

# 振荡激波作用下壁板的非线性动力学特性分析

叶柳青, 叶正寅

(西北工业大学航空学院, 陕西 西安 710072)

**摘要:** 冲压发动机内部的激波串往往存在振荡特征, 揭示此种状态下壁板的气动弹性特性对结构安全性具有重要指导作用。基于 von Kármán 大变形理论和当地一阶活塞流理论, 采用 Galerkin 方法建立了振荡激波作用下壁板的非线性动力学方程, 通过龙格-库塔法对非线性动力学方程进行数值积分求解, 在不同的系统参数(即激波强度、激波振荡幅值以及振荡频率)下, 取来流动压为分岔参数, 研究壁板在振荡激波作用下的分岔及混沌等复杂动力学特性。计算结果表明: 与激波位置固定情况相比, 壁板在振荡激波作用下表现出更加丰富的动力学行为, 其分岔特性更加复杂。极限环幅值随着激波强度和振荡幅值的增大而增大。激波的振荡容易激发出混沌运动, 并且通往混沌的道路为准周期道路。激波强度的增大不会改变通往混沌的道路, 而当激波振荡幅值大幅度提高时, 不仅混沌区域显著增大, 通往混沌的道路不再是准周期道路, 而是经历更为复杂的过程进入混沌。

**关键词:** 极限环; 混沌; 分岔; 振荡激波; 当地活塞流理论

**中图分类号:** O322; V215.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2022)02-0464-11

**DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2022.02.022

## 引言

冲压/超燃冲压发动机<sup>[1]</sup>是一类结构简单的吸气式发动机, 直接利用空气作为燃料氧化剂, 其推进剂的比冲(用于衡量火箭或飞机发动机效率的重要物理参数)比火箭发动机高数倍, 是下一代发动机的首选。这类发动机结构形式主要为薄壁板结构, 其气动弹性主要表现为壁板颤振的方式。壁板颤振是壁板结构在惯性力、弹性力和气动力耦合作用下产生的一种动态失稳现象。不同于机翼颤振导致结构迅速的破坏, 壁板颤振振动的幅值一般受到结构非线性的限制不会引发迅速的破坏, 而更多的是造成结构的疲劳损伤。虽然不同于机翼颤振一定会造成严重的飞行事故, 但是剧烈的壁板颤振将会对壁板结构的疲劳寿命甚至飞行器的飞行性能产生不利的影响。

壁板颤振系统的研究始于 20 世纪 50 年代, 其分析内容主要有两方面: 1) 壁板的线性颤振边界分析, 即确定壁板颤振发生的临界条件, 并研究系统参数对壁板颤振临界速度的影响规律; 2) 壁板颤振的非线性颤振响应分析, 即求解得到非线性颤振响应的幅值和频率, 其中特别关注系统响应性质发生转变的情况, 如由周期性极限环颤振转变为混沌颤振。

由于不同的振动形式, 估计壁板疲劳寿命的算法不同, 因此研究壁板非线性气动弹性系统中出现的各种复杂的响应也是壁板颤振分析中一项非常重要的内容。Dowell<sup>[2]</sup>通过改变动压和面内力, 研究了简支板的混沌现象。结果表明, 对于各向同性简支板, 当面内力足够大时, 动压超过一定值就会出现混沌现象。不仅考虑热应力, 还考虑随着温度的升高材料的机械性能发生改变, 叶献辉等<sup>[3]</sup>研究了热环境下二维壁板的非线性颤振特性, 结果表明, 系统呈现出丰富的动力学行为, 包括衰减振动、极限环振动、拟周期振动和混沌振动。杨智春等<sup>[4]</sup>采用带有曲率修正的一阶活塞理论, 对超音速气流中受热壁板的动力学行为进行研究。Wang 等<sup>[5]</sup>对黏弹性壁板在壁板两面都受到气动力作用时的分岔特性和混沌响应进行了研究, 结果表明, 黏弹性阻尼可以有效地抑制混沌运动。

对于冲压/超燃冲压发动机来说, 在发动机内部流场中存在着复杂的波系<sup>[6]</sup>, 因此有必要对激波作用的流场中薄壁板的气动弹性特性进行研究。假定激波位置固定在二维壁板的中点不变, Visbal<sup>[7-8]</sup>从数值的角度分别研究了无黏流场与黏性流场中受激波作用的二维壁板气动弹性问题。Brouwer 等<sup>[9]</sup>提出了用当地活塞流理论来预测有激波作用的流场中气动力的可行性。Ye 等<sup>[10]</sup>基于当地活塞流理论, 建

立了激波作用下壁板气动弹性稳定性的理论分析模型,推导出了受热壁板发生气动弹性失稳的边界条件,并分析了激波强度、激波冲击位置对临界颤振动压的影响。采用双向流固耦合算法,李映坤等<sup>[11]</sup>研究了斜激波冲击作用下曲壁板的气动弹性响应特性。上述的研究都假定激波位置固定不变,但实际上,冲压/超燃发动机内部的激波串往往存在振荡特征<sup>[12-13]</sup>。目前仅有少量的文献考虑激波位置随时间发生改变。Miller等<sup>[14]</sup>基于 von Kármán 大变形板弯理论、CFD 代理模型和热传导理论建立了基于流固热的气动弹性分析模型,可对运动激波作用下的壁板气动弹性响应进行长时间的计算。Brouwer等<sup>[9]</sup>在流场中设置正弦振动的激波发生器来产生振荡激波,采用 CFD 和活塞流理论结合的方式进行气动力建模,分别计算了振荡激波主导流场中作用在二维和三维壁板上的非定常气动力。其中气动力的定常部分和非定常分量分别由 CFD 和活塞理论计算得到。结果发现计算得到的广义气动力与非定常 CFD 的计算结果吻合较好,由此说明了此方法预测振荡激波流场中气动力的可行性。Dennis等<sup>[15]</sup>采用风洞实验对在快速移动的激波作用下弹性壁板的气动弹性特性进行了初步的研究,结果表明,与激波位置固定不变的情况相比,弹性壁板在快速移动的激波作用下振动幅值显著提高。对于弹性壁板在振荡激波作用下的分岔及混沌等复杂动力学特性,还鲜有系统性的研究报道。

