含惯容和杠杆元件的减振系统参数优化及性能分析

周子博[2]，申永军[1,2]，邢海军[1,2]，温少芳[1]，杨绍普[1,2]

（1.石家庄铁道大学省部共建交通工程结构力学行为与系统安全国家重点实验室，河北 石家庄 050043；
2.石家庄铁道大学机械工程学院，河北 石家庄 050043）

摘要： 为了提高减振性能，设计了两种基于惯容-弹簧-阻尼器结构的含放大机构的减振系统，探讨了模型在受到外部激励时的减振效果。根据牛顿第二定律建立了系统的动力学方程，并得到了其解析解，发现幅频曲线都存在独立于阻尼比的两个固定点。基于 H_∞ 和 H_2 优化准则，分别得到了系统的最优参数，并研究了惯容质量比和放大比对模型减振性能的影响。发现在一定范围内，惯容质量比与放大比增大，幅频曲线峰值降低，两共振峰间距拉大，并通过数值仿真验证了解析解的正确性。与其他减振模型在简谐激励和随机激励情况下比较，所设计模型大幅降低了共振振幅，并且拓宽了有效频带，表明其具有更好的减振性能。

关键词： 振动控制；惯容；杠杆元件；力放大机构；参数优化

中图分类号： TB535；O328　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1004-4523(2022)02-0407-10

DOI：10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2022.02.016

引　言

在被动减振领域中，自 1909 年 Frahm[1]发明无阻尼动力吸振器（Dynamic Vibration Absorber，DVA）距今已有 100 多年，经过不断优化改进，相继出现半主动控制系统、主动控制系统。由于被动减振系统结构简单且可靠性高，应用范围广，目前依旧是研究热点。Ormondroyd 等[2]考虑到 Frahm 模型频带的局限性，加入阻尼，有效降低主系统的振幅并拓宽可用频率范围。进入 21 世纪，Ren 等[3]提出接地阻尼 DVA，该减振系统比经典 DVA 效果更佳。Almazan 等[4]提出了一种由摩擦阻尼代替黏性阻尼的简单双向减振 BH-TMD（Bidirectional and Homogeneous Tuned Mass Damper）机构，并控制 25 层混凝土建筑在地震载荷下的振动。赵艳影等[5]分析了时滞对动力吸振器的影响，并提出利用时滞可以提高减振效果的思想。Shen 等[6-7]给出了 4 种半主动动力吸振器的近似解析解，并分析最优参数下时滞对半主动控制的影响。文献[8]推导了加入接地负刚度弹簧的 Voigt 式 DVA 的最优设计参数，并通过对比得出优异的减振性能。

随着对振动控制系统的深入研究，学者们发现含有惯容的减振系统具有固有频率低、承载大、减振效果优越的特点，同时可降低附加质量，实现减振系统轻量化设计。Smith 教授[9]提出惯容概念后，将其用于改善车辆悬架的性能，对几种 ISD（I-Inerter，S-Spring，D-Damper）悬架进行了分析优化。惯容器在实际工程中已经有了具体应用，迈凯伦车队最早将惯容器运用到 F1 赛车的悬架上[10]。Wang 等[11-12]将惯容应用到列车悬挂系统中，改善了列车系统的稳定性和动态性能。Chen 等[13-14]将惯容应用到汽车悬架，利用半主动控制策略调节惯容与阻尼系数，实现了悬架力的动态控制；他们还将惯容用于动力吸振器中，并给出最佳设计方案[15-16]。从质量成本看，惯容的作用在于优化系统质量从而实现减振效果[17]，在不同结构类型[18-22]中均有应用。Garrido 等[23]提出用 TVMD（Tuned Viscous Mass Damper）代替调谐质量阻尼器中的阻尼元件，研究发现该系统减振效果更好，同时具有更宽的减振频带。Barredo 等[24]利用扩展固定点方法计算了含惯容的 DVA 的解析解。聂佳梅等[25]对惯容模型结构及其实现方法进行了探讨。王孝然等[26]提出的含有惯容和负刚度的 DVA 减振性能优越，拓宽了有效频带。张瑞甫等[27]整理了惯容在振动控制领域的发展历程与研究现状。李壮壮等[28-29]提出的基于 ISD 结构的被动减振结构，比传统 DVA 减振效果更佳。文献[30]研究了具有惯容的离心摆轴系减振器力学特性，将该模

收稿日期： 2020-06-17；**修订日期：** 2020-10-28

基金项目： 国家自然科学基金资助项目（U1934201，11772206）。

型应用于螺旋桨轴系，证明比动力吸振器更能提高系统稳定性。惯容在隔振领域也有较好的表现，可以降低主系统固有频率，改善隔振性能[31-33]。文献[34]利用加速度-相对速度半主动控制策略，实现惯容隔振器惯质比的动态切换，扩大了频率适用范围。

力放大机构也已经用于减振和隔振领域。以杠杆元件为例，李春翔等[35]研究的杠杆式TMD比传统DVA有更大的最优调谐频率比。汪正兴等[36]利用杠杆放大作用设计了斜拉索杠杆质量阻尼器并在实桥中实验，通过有效附加阻尼抑制斜拉索的振动。Zang等[37]提出的非线性DVA，引入杠杆后比传统吸振器有更好的减振性能，并研究了支点位置对系统稳定性的影响。文献[38]提出基于杠杆放大原理的铅黏弹性阻尼器具有耗能效果明显的优势。文献[39]将杠杆放大机构与负刚度弹簧加入DVA中，通过固定点理论和H_∞优化得到最优方案，具有很好的减振效果。

然而上述减振或者隔振的研究更多侧重于数值方法和仿真，解析解的计算较少，并且将二者结合的研究也少有。本文在单自由度减振系统中附加惯容和力放大机构得到了新型减振系统，通过拉氏变换得到系统解析解，利用H_∞和H_2优化准则对减振模型的刚度和阻尼进行优化设计。通过在简谐激励和随机激励下与其他减振系统的比较，证明了本文模型良好的减振性能。

1 惯容力学特性

惯容器是剑桥大学Smith教授通过研究机械网络和电路网络之间相似性提出的，简称惯容，又称为惯性储能器或惯性质量储能器，具有两个独立的、自由的端点，产生的力与其节点之间的相对加速度成比例。图1为一种滚珠丝杠惯容器（滚珠由飞轮替代）的二维结构示意图。此装置采用机械传动的方式将丝杠的直线运动转化为飞轮的旋转运动，将两端点的作用力转化为惯性力存储起来。

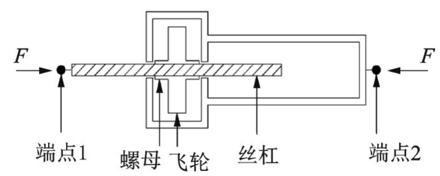


图1 滚珠丝杠惯容器原理图

Fig. 1 Schematic diagram of ball-screw inerter

理想惯容器的受力关系[9]为：

$$F=b\left(\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}\right)=b\left(\frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2}\right) \tag{1}$$

