,在二维平面内画出目标网格,然后再拉伸平面网格,创建有限元实体,如图6(b)所示。

材料为 $45^{\#}$,弹性模量为 2.06×10^5 MPa,泊松比



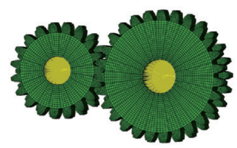
(a) 三维模型

(a) Three-dimensional model



(b) 有限元网格流程图

(b) Finite element mesh flow chart



(c) 加载耦合模型

(c) Loading coupling model

图6　动态仿真前处理图

Fig. 6　Pre-processing diagram of dynamic simulation

为0.3,材料密度为7850 kg/m³;调谐齿轮小轮为主动轮,采用通用接触,通用接触可自动识别每对接触的面,摩擦因数0.05;分别将小、大轮参考点沿轴线转动自由度释放,约束其余5个自由度,如图6(c)所示。定义小轮绕自身轴线的转动角速度62.8 rad/s,定义大齿轮绕自身轴线转动自由度上负载方向扭矩为180 N•m,对大轮负载扭矩采用线性加载,降低载荷施加造成的初始冲击。

3.2　高阶调谐齿轮传动参数对啮合刚度的影响

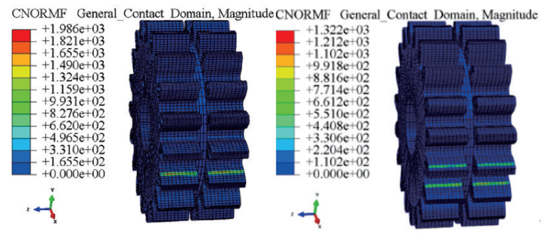
3.2.1　不同错时相位角对啮合齿对的影响

得到不同错时相位角的动态啮合过程,不同时刻对应的啮合齿对数目如图7(a),(b),(c)所示,图中高亮区域为啮合齿对。

如图7所示,当错时相位角$\phi=0$时,即普通直齿轮,是单双齿交替啮合,此时最大啮合力为1.986 kN;当错时相位角$\phi=\frac{\pi}{2z}$时,是二-三-四齿交替啮合,此时最大啮合力为1.928 kN;当错时相位角$\phi=\frac{\pi}{z}$时,则是三、四齿交替啮合,此时最大啮合力为1.761 kN;其中,$\phi=\frac{3\pi}{2z}$与$\phi=\frac{\pi}{2z}$对于调谐齿轮具有相同的实际意义,对应的结果与$\phi=\frac{\pi}{2z}$相同。由此可知,调谐齿轮均有改善齿轮传动平稳、增加齿轮强度的效果。这是由于多齿对交替啮合改善了齿轮啮合刚度波动。此外,当$\phi=\frac{\pi}{z}$时,接触力峰值有最小值为1.761 kN,与调谐齿轮传动原理相符。

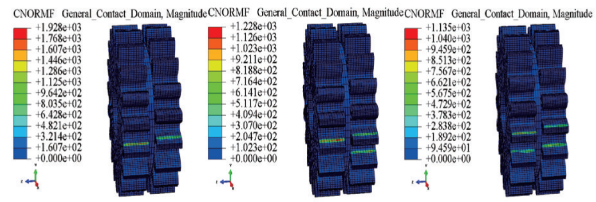
3.2.2　不同错时相位角对啮合刚度的影响

到目前为止,行业内常用方波法、实验法[16]、有限法元素法和势能法[17]求解齿轮时变啮合刚度。在



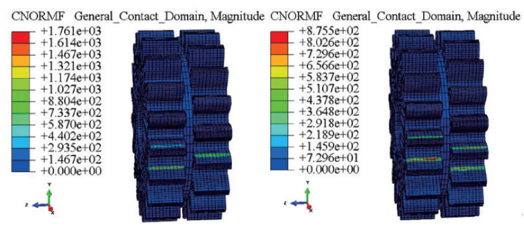
(a) ϕ=0时二-四齿交替啮合

(a) When ϕ=0, two-four teeth alternately mesh



(b) $\phi=\frac{\pi}{2z}$时二-三-四齿交替啮合

(b) When $\phi=\frac{\pi}{2z}$, two-three-four teeth alternately mesh



(c) $\phi=\frac{\pi}{z}$时三-四齿交替啮合

(c) When $\phi=\frac{\pi}{z}$, three-four teeth alternately mesh

图7　调谐齿轮多齿对交替啮合图

Fig. 7　Alternate meshing diagram of multiple tooth pairs of tuning gear

仿真计算单齿动态啮合刚度时,大多采用齿面法向接触合力与弹性变形量平均值之比计算:

$$k_n=\frac{\sum_i^n f_i}{\sum_i^n u_i/n} \tag{22}$$

式中　i为工作齿面任意节点,n为接触椭圆区域共节点数量,f_i为作用于节点i的法向接触力,u_i为节点i的综合弹性变形。该算法不能保证载荷与变形在同一方向,因而导致较大计算误差。本文采用一种更准确的啮合刚度计算方法计算调谐齿轮的啮合刚度。设任意节点i啮合刚度表达式为:

$$k_{ix}=\frac{f_{ix}}{u_{ix}},\ k_{iy}=\frac{f_{iy}}{u_{iy}},\ k_{iz}=\frac{f_{iz}}{u_{iz}} \tag{23}$$

为准确计算单齿啮合刚度,把接触力与接触变形同向化,即不同方向的力与位移一一对应,考虑整个工作齿面各个节点的弹性变形,将所有参与啮合节点啮合刚度叠加得到单齿啮合刚度,则单齿啮合刚度表达式为:

$$k_{px}=\sum_{i=1}^{m}k_{ix},k_{py}=\sum_{i=1}^{m}k_{iy},k_{pz}=\sum_{i=1}^{m}k_{iz},$$
$$k_p=\sqrt{k_{px}^2+k_{py}^2+k_{pz}^2},$$
$$k_{gx}=\sum_{i=1}^{m}k_{ix},k_{gy}=\sum_{i=1}^{m}k_{iy},k_{gz}=\sum_{i=1}^{m}k_{iz},$$
$$k_g=\sqrt{k_{gx}^2+k_{gy}^2+k_{gz}^2} \tag{24}$$

式中　k_p 和 k_g 分别为主、从动齿轮的单齿啮合刚度，m 为整个工作齿面的节点数量。

齿轮副一个啮合周期内某一啮合转角下，存在 t 对齿接触，第 $j(1\leqslant j\leqslant t)$ 对轮齿接触对综合啮合刚度表达式为：

$$k_j=\frac{k_p k_g}{k_p+k_g} \tag{25}$$

齿轮副的多齿综合啮合刚度表达式为：

$$K=\sum_{j=1}^{t}k_j \tag{26}$$

在 ABAQUS 中建立啮合齿面节点路径，提取出所有节点所受的不同方向的接触力以及变形量，运用式(23)～(26)得到不同错时相位角对应的动态啮合刚度，如图 8 所示。图 8 中，调谐齿轮的刚度波动比直齿轮小，其中，当 $\phi=0$ 时，调谐齿轮为二-四齿交替啮合；当 $\phi=\frac{\pi}{2z}$ 和 $\phi=\frac{3\pi}{2z}$ 时，调谐齿轮为二-三-四交替啮合；当 $\phi=\frac{\pi}{z}$ 时，调谐齿轮为三-四齿交替啮合。当 $\phi=\frac{\pi}{z}$ 时，刚度波动最小，与调谐齿轮理论相合。