本文针对振荡激波作用下壁板的非线性动力学问题,基于 von Kármán 大变形理论及当地一阶活塞流理论,采用 Galerkin 方法建立了振荡激波作用下二维壁板的非线性动力学方程,通过龙格-库塔法对非线性动力学方程进行数值积分求解,分析了系统参数(即激波强度、激波振荡幅值以及激波振荡频率)对壁板分岔特性及混沌运动的影响。其中,为了准确识别和分析壁板在振荡激波作用下的非线性动力学行为,使用相图、Poincaré 映射图以及最大 Lyapunov 指数(Largest Lyapunov Exponent, LLE)来进行判断和分析。研究工作不仅加深了对弹性壁板在振荡激波作用下的非线性动力学行为的理解,研究结论对超声速飞行器壁板设计也有一定的参考价值。

## 1 激波振荡流场中壁板的运动方程

考虑一个长度为  $l$  的二维各向同性材料壁板,如图 1 所示,假定壁板两端为简支边界条件。壁板的上表面受振荡斜激波冲击的作用,下表面有空腔压力  $P_d$  的作用。壁板上表面入射斜激波前的气流密度、

速度和马赫数分别为  $\rho_{u,l}, U_{u,l}, Ma_{u,l}$ , 反射斜激波后的气流密度、速度和马赫数分别为  $\rho_{u,r}, U_{u,r}, Ma_{u,r}$ 。下标  $u, d$  分别代表壁板上、下表面;  $l, r$  分别代表左端和右端。根据 Hamilton 原理和 von Kármán 大变形板弯理论,壁板在振荡斜激波作用下的运动方程为:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p(x, t) = 0 \quad (1)$$

式中  $w$  为壁板横向位移,  $x$  为壁板沿流向的坐标,  $t$  为时间。  $D = Eh^3/[12/(1-\nu^2)]$  为壁板的抗弯刚度,  $E$  为材料拉伸弹性模量(杨氏模量),  $\nu$  为泊松比。  $\rho, l, h$  分别表示壁板的密度、长度和厚度。

在实际工程问题中,为了使问题得到简化,一般根据薄板变形的大小,将薄板分成小挠度薄板、大挠度薄板以及柔韧薄膜等三种类型。当薄板最大挠度为厚度的  $\frac{1}{5} \sim 5$  倍时,可以看作是大挠度薄板,其中面内的应变不能忽略,薄膜力的影响应该考虑,此时应该考虑非线性结构模型;由于本文研究的范围为:  $\frac{1}{5}h \leq w_{\max} \leq 5h$ , 属于大挠度薄板研究范畴,因此这里采用 Von-Kármán 大变形理论计入壁板的几何非线性效应,  $N_x = \frac{Eh}{2l(1-\nu^2)} \int_0^l \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx$  为几何非线性效应引起的附加面内力。

为了有效地预测振荡激波流场中的气动力,这里采用当地一阶活塞理论。文献[9]已经表明,采用当地活塞流理论计算激波主导流动中的气动力,具有较高的计算效率和较为精确的结果。当地活塞流理论<sup>[16]</sup>的表达式为:

$$\frac{p}{p_{\text{loc}}} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{w}{a_{\text{loc}}} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \quad (2)$$

式中  $\gamma$  为空气比热比,  $p_{\text{loc}}$  和  $a_{\text{loc}}$  分别表示当地静压和当地音速。在入射斜激波前和反射斜激波后的当地流动参数是不同的,它们可以通过实验测量和 CFD 计算得到。

基于当地一阶活塞理论,得到壁板上表面入射斜激波前的气动力为:

$$p_{u,l} = p_{\text{loc}(u,l)} + \frac{2q_{u,l}}{Ma_{u,l}} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{U_{u,l}} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \quad (3)$$

壁板上表面反射斜激波后的气动力为:

$$p_{u,r} = p_{\text{loc}(u,r)} + \frac{2q_{u,r}}{Ma_{u,r}} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{U_{u,r}} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \quad (4)$$

式中  $p_{\text{loc}(u,l)}$  为作用于壁板上表面入射斜激波前的静压,  $p_{\text{loc}(u,r)}$  为作用于壁板上表面反射斜激波后的静压;  $q_{u,l} = \rho_{u,l} U_{u,l}^2 / 2$  和  $q_{u,r} = \rho_{u,r} U_{u,r}^2 / 2$  分别为壁板上表面入射斜激波前和反射斜激波后气流的动压。

考虑壁板下表面作用有静压  $p_d$ , 进一步得到入射斜激波前作用在壁板的上下压差为:

$$p_{u,l} - p_d = p_{loc(u,l)} - p_d + \frac{2q_{u,l}}{Ma_{u,l}} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{U_{u,l}} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \quad (5)$$

反射斜激波后作用在壁板的上下压差为:

$$p_{u,r} - p_d = p_{loc(u,r)} - p_d + \frac{2q_{u,r}}{Ma_{u,r}} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{U_{u,r}} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \quad (6)$$

文献[13,17]通过风洞实验观察到进气道/隔离段内激波串存在周期性的振荡现象, 并通过对测点处压力信号进行快速傅里叶分析得到其振荡主频。在本文中, 为简化分析模型并考虑主频的振荡, 这里假设斜激波围绕壁板中点作简谐振动, 即激波位置围绕壁板中点作简谐振动。如图 1 所示,  $x_i$  为入射斜激波冲击在壁面上的冲击点距壁板左端的距离, 设  $x_i = 0.5l + a \sin \omega t$ 。其中,  $a$  为激波振荡的幅值,  $\omega$  为激波振荡的频率。因此, 振荡激波流场中作用在弹性壁板上的气动力可以表示为:

$$p(x, t) = \begin{cases} p_{loc(u,l)} - p_d + \frac{2q_{u,l}}{Ma_{u,l}} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{U_{u,l}} \frac{\partial w}{\partial t} \right) & \text{当 } 0 \leq x \leq 0.5l + a \sin \omega t \\ p_{loc(u,r)} - p_d + \frac{2q_{u,r}}{Ma_{u,r}} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{U_{u,r}} \frac{\partial w}{\partial t} \right) & \text{当 } 0.5l + a \sin \omega t \leq x \leq l \end{cases}$$