式中 F为施加于惯容两端点等大反向的力；b为惯容系数，单位为kg；v_1和v_2分别为两个端点的速度；x_1和x_2分别为两个端点的位移。通过设计结构形式，一般可将飞轮的转动惯量放大几十倍，这是惯容的优良特性[32]。

2 模型建立及参数优化

为了叙述方便，将本文中用到的所有参数列入表1。

表1 系统参数表

Tab. 1 Nomenclature

参数符号	名称
m_1	主系统质量
k_1	主系统弹簧刚度
k_2	连接杠杆弹簧刚度
c_1	主系统阻尼系数
b	惯容系数
F_0	力激励振幅
ω	力激励圆频率
S_0	功率谱密度
Z	振幅放大因子
$\mu=m_2/m_1$	质量比
$\omega_1=\sqrt{k_1/m_1}$	系统固有频率
$L=r_2/r_1$	杠杆放大比
$\delta=b/m_1$	惯质比
$\alpha=k_2/k_1$	刚度比
$\zeta=c_1/(2m_1\omega_1)$	阻尼比
$f_0=F_0/m_1$	力质比
$\lambda=\omega/\omega_1$	频率比

图2为本文所提出的两个模型，为了方便起见，分别命名为LISD1和LISD2。模型中分别引入了惯容以及杠杆机构，多元件组合存在多种形式，本文模型是在Den Hartog模型与Ren模型的基础上附加杠杆元件，并加入接地惯容。杠杆元件的两端分别加装滑块，滑块又分别铰接其他元件。在研究主系统的减振效果时，为了简化模型，忽略滑块质量、杠杆质量及运动过程中的摩擦损失，将基础的刚度看作无限大，以主系统垂向振幅和受到的振动能量减小作为减振目标。

根据牛顿第二定律，建立以下动力学方程：

LISD1

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1+k_1x_1+k_2(x_1-x_2/L)+ \\ \qquad c_1(\dot{x}_1-\dot{x}_2/L)=F_0\sin\omega t \\ (x_2/L-x_1)k_2/L+ \\ \qquad (\dot{x}_2/L-\dot{x}_1)c_1/L+b\ddot{x}_2=0 \end{cases} \tag{2a}$$

LISD2

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1+k_1x_1+(Lx_1-x_2)Lk_2=F_0\sin\omega t \\ (x_2-Lx_1)k_2+c_1\dot{x}_2+b\ddot{x}_2=0 \end{cases} \tag{2b}$$

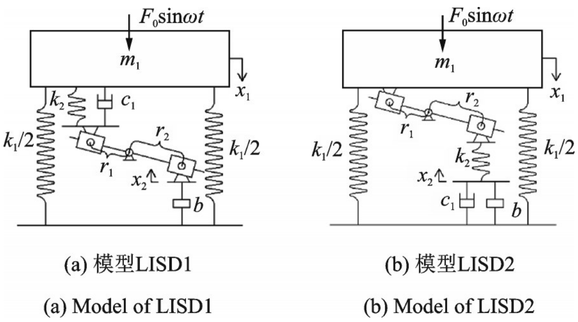


图 2　模型 LISD

Fig. 2　Models of LISDs

2.1　解析解

根据表 1,式(2a)和(2b)可以化为:

LISD1

$$\begin{cases}\ddot{x}_1+\omega_1^2x_1+\alpha\omega_1^2(x_1-x_2/L)+\\ \qquad 2\zeta\omega_1(\dot{x}_1-\dot{x}_2/L)=f_0\sin\omega t\\ (x_2/L-x_1)\alpha\omega_1^2/L+\\ \qquad(\dot{x}_2/L-\dot{x}_1)2\zeta\omega_1/L+\delta\ddot{x}_2=0\end{cases}\tag{3a}$$

LISD2

$$\begin{cases}\ddot{x}_1+\omega_1^2x_1+(Lx_1-x_2)L\alpha\omega_1^2=f_0\sin\omega t\\ (x_2-Lx_1)\alpha\omega_1^2+2\zeta\omega_1\dot{x}_2+\delta\ddot{x}_2=0\end{cases}\tag{3b}$$

将响应和正弦激励写为如下形式:

$$\begin{cases}x_1=X_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\\ x_2=X_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\\ F_0\sin\omega t=F_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\end{cases}\tag{4}$$

并代入式(3)中,得出无量纲运动规律:

$$X_{1i}=\frac{f_0(A_{1i}+\mathrm{j}B_{1i})}{C_{1i}+\mathrm{j}D_{1i}}\tag{5}$$

式中　j 为虚数单位,$i=1,2$,分别代表 LISD1 和 LISD2。其中:

$$\begin{cases}A_{11}=\omega_1^2\alpha-L^2\omega^2\delta\\ B_{11}=2\omega_1\omega\zeta\\ C_{11}=\omega_1^4\alpha+L^2\omega^4\delta-\\ \qquad\omega^2\omega_1^2\left[\alpha+L^2(1+\alpha)\delta\right]\\ D_{11}=2\omega\omega_1\zeta\left[\omega_1^2-\omega^2(1+L^2\delta)\right]\end{cases}\tag{6a}$$

$$\begin{cases}A_{12}=\omega_1^2\alpha-\omega^2\delta\\ B_{12}=2\omega_1\omega\zeta\\ C_{12}=\omega_1^4\alpha+\omega^4\delta-\omega^2\omega_1^2(\alpha+\delta+L^2\alpha\delta)\\ D_{12}=2\omega\omega_1\zeta\left[\omega_1^2(1+L^2\alpha)-\omega^2\right]\end{cases}\tag{6b}$$

引入参数:

$$X_{st}=\frac{F_0}{k_1}\tag{7}$$

得到评定 LISD 系统减振性能的振幅放大因子:

$$Z_i=\left|\frac{X_{1i}}{X_{st}}\right|=\sqrt{\frac{A_{2i}^2+B_{2i}^2\zeta^2}{C_{2i}^2+D_{2i}^2\zeta^2}}\tag{8}$$

其中:

$$\begin{cases}A_{21}=\alpha-L^2\delta\lambda^2\\ B_{21}=2\lambda\\ C_{21}=\alpha-\lambda^2\left[\alpha+L^2(1+\alpha)\delta\right]+L^2\delta\lambda^4\\ D_{21}=2\lambda\left[-1+(1+L^2\delta)\lambda^2\right]\end{cases}\tag{9a}$$

$$\begin{cases}A_{22}=\alpha-\delta\lambda^2\\ B_{22}=2\lambda\\ C_{22}=\alpha-(\alpha+\delta+L^2\alpha\delta)\lambda^2+\delta\lambda^4\\ D_{22}=2\lambda(1+L^2\alpha-\lambda^2)\end{cases}\tag{9b}$$

2.2　最优参数

2.2.1　H_∞优化

固定点理论是 DVA 参数优化的经典手段,通过 H_∞优化可以得到最优刚度比和最优阻尼比等参数。H_∞优化指主系统受到外界简谐激励时,在安装减振器后,使得主系统最大振幅最小。图 3(a)和(b)首先给出了 LISD 的主系统幅频曲线。