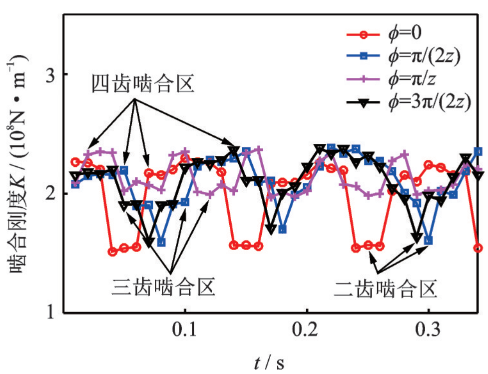


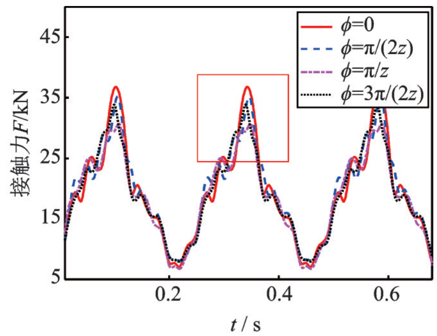
图 8　时变刚度图

Fig. 8　Time-varying stiffness diagram

3.3　高阶调谐齿轮传动参数对动态响应的影响

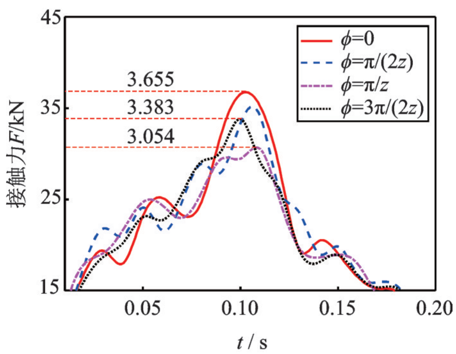
3.3.1　不同传动参数对接触力的影响

对每个模型建立相应路径，提取单齿三个完整啮合过程中的接触力，如图 9 所示。根据图 9 可知，调谐齿轮的接触力峰值明显降低，$\phi=\frac{\pi}{z}$ 时，接触力峰值最小，印证了第二节中的理论推导。$\phi=\frac{\pi}{2z}$ 和 $\phi=\frac{3\pi}{2z}$ 时接触力峰值相近，$\phi=0$ 时峰值最大。ϕ 值从 0 到 $\frac{\pi}{z}$ 单齿接触力峰值下降，从 $\frac{\pi}{z}$ 到 $\frac{2\pi}{z}$ 接触力又逐渐上升。由此可知，调谐齿轮错时相位角对载荷分担有明显影响，相比于直齿轮，单齿承受载荷明显



(a) 单齿接触力

(a) Single tooth contact force



(b) 接触力峰值放大图

(b) Magnified view of peak contact force

图 9　单齿接触力对比图

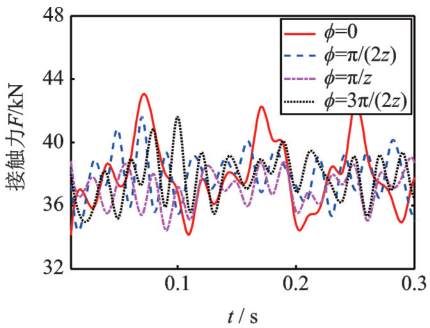
Fig. 9　Comparison of single tooth contact force

减小，意味着接触强度提高，从而进一步提高了齿轮受载能力。

为研究不同传动参数对接触力的影响，得到不同传递参数对应的整体接触力如图 10 所示。从图 10(a) 中可以看出，相比于直齿轮($\phi=0$)，调谐齿轮接触力波动明显减小，其中当 $\phi=\frac{\pi}{z}$ 时，整体接触力波动最小，与第二节理论相符，也与文献[14]中所述的人字齿交错角会影响载荷分担系数理论相符。如图 10(b) 所示，当调谐阶数为二阶调谐时，接触力波动最小，当调谐阶数为三阶调谐时，接触力波动小于一阶调谐大于二阶调谐齿轮，与高阶调谐齿轮传动原理相符，再次证明错时相位角对载荷分担系数有很大影响。

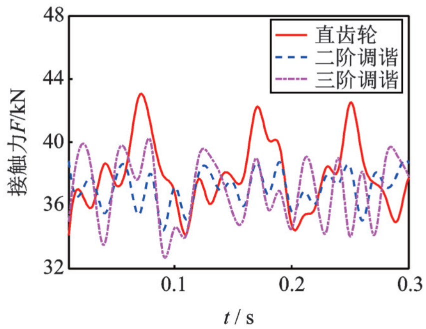
3.3.2　设计参数对振动响应的影响

(a) 不同错时相位角对振动响应的影响



(a) 不同错时相位角整体接触力

(a) Overall contact force with different staggered phase angles



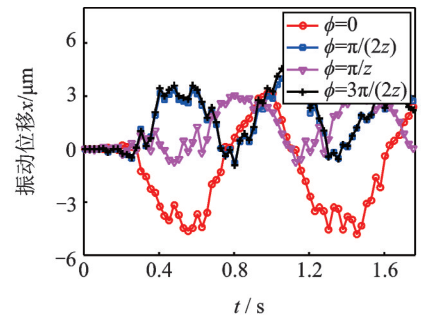
(b) 不同调谐阶数整体接触力

(b) Overall contact force of different tuning orders

图10 不同传动参数对应接触力对比图

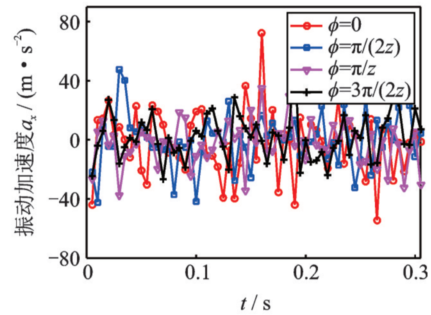
Fig. 10 Comparison of contact force corresponding to different transmission parameters