引入如下无量纲参数:

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \tau = t \sqrt{\frac{D}{\rho h l^4}}, \quad W = \frac{w}{h},$$

$$\lambda_{u,l(\tau)} = \frac{2q_{u,l(\tau)} l^3}{Ma_{u,l(\tau)} D}, \quad \mu_{u,l(\tau)} = \frac{\rho_{u,l(\tau)} l}{\rho h},$$

$$R_x = \frac{N_x l^2}{D} = 6 \int_0^1 \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 d\xi, \quad A = \frac{a}{l},$$

$$R_{Mu,l(\tau)} = \frac{\mu_{u,l(\tau)}}{Ma_{u,l(\tau)}}, \quad \bar{p} = \frac{l^4}{Dh} p, \quad A = \frac{a}{l},$$

$$\omega_f = \omega \sqrt{\frac{\rho h l^4}{D}},$$

$$\bar{p}_{loc(u,l)} = \frac{l^4}{Dh} p_{loc(u,l)}, \quad \bar{p}_{loc(u,r)} = \frac{l^4}{Dh} p_{loc(u,r)}, \quad \bar{p}_d = \frac{l^4}{Dh} p_d$$

将运动方程(1)无量纲化为:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} - R_x \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial W}{\partial \xi^4} + \bar{p} = 0 \quad (7)$$

采用 Galerkin 方法, 将位移函数展开成各阶谐波模态的叠加。根据简支边界条件, 假设位移函数为:

$$W(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(\tau) \sin(i\pi\xi) \quad (8)$$

将上式代入方程(1)中, 对方程各项同时积分, 并沿着板长积分。由于壁板上表面振荡激波的存在, 壁板左右两端的上下压差不同, 采用 Galerkin 方

法对气动力项的处理如下:

$$\int_0^1 \bar{p} d\xi = \int_0^{0.5+A \sin(\omega_f \tau)} (\bar{p}_{u,l} - \bar{p}_d) d\xi + \int_{0.5+A \sin(\omega_f \tau)}^1 (\bar{p}_{u,r} - \bar{p}_d) d\xi \quad (9)$$

式中  $\omega_f$  代表激波振荡的无量纲频率。

以上可得到离散后的壁板运动方程, 为减缩分析的规模, 假设壁板变形以前  $N$  阶谐波模态为主, 即只用前  $N$  阶谐波的叠加来构成壁板的位移函数, 并记  $\dot{q} = \partial q / \partial \tau$ ,  $\ddot{q} = (\partial q / \partial \tau) / \partial \tau$ 。由此, 可以推导出振荡激波作用下壁板运动的状态空间方程:

$$\ddot{q}_j(\tau) + 3(j\pi)^2 q_j(\tau) \sum_{i=1}^N (i\pi)^2 q_i^2(\tau) + (j\pi)^4 q_j(\tau) - Q = 0 \quad (j=1, 2, 3, \dots, N) \quad (10)$$

上式为弹性壁板在振荡激波流场中运动方程, 为了验证其推导方程的正确性, 将结果与文献[6, 18]进行对比。文献[6]推导了激波位置固定在二维壁板中点, 并忽略静压差时壁板的气动弹性方程, 令式(10)中  $A=0$  或者  $\omega_f=0$ , 并且  $\bar{p}_{loc(u,l)} = \bar{p}_d$ ,  $\bar{p}_{loc(u,r)} = \bar{p}_d$ , 可见得到的结果与文献[6]中的结果一致。Dowell<sup>[18]</sup>推导了考虑静压差时, 壁板在超音速气流中的运动方程(即经典壁板颤振情况), 令式(10)中  $A=0$  或者  $\omega_f=0$ ,  $\lambda_{u,l} = \lambda_{u,r}$ ,  $\bar{p}_{loc(u,l)} = \bar{p}_{loc(u,r)}$ , 得到的方程与文献[18]完全一致。

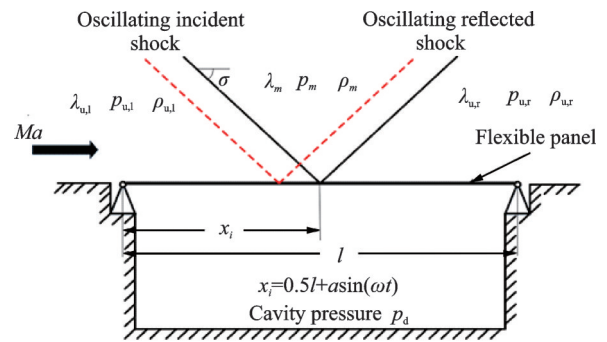


图 1 受振荡激波冲击的二维壁板

Fig. 1 Schematic of flow configuration for oscillating oblique shock impinging on a flexible panel

## 2 模型验证

本文以一块长 205 mm, 厚 0.762 mm 的准各向同性简支二维壁板为例, 分析壁板在振荡激波作用下的非线性动力学特性。根据文献[19], 壁板材料为 T50-221-44 三维 C/C 复合材料, 其力学性能参数为: 杨氏模量  $E=57.9$  GPa, 泊松比  $\nu=0.31$ , 密度  $\rho=1900$  kg/m<sup>3</sup>。

文献[13]实验发现在二元进气道/隔离段内的激波串存在大幅度低频振荡和小幅度高频振荡两种典型的振荡模式,在大幅度振荡模式中,其振荡主频为280~480 Hz;在小幅度振荡模式中,其振荡主频为900~1800 Hz。对于本文研究的壁板模型来说,第 $j$ 阶无量纲固有频率为 $(j\pi)^2$ 。本文根据文献[13],选取激波振荡的频率 $f=300$  Hz以及 $f=1800$  Hz进行研究。当激波振荡频率 $f=300$  Hz时,转化为无量纲频率 $\omega_f=10$ ,可见此激波振荡频率非常接近壁板第一阶固有频率。当激波振荡频率 $f=1800$  Hz时,转化为无量纲频率 $\omega_f=60$ ,此激波振荡频率远离壁板固有频率。