根据图 3 所示,两个模型均有独立于阻尼比的固定点 P 和 Q。根据此特性,可以让阻尼比趋于零和趋于无穷时的响应值相等,即 $A/C=B/D$。以 LISD1 为例,则有:

$$Z_1=\sqrt{\frac{B_{21}^2}{D_{21}^2}}=\sqrt{\frac{A_{21}^2}{C_{21}^2}}\tag{10}$$

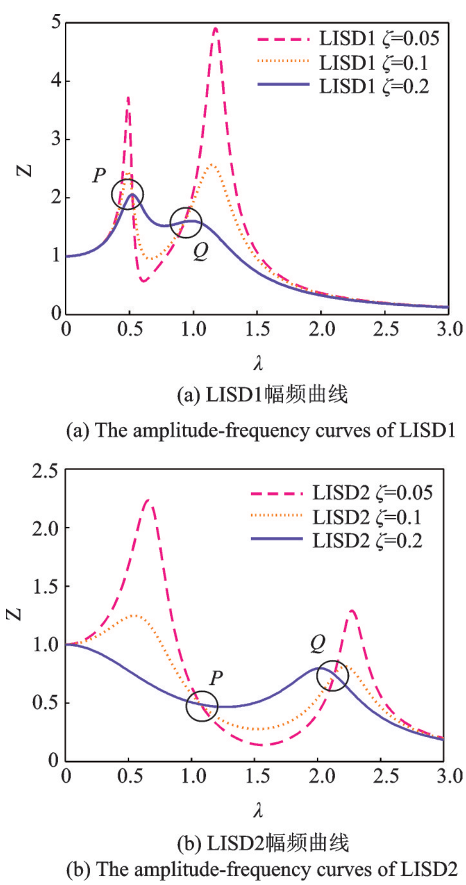


图 3　LISD 幅频曲线

Fig. 3　The amplitude-frequency curves of LISDs

将式(9a)代入式(10),化简得到:

$$(2+L^2\delta)\delta L^2\lambda^4+[-2L^2\delta-2\alpha(1+L^2\delta)]\lambda^2+2\alpha=0 \tag{11}$$

假设两固定点的横坐标为 λ_P 和 λ_Q,则存在等式:

$$(\lambda^2-\lambda_P^2)(\lambda^2-\lambda_Q^2)=\lambda^4-(\lambda_P^2+\lambda_Q^2)\lambda^2+\lambda_P^2\lambda_Q^2 \tag{12}$$

可以得到:

$$\lambda_P^2+\lambda_Q^2=\frac{2L^2\delta+2\alpha(1+L^2\delta)}{L^2\delta(2+L^2\delta)} \tag{13}$$

根据固定点理论可知,在最优频率比条件下 λ_P 和 λ_Q 两点处响应值相等,即:

$$Z_1=\sqrt{\frac{B_{21}^2}{D_{21}^2}}=\frac{1}{-1+(1+L^2\delta)\lambda_P^2}=-\frac{1}{-1+(1+L^2\delta)\lambda_Q^2} \tag{14}$$

从而得到:

$$\lambda_P^2+\lambda_Q^2=\frac{2}{1+L^2\delta} \tag{15}$$

联立式(13)和(15)可以建立关于 α 的方程,得到最优刚度比为:

$$\alpha_{\mathrm{opt1}}=\frac{L^2\delta}{(1+L^2\delta)^2} \tag{16}$$

将最优刚度比代入式(12)并求解,求出 P,Q 两点横坐标:

$$\lambda_P^2=\frac{2+L^2\delta(3+L^2\delta)-\sqrt{\delta(2+L^2\delta)(L+L^3\delta)^2}}{(1+L^2\delta)^2(2+L^2\delta)} \tag{17a}$$

$$\lambda_Q^2=\frac{2+L^2\delta(3+L^2\delta)+\sqrt{\delta(2+L^2\delta)(L+L^3\delta)^2}}{(1+L^2\delta)^2(2+L^2\delta)} \tag{17b}$$

在最优刚度比条件下,将横坐标代入式(8)中,固定点处响应值即纵坐标为:

$$Z_1\Big|_{(\lambda_P,\lambda_Q)}=\sqrt{1+\frac{2}{L^2\delta}} \tag{18}$$

由式(18)可以看出,以LISD1为例,杠杆放大比和惯质比对固定点处的响应有直接影响。在工程允许情况下,增加 δ 和 L,可以降低固定点处的响应。

至此已经得到了最优刚度比,同时固定点 P 和 Q 被调整到相等的高度。为了达到最优减振效果,可以使固定点成为幅频曲线的最高点。根据极值条件可知,幅频曲线在 P 和 Q 两点处的导数为零,即:

$$\frac{\partial {Z_1}^2}{\partial\lambda^2}\Big|_{\lambda_P,\lambda_Q}=0 \tag{19}$$

在最优刚度比条件下,可以得到:

$$\zeta_P^2=L^6\delta^3\left[6+3L^2\delta(3+L^2\delta)-\sqrt{\delta(2+L^2\delta)(L+L^3\delta)^2}\right]/\left[8(1+L^2\delta)^4(2+L^2\delta)\right] \tag{20a}$$

$$\zeta_Q^2=L^6\delta^3\left[6+3L^2\delta(3+L^2\delta)+\sqrt{\delta(2+L^2\delta)(L+L^3\delta)^2}\right]/\left[8(1+L^2\delta)^4(2+L^2\delta)\right] \tag{20b}$$

上式说明,选择其中一个 ζ 值只能使幅频曲线在 P 和 Q 中一点达到极值。因此,为了得到较好的优化效果,将两阻尼比平均值作为最优阻尼比,即:

$$\zeta_{\mathrm{opt1}}=\sqrt{\frac{\zeta_P^2+\zeta_Q^2}{2}}=\sqrt{\frac{3L^6\delta^3}{8(1+L^2\delta)^3}} \tag{21}$$

此时,在 H_∞ 优化下LISD1的所有最优参数已经得出。LISD2的参数推导过程与LISD1类似,参数如表2所示。

表2 H_∞ 优化结果

Tab. 2 Optimized parameters under H_∞ optimization

LISD	α_{opt}	ζ_{opt}
LISD1	$\frac{L^2\delta}{(1+L^2\delta)^2}$	$\sqrt{\frac{3L^6\delta^3}{8(1+L^2\delta)^3}}$
LISD2	$\frac{\delta}{1-L^2\delta}$	$\sqrt{\frac{3L^2\delta^3}{8+4L^2\delta(-3+L^2\delta)}}$

2.2.2 H_2 优化

在随机激励下,采用 H_2 范数评估主系统减振效果较为合适,另一方面 H_2 范数也代表了主系统响应的均方根值(Root Mean Square, RMS)。假设主系统以理想白噪声为随机激励,这里给出 H_2 优化的性能指标:

$$I=\frac{k_1^2E[x_1^2]}{2\pi S_f\omega_1}=\frac{k_1^2\langle x_1^2\rangle}{2\pi S_f\omega_1} \tag{22}$$