提取不同错时相位角对应的振动响应如图11所示。图11中，从整体振动位移看，调谐齿轮振动位移相较于直齿轮有明显减小，振动加速度波动也减小，表明调谐齿轮具备减振效果，其中，当$\phi=\frac{\pi}{z}$时，振动位移以及振动加速度波动均达到最小，表明此时减振效果最佳，即$\phi=\frac{\pi}{z}$是二阶调谐齿轮最佳传动参数，此结论除本文中动态仿真可以验证外，还可以和文献[18]中的移相齿轮所得结论相验证。此外，不同错时相位角的x方向振动位移明显大于y方向振动位移，这是因为调谐齿轮在x轴上啮合，啮合方向振动位移较大。当$\phi=\frac{\pi}{2z}$时，振动位移小于直齿轮振动位移，大于$\phi=\frac{\pi}{z}$时振动位移，这是由于$\phi=\frac{\pi}{2z}$时，调谐齿轮是二-三-四齿交替啮合，刚度波动大于直齿轮而小于$\phi=\frac{\pi}{z}$时的调谐齿轮。当$\phi=\frac{3\pi}{2z}$时，振动响应与$\phi=\frac{\pi}{2z}$时相似，表明两种情况实际意义相同。二阶调谐齿轮$\phi=\frac{\pi}{z}$时，齿轮为三-四齿交替啮合，此时刚度波动最小，所以振动位移以及振动加速度均最小。



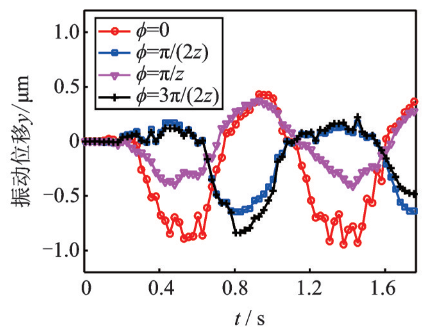
(a) x方向振动位移

(a) Vibration displacement in x direction



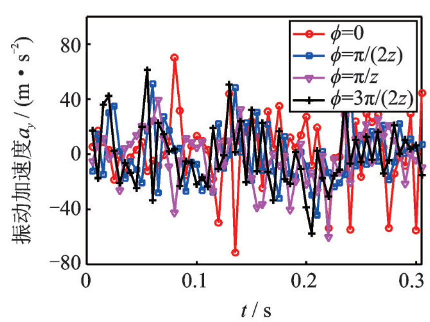
(b) x方向振动加速度

(b) Vibration acceleration in x direction



(c) y方向振动位移

(c) Vibration displacement in y direction



(d) y方向振动加速度

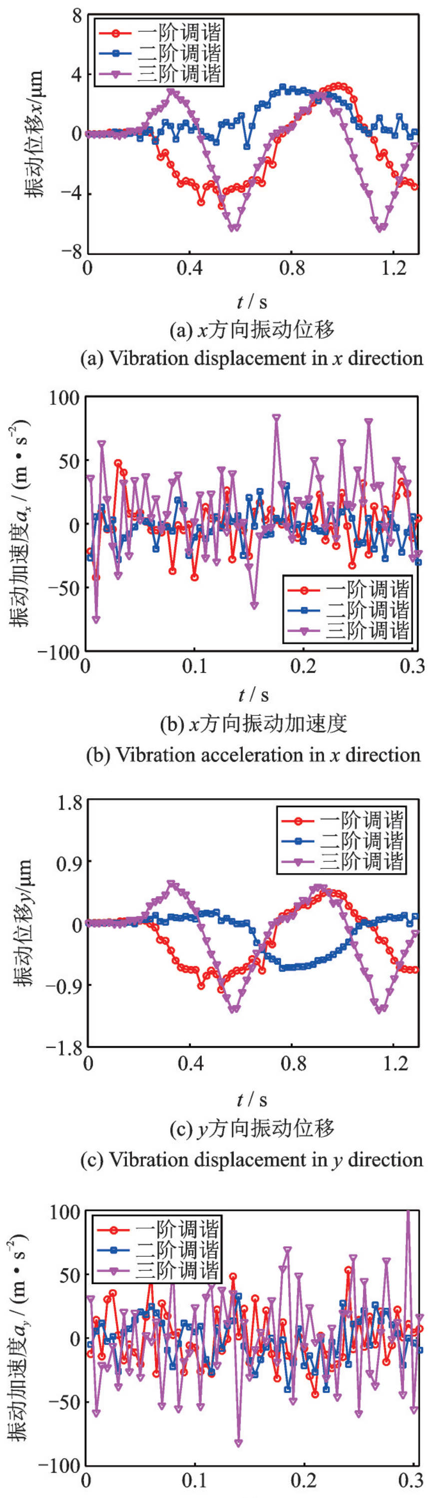
(d) Vibration acceleration in y direction