在上节中已经推导出了壁板在振荡斜激波作用下运动的非线性动力学方程,本文采用固定时间步长的四阶Runge-Kutta法对非线性动力学方程(即式(10))进行数值积分,取无量纲时间步长 $\Delta\tau=0.001$ ,初值 $W_0(\xi)=1$ ,观察壁板上顺气流75%长度( $\xi=0.75$ )处的时间响应历程,从而对振荡斜激波作用下壁板的非线性动力学响应特性进行分析。

马赫数和激波角均是影响激波强度的关键因素,随着马赫数和激波角的增大,激波强度不断增大。这里通过改变激波角来改变激波强度,固定入射斜激波前的来流马赫数 $Ma=3.5$ ,改变激波角,通过斜激波关系式计算入射斜激波前与反射斜激波后的无量纲静压比与无量纲动压比,如表1所示。

表1 不同激波角下的静压比和动压比

Tab. 1 Static pressure ratios and dynamic pressure ratios with different shock angle  $\sigma$

$\sigma/(\circ)$	$p_{u,r}/p_{u,1}$	$\lambda_{u,r}/\lambda_{u,1}$
18	1.4862	1.3802
20	2.0758	1.8050
22	3.2955	2.5969

从第1节中无量纲参数表达式可以看出,来流速度越大,入射斜激波前来流的无量纲动压 $\lambda_{u,1}$ 也会越大。从表1可以看出,反射斜激波后与入射斜激波前的无量纲动压比 $\lambda_{u,r}/\lambda_{u,1}$ 都大于1,并且该动压比随着激波角的增大而不断地增大。

参考文献[7-8]中壁板下表面空腔压力的取值,这里令 $\bar{P}_d = \frac{1}{2}(\bar{P}_{u,1} + \bar{P}_{u,r})$ 。

## 2.1 数值方法验证

为了验证本文数值方法的准确性,将计算结果与Dowell<sup>[18]</sup>进行对比。图2显示了模态数目分别取 $N=2, 4, 6$ 时,极限环幅值随动压的变化,从图中可以看出计算结果与文献[18]中计算结果基本一致。

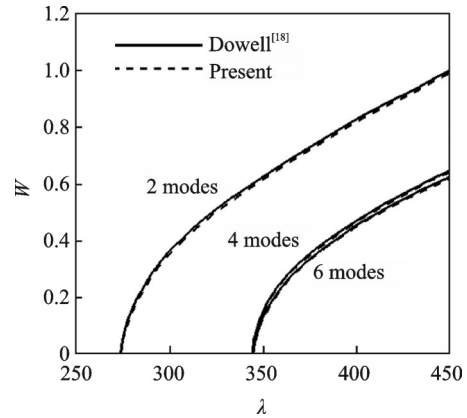


图2 本文结果与文献[18]结果比较

Fig. 2 Comparison between present and Ref. [18] result

## 2.2 模态收敛性分析

为了研究不同模态数目对振荡激波作用下壁板响应的影响,图3(a)示出了当来流动压较小以及模态数目分别取 $N=2, 4, 6$ 时,极限环幅值随动压的变化;图3(b)示出了当来流动压较大,模态数目分别取 $N=2, 4, 6$ 时壁板的动力学响应。由图3可见,在分析壁板在振荡激波作用下作单周期LCO运动时,至少要取二阶谐波模态,而在分析复杂动力学响应时,计算中至少要取四阶谐波模态。

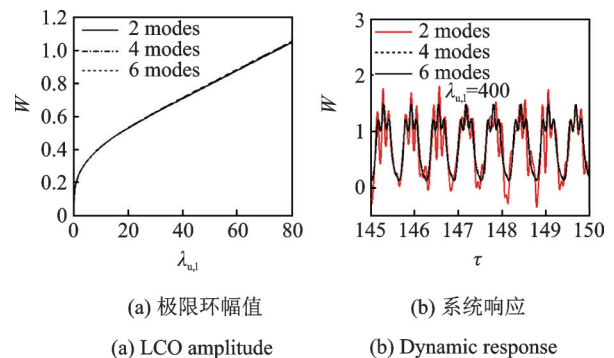


图3 模态数目对极限环幅值和系统响应的影响( $\sigma=18^\circ$ ,  $A=0.1$ ,  $\omega_f=10$ )

Fig. 3 Influence of modal numbers on LCO amplitude and system responses( $\sigma=18^\circ$ ,  $A=0.1$ ,  $\omega_f=10$ )

## 3 系统参数对极限环幅值的影响

一般来说,在非线性动力学特性分析中,极限环振荡的幅值是一个重点的关注对象。当来流动压较小时,壁板在振荡激波的作用下为单周期的极限环振动。本节主要分析激波强度与激波振荡幅值对极限环幅值的影响。

首先分析激波强度的影响,假设斜激波在壁板上作简谐振动,令无量纲振荡幅值 $A=0.1$ ,无量纲振荡频率 $\omega_f=10$ ,图4(a)给出了不同激波强度下,壁板作极限环振动的幅值随无量纲来流动压的变化

规律。从图中可以看出,极限环幅值随着无量纲来流动压的增大而增大,并且激波角越大,极限环的幅值也越大。

假定激波角  $\sigma=18^\circ$ , 无量纲振荡频率  $\omega_{\cdot}f=10$ , 图 4(b) 给出了不同激波振荡幅值下, 壁板作极限环振动的幅值随无量纲来流动压的变化规律, 从图中可以看出, 随着激波振荡幅值的增加, 极限环幅值不断增大。

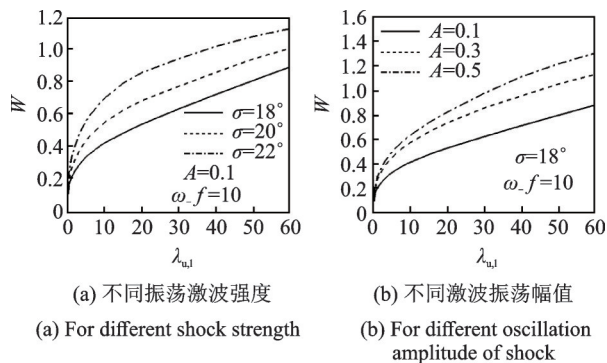


图 4 不同振荡激波强度和激波振荡幅值下极限环幅值随动压的变化

Fig. 4 LCO amplitude versus dynamic pressure with different shock strength and oscillation amplitude of shock