式中 $E[\,]$ 代表统计平均值,$\langle\ \rangle$ 代表瞬时平均值,S_f 代表功率谱密度。主系统位移的RMS可以定义为:

$$\langle x_1^2\rangle=\frac{\omega_1}{k_1^2}S_f\int_{-\infty}^{\infty}|Z|^2\mathrm{d}\lambda \tag{23}$$

将式(23)代入式(22),性能指标 I 可以写成:

$$I_i=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|Z_i|^2\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A_{2i}^2+B_{2i}^2\zeta^2}{C_{2i}^2+D_{2i}^2\zeta^2}\mathrm{d}\lambda \tag{24}$$

以LISD1为例,利用留数定理可以得到:

$$I_1=\frac{\Lambda_1\zeta_1^2+\Lambda_2}{4L^4\delta^2\zeta_1} \tag{25}$$

其中

$$\begin{cases}\Lambda_1=4(1+\delta L^2)\\ \Lambda_2=(\alpha\delta L^2+2\alpha)\alpha\delta L^2-\alpha(2\delta L^2-\alpha)\end{cases} \tag{26}$$

令 I 对 α 和 ζ 的偏导数为零,则有:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial \alpha}=0 \\ \dfrac{\partial I}{\partial \zeta}=0 \end{cases} \tag{27}$$

由式(26)和(27)得到:

$$\begin{cases} 2\alpha(1+L^2\delta)^2-L^2\delta(2+L^2\delta)=0 \\ L^4\delta^2-\alpha L^2\delta(2+L^2\delta)+ \\ \qquad(\alpha+\alpha L^2\delta)^2-4(1+L^2\delta)\zeta_1{}^2=0 \end{cases} \tag{28}$$

进一步求解式(28)可得LISD1的最优刚度比和最优阻尼比。在H_2优化下LISD的最优参数如表3所示。

表3　H_2优化结果

Tab. 3　Optimized parameters under H_2 optimization

LISD	α_{opt}	ζ_{opt}
LISD1	$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2(1+L^2\alpha)^2}$	$\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{L^6\delta^3(4+3L^2\delta)}{(1+L^2\delta)^3}}$
LISD2	$\dfrac{1}{4}\delta(\rho_1-\rho_2)$	$\dfrac{1}{8}\sqrt{(L^2\delta-2)\rho_2+\rho_3}$

注:$\rho_1=6-3L^2\delta$,$\rho_2=\sqrt{4+9L^2\delta(L^2\delta-4)}$,$\rho_3=4\delta(\delta-3L^2)+3L^4\delta^2$。

2.3　参数分析

根据表2可知,在LISD1中$\delta>0$,$L>1$,杠杆放大比小于1会放大幅频曲线幅值,效果与系统减振要求相悖;在LISD2中$0<\delta<1/L^2$,$0<L<\sqrt{1/\delta}$,超出参数范围主系统响应会产生不稳定现象。由表3可知,在LISD1中$\delta>0$,$L>1$;在LISD2中,$L^2\delta\in(0,0.114)\cup(3.886,+\infty)$,经计算,值域取右半部时,刚度比为负值且主系统响应不稳定,故取值域为左半部。图4和5给出了LISD2在两种优化方式中惯质比与杠杆放大比的关系,阴影部分为取值区域。在振动控制中,产生两个相近的固有频率(幅频曲线的两个共振峰),会导致有效减振频带变窄,对减振系统有害,因此选取合适的参数值很重要。图6和7给出了在H_∞优化下,惯质比与杠杆放大比对主系统垂向振动的影响。图8给出了在H_2优化下,惯质比与杠杆放大比对性能指标I的影响。

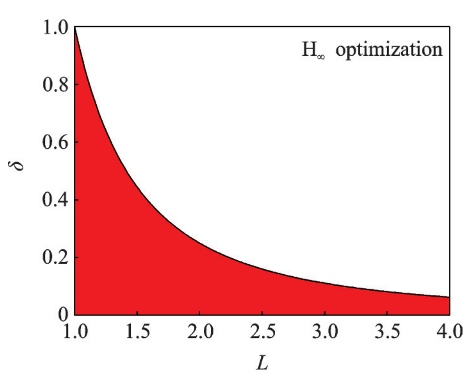


图4　LISD2在H_∞优化下L和δ的关系

Fig. 4　Relationship between L and δ of LISD2 under H_∞ optimization

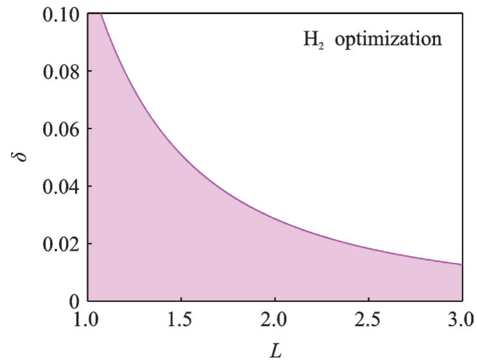
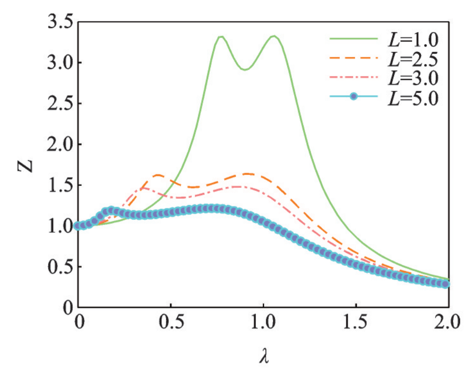


图5　LISD2在H_2优化下L和δ的关系

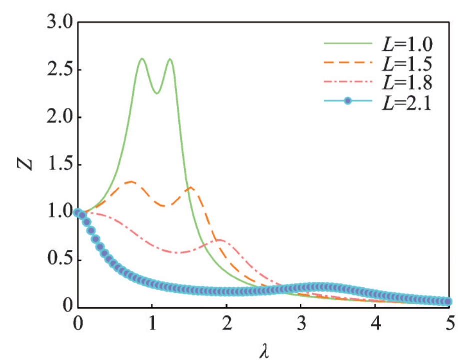
Fig. 5　Relationship between L and δ of LISD2 under H_2 optimization

由图6和7可知,LISD在惯质比取0.2时,放大比越大,幅频曲线的幅值越低,同时两个共振频率间距越大;当控制放大比不变时,惯质比越大,LISD的幅频曲线幅值越低,同时两个共振频率间距越大,减振效果越好。由图8可以看出,当惯质比和杠杆放大比的取值在合理范围内,随着两参数的增大,最优