图11 不同错时相位角振动响应

Fig. 11 Vibration response of different phase angles at different times

（b）不同调谐阶数对振动响应的影响

为研究高阶调谐齿轮调谐阶数对减振性能的影响，提取不同调谐阶数对应的振动位移以及振动加速度如图12所示。



(a) x方向振动位移

(a) Vibration displacement in x direction

(b) x方向振动加速度

(b) Vibration acceleration in x direction

(c) y方向振动位移

(c) Vibration displacement in y direction

(d) y方向振动加速度

(d) Vibration acceleration in y direction

图 12　不同调谐阶振动响应

Fig. 12　Vibration response with different tuning orders

如图 12 所示，二阶调谐时，振动位移和振动加速度波动最小，意味着二阶调谐齿轮传动最平稳，减振效果最好。其中，x 方向振动位移大于 y 方向振动位移，这是因为轮齿在 x 方向啮合。当三阶调谐时，振动位移和加速度明显变大，是由于随着调谐阶数增加，齿轮的平均啮合刚度增加，无法很好地吸收系统振动，因而导致更大的振动加速度[19]。因此，调谐齿轮并不是阶数越高，传动性能就越好，由于调谐齿轮具备载荷分担功效，阶数越高就会导致整体刚性越大，最终影响传动性能。

4　结　论

将相位调谐思想运用于渐开线直齿圆柱齿轮，提出了高阶调谐齿轮传动原理，并对高阶调谐齿轮展开研究，研究结论如下：

（1）调节调谐齿轮错时相位角，可得到多齿对交替啮合的调谐齿轮；

（2）二阶调谐齿轮的最优错时相位角 $\phi=\frac{\pi}{z}$，此时，调谐齿轮为三-四齿交替啮合，啮合刚度和啮合力波动量均达到最小，振动位移和振动加速度波动最小，说明调谐齿轮具有明显的减振效果，与文献[18]中结论一致。

（3）高阶调谐齿轮的错时相位角对载荷分担有明显的影响，当错时相位角 $\phi=\frac{\pi}{z}$ 时，齿轮的承载能力最强。

参考文献：

[1]　Ambarisha V K, Parker R G. Suppression of planet mode response in planetary gear dynamics through mesh phasing[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2006, 128(2): 133-142.

[2]　Wang S, Huo M, Zhang C, et al. Effect of mesh phase on wave vibration of spur planetary ring gear[J]. European Journal of Mechanics A-Solids, 2011, 30(6): 820-827.

[3]　王世宇. 基于相位调谐的直齿行星齿轮传动动力学理论与实验研究[D]. 天津：天津大学, 2005.
Wang S Y. Theoretical and experimental investigations on dynamics of planetary spur gear transmissions based on planet phasing theory[D]. Tianjin: Tianjin University, 2015.

[4]　张霖霖，朱如鹏. 啮合相位对人字齿行星齿轮传动系统均载的影响[J]. 机械工程学报, 2018, 54(11): 129-140.
Zhang L L, Zhu R P. Impact of meshing phase on load sharing for herringbone planetary train[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(11): 129-140.

[5]　史志伟. 行星传动啮合相位计算方法研究[J]. 科学技术与工程, 2011, 11(22): 5286-5289.
Shi Z W. A method to determine the mesh phasing in planetary gear train[J]. Science Technology and Engineering, 2011, 11(22): 5286-5289.