#### 4 复杂非线性动力学响应特性

当来流动压、激波强度或者激波振荡的幅值比较大时, 壁板在振荡激波的作用下, 多种频率成分的运动会被激发出来, 如多周期 LCO 运动、准周期运动甚至更为复杂的混沌运动。本节进一步探索系统参数(激波强度、激波振荡幅值以及激波振荡频率)对壁板复杂动力学响应的影响规律, 尤其对分岔、混沌等复杂动力学现象进行研究。

在进行分岔特性分析中, 将无量纲来流动压  $\lambda_{u,1}$  作为可变参数, 提取壁板上顺气流 75% 长度处稳态位移响应幅值的局部极值来绘制分岔图。在分岔计算中, 动压增量  $\Delta\lambda_{u,1}=1$ 。为了准确识别和分析壁板在振荡激波作用下的非线性动力学行为, 使用相图、Poincaré 映射图以及最大 Lyapunov 指数来进行判断和分析。其中, Poincaré 映射图是基于系统某个状态发生时所绘制得到的, 这里所选取的状态为: 当辨识点 ( $\xi=0.57$ ) 的位移为零且速度为正时, 记录参考点 ( $\xi=0.75$ ) 处的位移和速度。Poincaré 映射图可以定性识别复杂的动力学响应, 而 Lyapunov 指数可以定量判别混沌运动。

##### 4.1 激波位置固定与振荡时的对比

首先, 将激波位置固定时系统的分岔特性与激

波振荡时情况进行对比。图 5 为激波角  $\sigma=18^\circ$ , 激波位置固定 ( $A=0$ ) 时, 壁板位移响应峰值、谷值随动压变化的分岔特性图。从图中可以看出, 随着动压的增加, 首先在  $\lambda_{u,1}=543$  时发生第一次分岔。当  $\lambda_{u,1}<543$  时, 壁板受到初始扰动后, 响应幅值随着时间不断衰减为零, 最后稳定在初始的平衡位置上。由于激波的存在, 壁板会受到静压差的作用, 因此壁板初始平衡状态不再是平壁板状态, 而会发生静变形。随着动压的增加, 在  $\lambda_{u,1}=610$  时会发生第二次分岔。当动压  $543<\lambda_{u,1}<610$  时, 壁板表现为单周期 LCO 运动, 图 6(a) 给出了动压  $\lambda_{u,1}=580$  时, 壁板动力学响应的相图。从图 5 可见当动压增加至

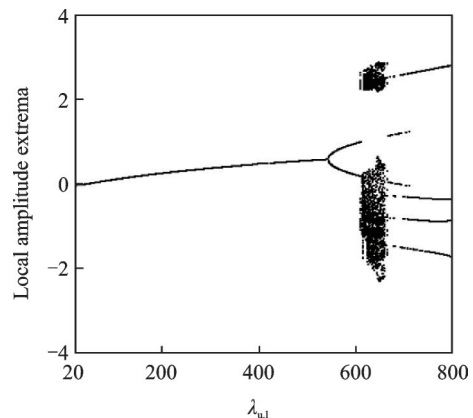


图 5  $\sigma=18^\circ, A=0$  壁板分岔特性

Fig. 5 Bifurcation diagram for  $\sigma=18^\circ, A=0$

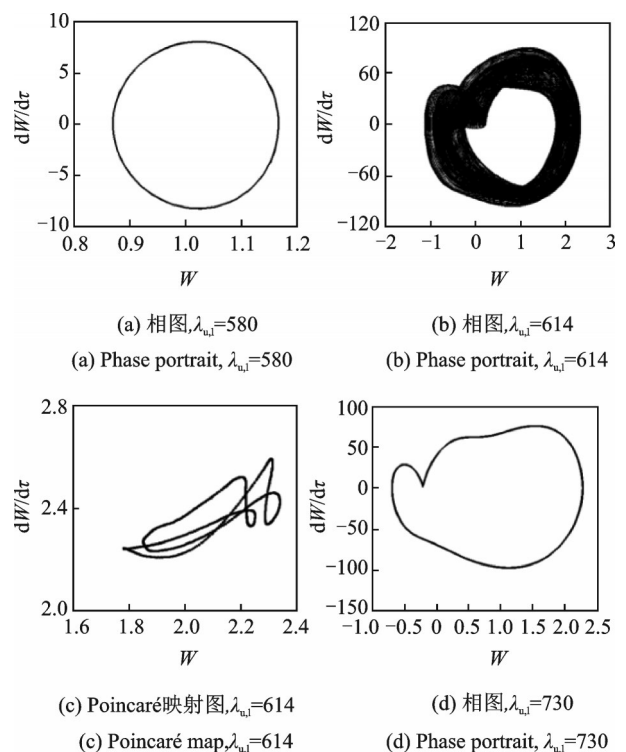


图 6 典型动压下系统响应的相图与 Poincaré 映射图

Fig. 6 Phase portraits and Poincaré maps for several typical dynamic pressures

$\lambda_{u,1} = 610$ , 幅值发生跳跃, 系统响应在  $610 < \lambda_{u,1} < 660$  的范围内表现为准周期运动。图 6(b) 和 (c) 分别给出了动压  $\lambda_{u,1} = 614$  时, 系统响应的相图和 Poincaré 映射图。图 6(c) 中的 Poincaré 映射图表现为一条闭合的环, 表明系统作准周期运动。随着动压进一步增加, 在动压  $\lambda_{u,1} = 660$  时系统再次发生分岔, 其运动响应又变为单周期 LCO 运动, 图 6(d) 给出了动压  $\lambda_{u,1} = 730$  时壁板响应的相图。