(a) LISD1主系统幅频曲线

(a) The amplitude-frequency curves of LISD1

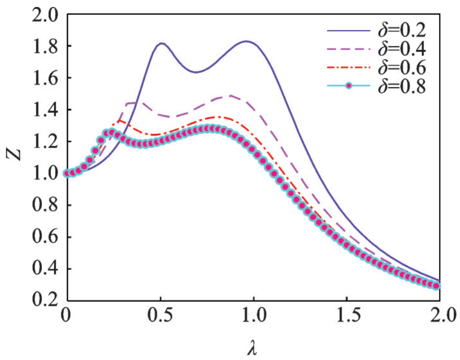


(b) LISD2主系统幅频曲线

(b) The amplitude-frequency curves of LISD2

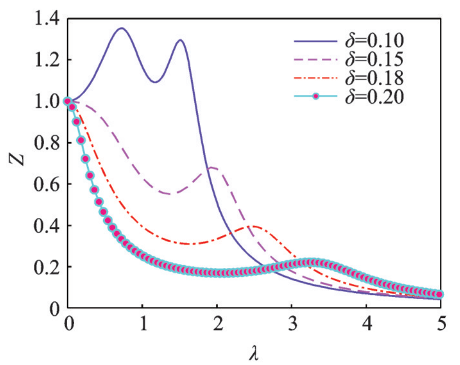
图6　$\delta=0.2$时,不同L下LISD主系统幅频曲线

Fig. 6　The amplitude-frequency curves of LISDs with different amplification ratios L at $\delta=0.2$



(a) L=2.5时,不同δ下LISD1主系统幅频曲线

(a) The amplitude-frequency curves of LISD1 with different inerter-to-mass ratios δ at L=2.5

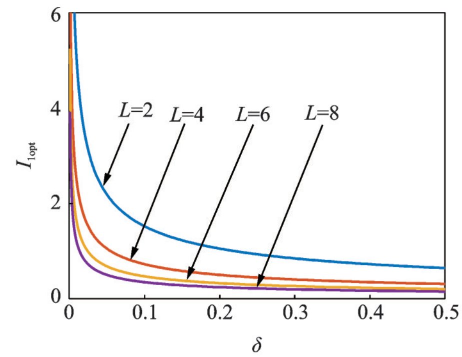


(b) L=2.1时,不同δ下LISD2主系统幅频曲线

(b) The amplitude-frequency curves of LISD2 with different inerter-to-mass ratios δ at L=2.1

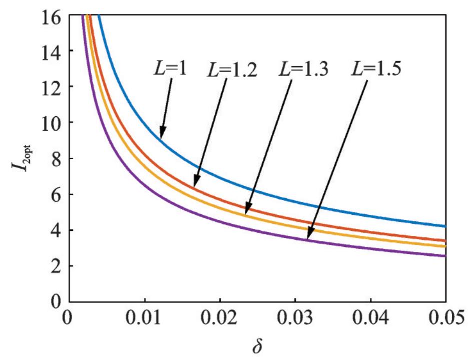
图 7 不同 δ 下 LISD 主系统幅频曲线

Fig. 7 The amplitude-frequency curves of LISDs with different inerter-to-mass ratios δ



(a) LISD1中最优性能指标与δ的关系

(a) Relationship between the optimal performance index and δ of LISD1



(b) LISD2中最优性能指标与δ的关系

(b) Relationship between the optimal performance index and δ of LISD2

图 8 LISD 中最优性能指标与 δ 的关系

Fig. 8 Relationship between the optimal performance index and δ of LISDs

性能指标越小,主系统受到的振动能量越少。

3 数值仿真

为了验证无量纲参数优化的正确性,这里选取 $\delta_1=0.5$, $\delta_2=0.2$, $L_1=2.5$, $L_2=1.8$, 和 $\delta_1=0.2$, $\delta_2=0.05$, $L_1=2$, $L_2=1.5$ 分别代入表 2 和 3 得到的最优参数,取 $F_0=800$ N,利用四阶龙格-库塔法,选取计算时间 800 s 得到在正弦激励下主系统响应的数值解。忽略瞬态响应,取稳态解的最大值为响应幅值并进行归一化处理,得到幅频响应曲线并与解析解对比。图 9 显示了数值解与解析解所得结果完全吻合(直线为系统的解析解),验证了本文推导过程和结果的正确性。

4 模型对比

4.1 主系统幅频响应曲线对比

为了验证 LISD 的减振性能,与其他经典 DVA 分别在 H_∞ 优化和 H_2 优化下的结果进行了对比。这里给出其他减振模型(即文献[2-3]中的模型,后文简称 Den 式和 Ren 式)的归一化幅频曲线,如图 10 所示。

从图 10 中可以看出,LISD 大幅降低了共振区的振幅,同时拓宽了减振频带,两峰值的间距拉大,明显在主系统减振方面有更好的效果。

4.2 随机激励下的响应对比

由于在实际工程中系统所受的激励大都为随机激励,所以在随机激励下系统的响应有着很重要的意义。设该系统受到均值为零、功率谱密度 $S(\omega)=S_0$ 的白噪声激励,则主系统绝对位移响应的功率谱密度函数为:

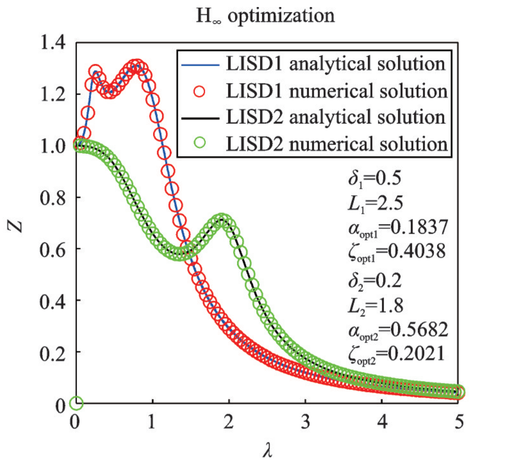
$$S_*(\omega)=\left|X_{1*}\right|^2 S_0 \tag{29}$$

而主系统位移均方值为:

$$\sigma_*^2=\int_{-\infty}^{\infty} S_*(\omega)\mathrm{d}\omega=S_0\int_{-\infty}^{\infty}\left|X_{1*}\right|^2\mathrm{d}\omega=\frac{\pi S_0 Y_*}{\omega_1^3} \tag{30}$$

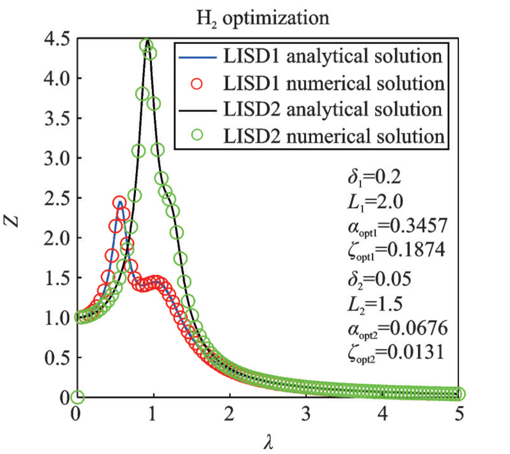
表 4 为各减振系统的无量纲参数 Y_* 和主系统响应的均方值。结果表明,在惯质比与质量比都为 0.05 的情况下,LISD 在随机激励下仍具有更好的减振效果。

为了得到更直观的图像变化过程,构建了 50 s 均值为 0、方差为 1 的随机激励,其时间历程如图 11 所示。选取主系统质量 $m=1$ kg,主系



(a) LISD在H∞优化下数值解与解析解对比

(a) Comparison between numerical results and analytical solutions of LISDs under H∞ optimization