[6] 尤明明,彭龙龙,靳军.基于相位调谐理论的高速行星齿轮箱振动抑制改进设计[J].船舶工程,2018,40(4):51-54.
You M M, Peng L L, Jin J. Improving design for reducing vibration of high speed planetary gear box based on phase tuning theory [J]. Ship Engineering, 2018, 40 (4): 51-54.
[7] 沈稼耕.计入啮合相位的人字齿行星齿轮系统动力学研究[D].南京:南京航空航天大学, 2014.
Shen J G. Research on dynamics of herringbone planetary gear trains based on mesh phasing[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2014.
[8] 戴麟,朱如鹏,鲍和云,等.相位调谐对行星齿轮系统辐射噪声影响的研究[J].振动与冲击, 2016, 35(13): 51-57.
Dai L, Zhu R P, Bao H Y, et al. Effects of phase adjustment on noise radiation in a planetary gear transmission system[J]. Journal of Vibration and Shock, 2016, 35(13): 51-57.
[9] 戴麟.相位调谐与啮入冲击对行星齿轮系统辐射噪声影响的研究[D].南京:南京航空航天大学,2016.
Dai L. Research on the effect of phase adjustment and meshing impact on noise radiation in planetary gear transmission[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2016.
[10] 谢帮,王世宇.锥齿行星齿轮传动相位调谐研究[J].振动工程学报,2016,29(1):69-77.
Xie B, Wang S Y. Planet phasing of bevel planetary gear trains[J]. Journal of Vibration Engineering, 2016, 29(1): 69-77.
[11] Peng Dikang, Smith W A, Borghesani P, et al. Comprehensive planet gear diagnostics: use of transmission error and mesh phasing to distinguish localised fault types and identify faulty gears[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 127: 531-550.
[12] Peng Dikang, Smith W A, Randall R B, et al. Use of mesh phasing to locate faulty planet gears[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 116: 12-24.
[13] 徐长航,吕涛,陈国明,等.自升式平台齿轮齿条升降机构错齿优化动力学分析[J].机械工程学报,2014,50(19):66-72.
Xu C H, Lü T, Chen G M, et al. Dynamic performance analysis of jack-up platform's jacking system with staggering tooth [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(19): 66-72.
[14] Mo S, Zhang T, Jin G, et al. Dynamic characteristics and load sharing of herringbone wind power gearbox[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2018, 1:1-24.
[15] Kang M R, Kahraman A. An experimental and theoretical study of the dynamic behavior of double-helical gear sets[J]. Journal of Sound and Vibration, 2015, 350: 11-29.
[16] Liang X, Zuo M J, Feng Z. Dynamic modeling of gearbox faults: a review[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2018, 98: 852-876.
[17] Fan L, Wang S, Wang X, et al. Nonlinear dynamic modeling of a helicopter planetary gear train for carrier plate crack fault diagnosis[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2016, 29(3): 675-687.
[18] Cheon Gill-Jeong. Numerical study on reducing the vibration of spur gear pairs with phasing[J]. Journal of Sound and Vibration, 2010, 329(19): 3915-3927.
[19] Chen Zaigang, Shao Yimin, Su Daizhong. Dynamic simulation of planetary gear set with flexible spur ring gear[J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332(26): 7191-7204.

Parameter design and dynamic response study of a high-order tuning gear

ZHANG Jia-xiong, WEI Jing, ZHANG Chun-peng, HOU Shao-shuai
(State Key Laboratory of Mechanical Transmission, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: A high-order tuning gear transmission principle is proposed, and the staggered phase angle of the tuning gear is defined. The parameter design study of a high-order tuning gear is carried out based on dynamic meshing force. The optimal transmission parameters of tuning gear are deduced. The influence of the staggered phase angle of the tuned gear and tuning order on the dynamic response is verified. By combining with specific cases, the dynamics of the high-order tuning gear are carried out via numerical simulation. The influence of the high-order tuning gear transmission parameters on the dynamic meshing force and vibration response of the system is studied. The results show that when the tuning order is 2 (second-order tuning gear) and the phase angle is 1/2 pitch, the variable meshing stiffness and contact force fluctuations of the tuning gear are the smallest. And the vibration displacement and vibration acceleration fluctuation are also the smallest, which theoretically proves that the second-order tuning gear has obvious vibration reduction effect.

Key words: high-order tuning gear; vibration response; phase tuning; contact force fluctuation

作者简介: 张佳雄(1995—),男,硕士研究生。电话:17815381958;E-mail:1656843993@qq.com。
通讯作者: 魏 静(1978—),男,教授,博士生导师。电话:13629752837; E-mail:weijing_slmt@163.com。