当壁板上的激波作简谐振荡时, 图 7 给出了壁板运动响应的极值随动压  $\lambda_{u,1}$  变化的分岔图, 其中激波角  $\sigma = 18^\circ$ , 激波振荡的幅值  $A = 0.1$ , 激波振荡的频率  $\omega_f = 10$ 。与激波位置固定的情况相比, 当动压很小即  $\lambda_{u,1} = 74$  时, 发生第一次分岔。当  $\lambda_{u,1} < 74$  时, 系统表现为单周期 LCO 运动。当  $74 < \lambda_{u,1} < 246$  和  $316 < \lambda_{u,1} < 350$  时, 系统表现为周期 2 极限环振动。当  $246 < \lambda_{u,1} < 316$  和  $350 < \lambda_{u,1} < 440$  时, 系统表现为周期 3 极限环振动。当  $440 < \lambda_{u,1} < 453$  时, 系统表现为周期 4 极限环振动。图 8 给出了典型动压下系统响应的相图。当  $453 < \lambda_{u,1} < 458$  时, 系统表现为准周期运动, 图 9 给出了动压  $\lambda_{u,1} = 457$  时系统响应的相图和 Poincaré 映射图。当  $\lambda_{u,1} > 458$  时, 系统响应为混沌运动, 因此在振荡激波作用下的壁板是直接从准周期进入混沌的。为进一步观察进入混沌的过程, 在混沌区域选取两个典型动压下的系统响应进行说明。如图 10 所示, 根据动压  $\lambda_{u,1} = 460$  和  $600$  下系统响应的相图可以看出, 随着动压的增大, 响应变得越来越复杂。比较图 9(b) 和图 10(b), (d) 中所示的 Poincaré 映射图可以看出, 随着动压的增大, 准周期环面发生破裂, 逐渐变成一团散点。由如上的分析可知, 在振荡激波作用下, 系统是由准周期环面破裂而直接从准周期运动演变为混沌运动的。为了定量地判别混沌运动, 图 11 给出了动压  $\lambda_{u,1} = 460$  和  $\lambda_{u,1} = 600$  时, 系统响应的最大 Lyapunov 指数。其中 LLE 值为正表明系统响应为混沌运

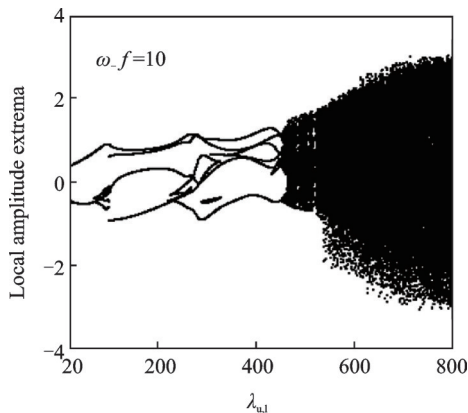


图 7  $\sigma = 18^\circ, A = 0.1$  壁板分岔特性  
Fig. 7 Bifurcation diagram for  $\sigma = 18^\circ, A = 0.1$

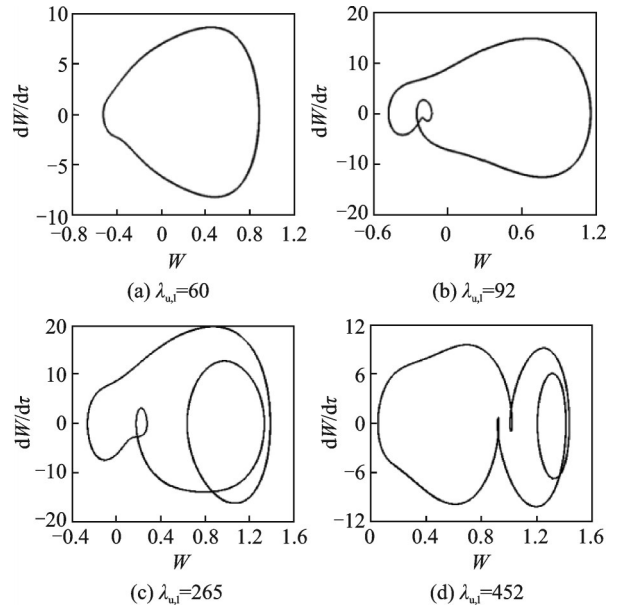


图 8 典型动压下系统响应的相图

Fig. 8 Phase portraits for several typical dynamic pressures

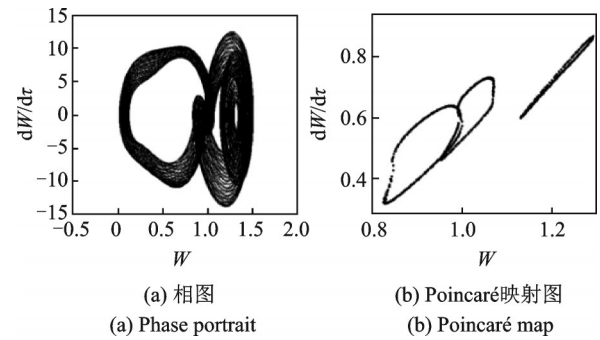


图 9  $\lambda_{u,1} = 457$  时系统响应的相图与 Poincaré 映射图  
Fig. 9 Phase portraits and Poincaré maps for  $\lambda_{u,1} = 457$

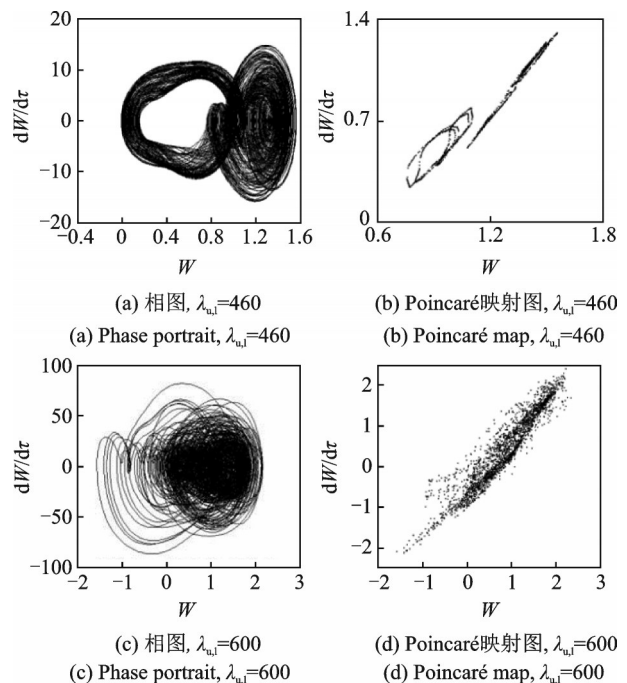


图 10 典型动压下系统响应的相图与 Poincaré 映射图

Fig. 10 Phase portraits and Poincaré maps for several typical dynamic pressures

动。从图 11 可以看出,当  $\lambda_{u,1} = 460$  时,LLE 曲线收敛到 1.020 左右;当  $\lambda_{u,1} = 600$  时,LLE 曲线收敛到 3.428 左右。这些结果均表明系统运动为混沌运动。