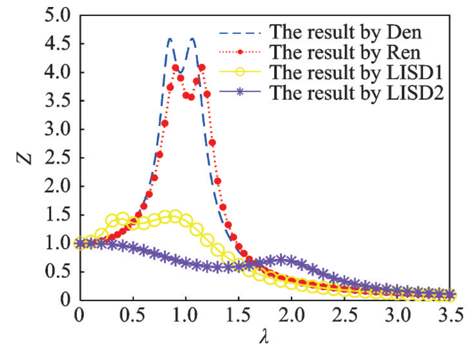


(b) LISD在H_2优化下数值解与解析解对比

(b) Comparison between numerical results and analytical solutions of LISDs under H_2 optimization

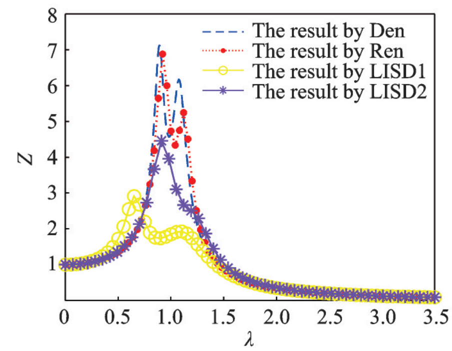
图 9　LISD 在两种优化方式下数值解与解析解对比

Fig. 9　Comparison between numerical results and analytical solutions of LISDs under H_∞ optimization or H_2 optimization



(a) H∞优化下LISD与其他减振模型对比

(a) Comparison between LISDs and other vibration mitigation models under H∞ optimization



(b) H_2优化下LISD与其他减振模型对比

(b) Comparison between LISDs and other vibration mitigation models under H_2 optimization

图 10　两种优化方式下 LISD 与其他减振模型对比

Fig. 10　Comparison between LISDs and other vibration mitigation models under H_∞ optimization or H_2 optimization

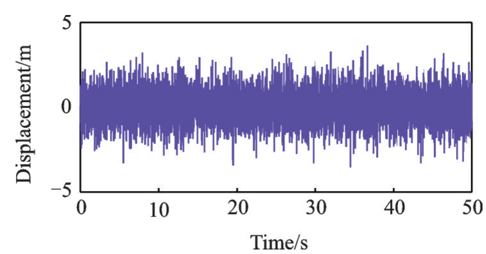


图 11　随机激励时间历程

Fig. 11　The time history of the random excitation

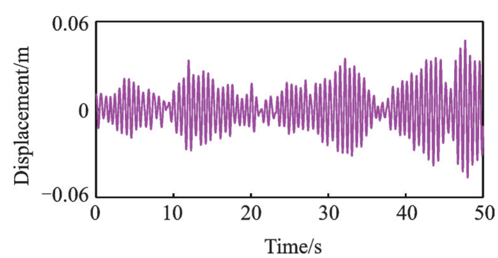


图 12　不含减振器的主系统时间历程

Fig. 12　The time history of the primary system without vibration mitigation models

统刚度 $k_1 = 100$ N/m，吸振器质量 m_2=0.05 kg 和惯容系数 b= 0.05 kg，杠杆放大比分别为 $L_1 = 3$ 和 $L_2 = 1.5$，LISD 的最优参数据由表 2 和 3 可得。基于四阶龙格-库塔法，可以得到无附加减振器和附加减振器的主系统响应。图 12～16 给出了主系统的时间历程。由于位移方差与系统振动能量相关，表 5 总结了主系统位移方差及衰减比。

由图 12～16 可知，附加 Voigt 式、Ren 式减振器的主系统与无减振器的主系统相比共振幅值大幅降低，幅值在 0.015 m 附近。而附加 LISD 减振器的主系统将幅值衰减至 0.01 m 附近。根据 H_2 优化结果可知，LISD1 仍可继续增加放大比以获得更小幅值，而 LISD2 的放大比已接近最优放大比。本文提出的 LISD 在随机激励下将主系统幅值控制在 0.01　m 附近，达到了更佳的减振效果，验证了 LISD 在减振方面的优势。由表 5 同样可以得出，LISD 能够在整个频率范围内大幅降低主系统振动能量。

表 4 LISD与其他减振机构主系统均方值比较

Tab. 4 Comparisons between the mean square responses of LISDS and other vibration mitigation models

Research	Model	Y_*	σ_*^2
Den Hartog/1928	Voigt	$\dfrac{1+\beta^4(1+\mu)^2+\beta^2(-2-\mu+4\zeta^2-4\zeta^2\mu)}{2\beta\zeta\mu}$	8.89ψ
Ren/2001	Ren	$\dfrac{1+\beta^4+\beta^2(-2+\mu+4\zeta^2)}{2\beta^5\zeta\mu}$	8.42ψ
Our Research	LISD1	$\dfrac{L^4\delta^2-L^2\alpha\delta(2+L^2\delta)+(\alpha+L^2\delta\alpha)^2+4\zeta_1^2(1+L^2\delta)}{2L^4\delta^2\zeta_1}$	2.86ψ
Our Research	LISD2	$\dfrac{\alpha^2+\delta^2+\alpha\delta(-2+L^2\delta)+4\zeta_1^2}{2L^2\alpha^2\zeta_1}$	5.11ψ

注：$\psi=\pi S_0/\omega_1^3$，$\beta=\omega_2/\omega_1$。

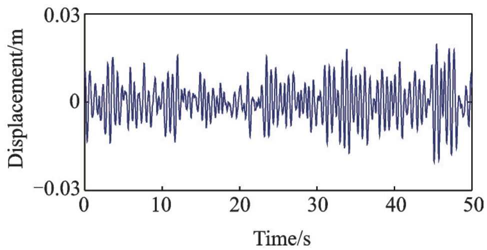


图 13 Voigt式主系统时间历程

Fig. 13 The time history of the primary system with Voigt DVA

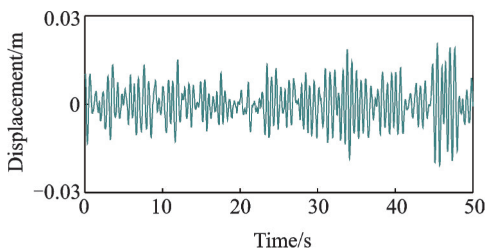


图 14 Ren 式主系统时间历程

Fig. 14 The time history of the primary system with Ren DVA

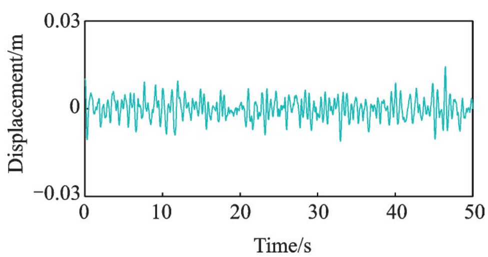


图 15 LISD1主系统时间历程

Fig. 15 The time history of the primary system with LISD1

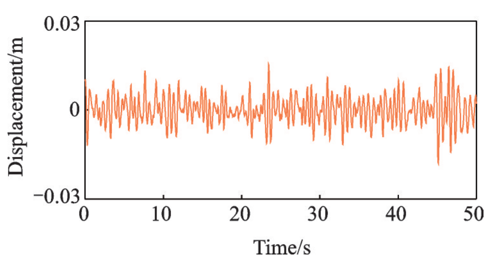


图 16 LISD2主系统时间历程

Fig. 16 The time history of the primary system with LISD2

表 5 主系统位移方差及衰减比

Tab. 5 The variances and decrease ratios of the displacements of the primary systems