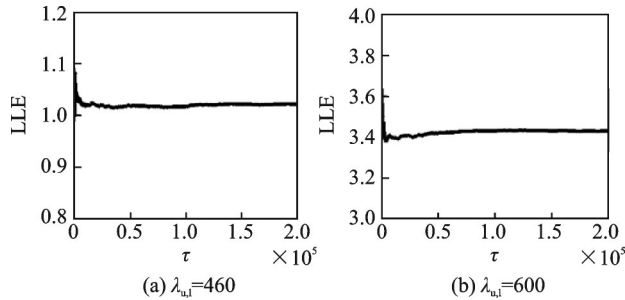


图 11 典型动压下系统响应的 LLE 曲线图

Fig. 11 LLE diagrams for several typical dynamic pressures

从上面的分析可以看出,与激波位置固定时情况不同,当壁板受到振荡激波的作用时,其非线性动力学响应中出现更多的分岔,甚至会出现较大区域的混沌现象。另外,在振荡激波作用下,系统运动进入混沌运动的道路,为准周期道路,具体来说,就是由于准周期环面破裂而导致系统直接从准周期运动演变为混沌运动。

### 4.2 振荡激波强度的影响

增大激波强度,激波角选取为  $\sigma = 22^\circ$ ,激波振荡的幅值和频率保持不变,即  $A = 0.1, \omega_f = 10$ ,图 12 给出了壁板运动响应的极值随动压  $\lambda_{u,1}$  变化的分岔图。与图 7 (即  $\sigma = 18^\circ$ ) 中的结果相比,系统响应在更小的动压即  $\lambda_{u,1} = 25$  下出现第一次分岔。当  $\lambda_{u,1} < 278$  时,系统交替出现周期 1 和多周期 LCO 运动。当  $278 < \lambda_{u,1} < 625$  时,系统交替出现准周期和多周期 LCO 运动,图 13 为对分岔图中该区域部分进行局部放大。取动压  $\lambda_{u,1} = 541$  和  $\lambda_{u,1} = 624$  下系统响应的相图和 Poincaré 映射图,如图 14 所示。当动压  $\lambda_{u,1} > 625$  时,系统进入混沌运动。下面在混沌

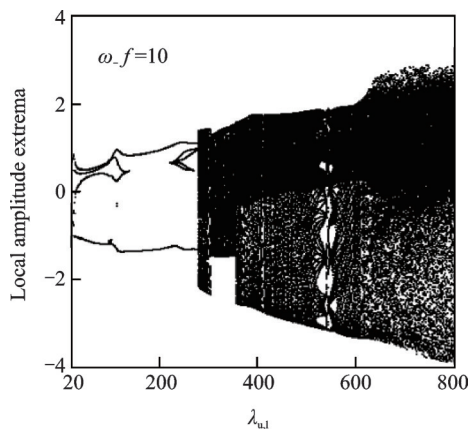


图 12  $\sigma = 22^\circ, A = 0.1$  壁板分岔特性

Fig. 12 Bifurcation diagram for  $\sigma = 22^\circ, A = 0.1$

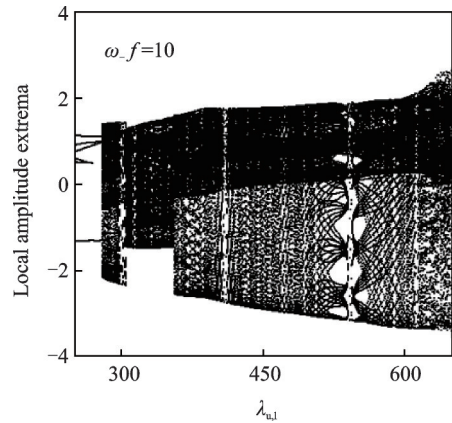
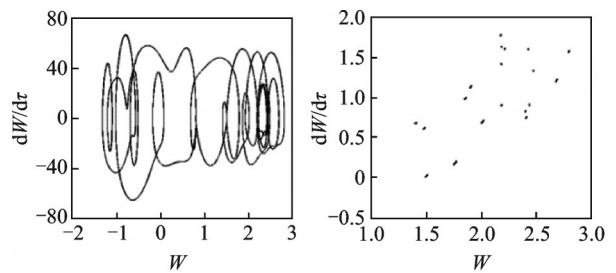


图 13  $\sigma = 22^\circ, A = 0.1$  时壁板运动分岔图的局部放大图

Fig. 13 Partial enlarged drawing of bifurcation diagram for  $\sigma = 22^\circ, A = 0.1$

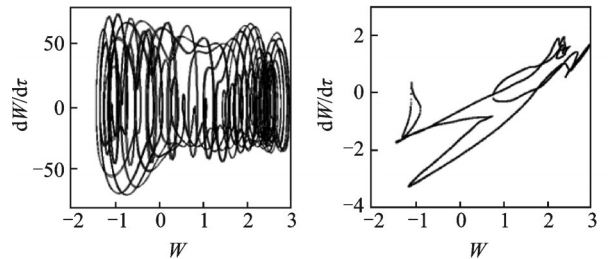


(a) 相图,  $\lambda_{u,1} = 541$

(b) Poincaré 映射图,  $\lambda_{u,1} = 541$

(a) Phase portrait,  $\lambda_{u,1} = 541$

(b) Poincaré map,  $\lambda_{u,1} = 541$



(c) 相图,  $\lambda_{u,1} = 624$

(d) Poincaré 映射图,  $\lambda_{u,1} = 624$

(c) Phase portrait,  $\lambda_{u,1} = 624$

(d) Poincaré map,  $\lambda_{u,1} = 624$

图 14 典型动压下系统响应的相图与 Poincaré 映射图

Fig. 14 Phase portraits and Poincaré maps for several typical dynamic pressures

区域选取两个典型动压下的系统响应来观察进入混沌的过程。图 15 给出了动压  $\lambda_{u,1} = 635$  和  $\lambda_{u,1} = 700$  下,系统响应的相图和 Poincaré 映射图,这些结果都表明系响应为混沌。比较图 14(d) 和图 15(b), (d) 中的 Poincaré 映射图,可以看出,随着来流动压的增大,准周期环面发生破裂,逐渐变成一团散点。经计算(限于篇幅未展示)可得动压  $\lambda_{u,1} = 635$  和  $\lambda_{u,1} = 700$  时,LLE 曲线分别收敛到 0.432 和 2.575 左右。因此从上面的分析可以看出,与图 7 中的结果相比,图 12 的结果显示增大振荡激波的强度明显改变了系统的非线性动力学响应过程,其分岔特性变得更加复杂,但是,系统仍然是通过准周期道路进入混沌。