Models	Variances	Decrease ratios/%
Without DVA	2.0083×10^{-4}	—
Voigt DVA	4.2178×10^{-5}	79.00
Ren DVA	4.0481×10^{-5}	79.84
LISD1	1.2294×10^{-5}	93.88
LISD2	2.2128×10^{-5}	88.98

5 结 论

建立了含有惯容和杠杆元件的LISD减振器模型的刚性基础，发现幅频曲线有两个固定点。根据固定点理论和最优性能指标进行H_∞与H_2优化，分别推导出最优刚度比和最优阻尼比。由H_∞优化下最优参数可知，LISD1中惯质比与杠杆放大比取值范围较大；LISD2中惯质比与杠杆放大比取值范围较小，但是LISD2在简谐激励下的减振效果更优。由H_2优化下最优参数可知，在随机激励下LISD1减振效果更好。进一步研究表明，惯质比和杠杆放大比取值范围内越大，系统减振性能越好。通过与其他经典减振系统比较，LISD不仅显著降低主系统振动幅值与谐振频率，还可以拓宽减振系统有效频率范围。与DVA相比较，LISD对于摆脱附加吸振质量更具实际意义。

参考文献：

[1] Frahm H. Device for damping vibrations of bodies[P]. U.S. Patent 0989958, 1911.

[2] Ormondroyd J, Den Hartog J P. The theory of the dynamic vibration absorber[J]. Journal of Applied Mechanics, 1928, 50: 9-22.

[3] Ren M Z. A variant design of the dynamic vibration absorber[J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 245(4): 762-770.

[4] Almazan J L, Llera J C D L, Inaudi J A, et al. A bidi-

rectional and homogeneous tuned mass damper: a new device for passive control of vibrations[J]. Engineering Structures, 2007, 29(7): 1548-1560.

[5] 赵艳影, 徐鉴. 时滞非线性动力吸振器的减振机理[J]. 力学学报, 2008, 40(1): 98-106.
Zhao Yanying, Xu Jian. Mechanism analysis of delayed nonlinear vibration absorber[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2008, 40(1): 98-106.

[6] Shen Y J, Wang L, Yang S P, et al. Nonlinear dynamical analysis and parameters optimization of four semi-active on-off dynamic vibration absorbers[J]. Journal of Vibration and Control, 2013, 19(1): 143-160.

[7] Shen Y J, Ahmadian M. Nonlinear dynamical analysis on four semi-active dynamic vibration absorbers with time delay[J]. Shock and Vibration, 2013, 20(4): 649-663.

[8] 彭海波, 申永军, 杨绍普. 一种含负刚度元件的新型动力吸振器的参数优化[J]. 力学学报, 2015, 47(2): 320-327.
Peng Haibo, Shen Yongjun, Yang Shaopu. Parameters optimization of a new type of dynamic vibration absorber with negative stiffness[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2015, 47(2): 320-327.

[9] Smith M C. Synthesis of mechanical networks: the inerter[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(10): 1648-1662.

[10] Chen M Z Q, Papageorgiou C, Scheibe F, et al. The missing mechanical circuit element[J]. IEEE Circuits and Systems Magazine, 2009, 9(1): 10-26.

[11] Wang F C, Chen C W, Liao M K, et al. Performance analyses of building suspension control with inerters[C]. 46th IEEE Conference on Decision and Control, 2007: 3786-3791.

[12] Wang F C, Yu C H, Chang M L, et al. The performance improvements of train suspension systems with inerters[C]. Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control, 2006: 1472-1477.

[13] Chen M Z Q, Hu Y, Shu Z. Passive vehicle suspensions employing inerters with multiple performance requirements[J]. Journal of Sound and Vibration, 2014, 333(8): 2212-2225.

[14] Chen M Z Q, Hu Y, Li C, et al. Application of semi-active inerter in semi-active suspensions via force tracking[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2016, 138(4): 041014.

[15] Hu Y, Chen M Z Q, Shu Z, et al. Analysis and optimisation for inerter-based isolators via fixed-point theory and algebraic solution[J]. Journal of Sound and Vibration, 2015, 346(1): 17-36.

[16] Hu Y, Chen M Z Q, Shu Z, et al. Vibration analysis for isolation system with inerter[C]. Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference, 2014: 6687-6692.

[17] Ikago K, Saito K, Inoue N. Seismic control of single-degree-of-freedom structure using tuned viscous mass damper[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2012, 41(3): 453-474.

[18] De Domenico D, Deastra P, Ricciardi G, et al. Novel fluid inerter based tuned mass dampers for optimised structural control of base-isolated buildings[J]. Journal of the Franklin Institute, 2019, 356(14): 7626-7649.

[19] Chen Q J, Zhao Z P, Xia Y Y, et al. Comfort based floor design employing tuned inerter mass system[J]. Journal of Sound and Vibration, 2019, 458: 143-157.

[20] 郜辉, 汪志昊, 许艳伟, 等. 惯容质量对斜拉索阻尼器减振增效作用试验研究[J]. 振动工程学报, 2019, 32(3): 377-385.
Gao Hui, Wang Zhihao, Xu Yanwei, et al. Experimental study on the improving effect of inertial mass on vibration control of stay cables with dampers[J]. Journal of Vibration Engineering, 2019, 32(3): 377-385.

[21] Zhao Z P, Zhang R F, Jiang Y Y, et al. A tuned liquid inerter system for vibration control[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2019, 164: 105171.

[22] 王勇, 汪若尘, 孟浩东. 一种具有几何非线性的斜置式惯容隔振器动态特性研究[J]. 振动与冲击, 2018, 37(21): 184-189.
Wang Yong, Wang Ruodong, Meng Haodong. Dynamic characteristics of an inclined inerter-based vibration isolator with geometric nonlinearity[J]. Journal of Vibration and Shock, 2018, 37(21): 184-189.

[23] Garrido H, Curadelli O, Ambrosini D. Improvement of tuned mass damper by using rotational inertia through tuned viscous mass damper[J]. Engineering Structures, 2013, 56: 2149-2153.

[24] Barredo E, Blanco A, Colín J, et al. Closed-form solutions for the optimal design of inerter-based dynamic vibration absorbers[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2018, 144: 41-53.

[25] 聂佳梅, 张孝良, 江浩斌, 等. 惯容器模型结构探索[J]. 机械设计与研究, 2012, 28(1): 29-32.
Nie Jiamei, Zhang Xiaoliang, Jiang Haobin, et al. Research on the inerter structure[J]. Machine Design and Research, 2012, 28(1): 29-32.

[26] Wang X R, He T, Shen Y J, et al. Parameters optimization and performance evaluation for the novel inerter-based dynamic vibration absorbers with negative stiffness[J]. Journal of Sound and Vibration, 2019, 463: 114941.

[27] 张瑞甫, 曹嫣如, 潘超. 惯容减震(振)系统及其研究进展[J]. 工程力学, 2019, 36(10): 8-27.
Zhang Ruifu, Cao Yanru, Pan Chao. Inerter system and its state-of-the-art[J]. Engineering Mechanics, 2019, 36(10): 8-27.

[28] 李壮壮, 申永军, 杨绍普, 等. 基于惯容-弹簧-阻尼的结构减振研究[J]. 振动工程学报, 2018, 31(6): 1061-1067.
Li Zhuangzhuang, Shen Yongjun, Yang Shaopu, et al. Study on vibration mitigation based on inerter-spring-damping structure[J]. Journal of Vibration Engineering, 2018, 31(6): 1061-1067.

[29] 李壮壮, 申永军. 单自由度系统强迫激励下惯容对Kelvin模型和Maxwell模型的影响[J]. 石家庄铁道大学学报(自然科学版), 2019, 32(1): 24-30.
Li Zhuangzhuang, Shen Yongjun. Influence of inerter on Kelvin and Maxwell models under forced excitation for single-degree-of-freedom system[J]. Journal of Shijiazhuang Tiedao University (Natural Science Edition), 2019, 32(1): 24-30.

[30] 秦美娟, 金肖玲, 陈志强, 等. 具惯容离心摆的轴系结构轴向振动减振分析[J]. 振动与冲击, 2018, 37(22): 36-42.
Qin Meijuan, Jin Xiaoling, Chen Zhiqiang, et al. Axial

vibration reduction of a shaft structure using a centrifugal pendulum absorber with inerters[J]. Journal of Vibration and Shock, 2018,37(22): 36-42.

[31] 孙晓强，陈龙，汪少华，等. 非线性惯容器-弹簧-阻尼悬架系统隔振性能分析[J]. 农业工程学报，2013，29(23)：38-45.
Sun Xiaoqiang, Chen Long, Wang Shaohua, et al. Analysis of vibration isolation performance for nonlinear inerter-spring-damper suspension [J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering, 2013, 29(23): 38-45.

[32] 昝浩，温华兵，潘朝峰，等. 惯容器对双层隔振系统动态性能的影响[J]. 机械设计与研究，2015，31(3)：17-21.
Zan Hao, Wen Huabing, Pan Chaofeng, et al. The study of dynamic property analysis of the two-stage vibration isolation system for inerter[J]. Machine Design and Research, 2015, 31(3): 17-21.

[33] 昝浩，温华兵，范紫岩. 含惯容器的多层隔振系统动态性能研究[J]. 江苏科技大学学报(自然科学版)，2015，29(2)：131-137.
Zan Hao, Wen Huabing, Fan Ziyan. Study of dynamic property of multi-stage vibration isolation system with inerter[J]. Journal of Jiangsu University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2015, 29(2): 131-137.

[34] 王勇，汪若尘，孟浩东，等. 基于相对加速度-相对速度控制的半主动惯容隔振器动态特性研究[J]. 振动与冲击，2019，38(21)：194-201.
Wang Yong, Wang Ruochen, Meng Haodong, et al. Dynamic characteristics of semi active inerter-based vibration isolator with relative acceleration-relative velocity control [J]. Journal of Vibration and Shock, 2019, 38(21): 194-201.

[35] 李春祥，熊学玉. 杠杆式调谐质量阻尼器(LT-TMD)新模型策略的动力特性[J]. 四川建筑科学研究，2003，29(4)：73-75.
Li Chunxiang, Xiong Xueyu. Dynamic characteristics of new modeling strategy of lever tuned mass damper (LT-TMD) [J]. Building Science Research of Sichuan, 2003, 29(4): 73-75.

[36] 汪正兴，任文敏，陈开利. 斜拉索杠杆质量减振器的减振分析[J]. 工程力学，2007，24(11)：153-157.
Wang Zhengxing, Ren Wenmin, Chen Kaili. Analysis on inclined cable vibration suppression using lever mass damper[J]. Engineering Mechanics, 2007,24(11): 153-157.

[37] Zang Jian, Yuan Tianchen, Lu Zeqi, et al. A lever-type nonlinear energy sink[J]. Journal of Sound and Vibration, 2018, 437: 119-134.

[38] 刘建武，叶茂，谢秋林. 基于杠杆原理阻尼器关键机理和有限元分析[J]. 华南地震，2019，39(4)：98-103.
Liu Jianwu, Ye Mao, Xie Qiujin. Key mechanism and finite element analysis of damper based on lever principle[J]. South China Journal of Seismology, 2019, 39(4): 98-103.

[39] 邢昭阳，申永军，邢海军，等. 一种含放大机构的负刚度动力吸振器的参数优化[J]. 力学学报，2019，51(3)：894-903.
Xing Zhaoyang, Shen Yongjun, Xing Haijun, et al. Parameters optimization of a dynamic vibration absorber with amplifying mechanism and negative stiffness [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2019, 51(3): 894-903.

Parameter optimization and performance analysis of vibration mitigation systems with inertia and lever components

ZHOU Zi-bo[2], *SHEN Yong-jun*[1,2], *XING Hai-jun*[1,2], *WEN Shao-fang*[1], *YANG Shao-pu*[1,2]

(1.State Key Laboratory of Mechanical Behavior and System Safety of Traffic Engineering Structures, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China; 2.School of Mechanical Engineering, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China)

Abstract: Inertia and lever components are both force amplification elements in essence, and show excellent performance in the field of vibration control. In order to improve the vibration mitigation performance, two new vibration systems with amplifying mechanisms based on ISD (Inerter-Spring-Damper) structure are designed, and the vibration mitigation effects are studied in detail when the models are subjected to external excitation. Firstly, the dynamic equations are established according to Newton's second law and the analytical solutions of the systems are obtained. It is found that there always exist fixed points independent of the damping ratio in the normalized amplitude-frequency curves. The optimal parameters are respectively obtained based on the H_∞ and H_2 criteria. In addition, the influences of the inerter-to-mass ratio and amplification ratio on the vibration performances are studied. It could be found that the peak values of amplitude-frequency curves are reduced and the distance between two resonance frequencies is broadened when the inerter-to-mass ratio and amplification ratio are increased within a certain range. The correctness of the analytical results is verified by the comparison with numerical simulation. Compared with other systems under harmonic and random excitations, the results show that the presented vibration mitigation systems can greatly reduce the resonance amplitude and broaden the frequency band, and have much better vibration performance.

Key words: vibration control; inerter; lever component; force amplification elements; parameter optimization

作者简介：周子博(1995—)，男，硕士研究生。电话：18332961335；E-mail：344159979@qq.com。

通讯作者：温少芳(1979—)，女，博士，教授。电话：(0311)87935516；E-mail：wsf39811@163.com。