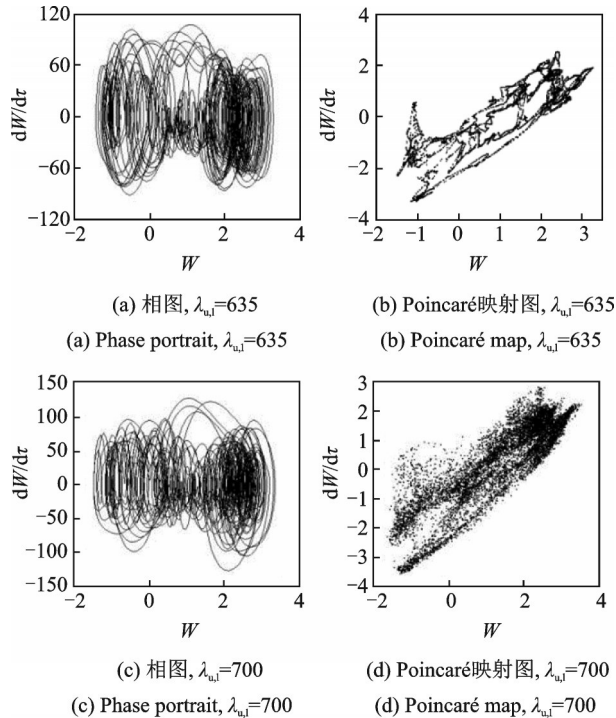


图 15 典型动压下系统响应的相图与 Poincaré 映射图  
Fig. 15 Phase portraits and Poincaré maps for several typical dynamic pressures

### 4.3 激波振荡幅值的影响

保持振荡激波强度与振荡频率不变,即  $\sigma = 18^\circ, \omega_f = 10$ , 将激波振荡幅值增大到  $A = 0.5$ , 图 16 给出了壁板运动响应的极值随动压  $\lambda_{u,1}$  变化的分岔图。与图 7 (即  $A = 0.1$ ) 中的结果相比,从图 16 可以看出,激波振荡幅值的提高完全改变了壁板非线性动力学行为的演化过程。当动压  $\lambda_{u,1} = 70$  时,系统响应出现了第一次分岔,由单周期 LCO 运动变为周期-3LCO 运动。当动压  $70 < \lambda_{u,1} < 181$  时,系统交替出现周期-1 和多周期 LCO 运动。随着来流动压的提高,当动压  $181 < \lambda_{u,1} < 301$  时,系统交替出现准周期和多周期 LCO 运动,绘制动压  $\lambda_{u,1}$  为 82, 295 和 300 时系统响应图和 Poincaré 映射图,如图 17 所示。当  $\lambda_{u,1} > 301$  时系统响应进入混沌

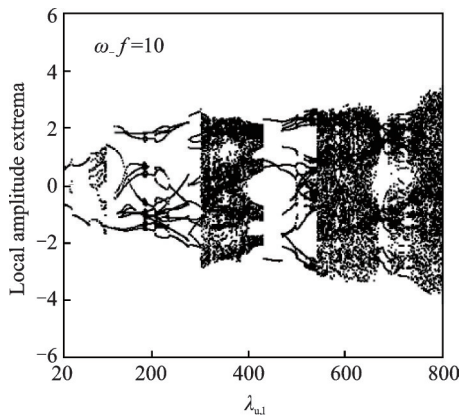


图 16  $\sigma = 18^\circ, A = 0.5$  时壁板分岔特性  
Fig. 16 Bifurcation diagram for  $\sigma = 18^\circ, A = 0.5$

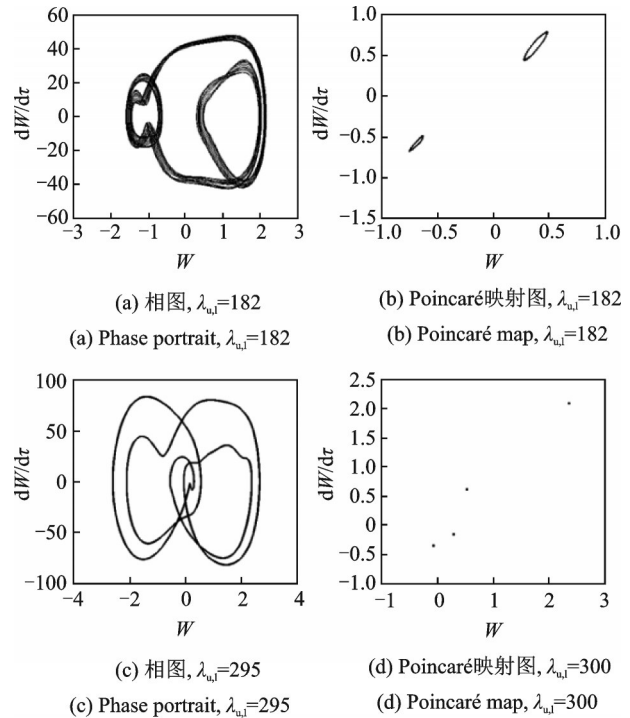


图 17 典型动压下系统响应的相图与 Poincaré 映射图  
Fig. 17 Phase portraits and Poincaré maps for several typical dynamic pressures

运动,由此可见,与激波振荡幅值为  $A = 0.1$  的情况不同,当激波振荡幅值提高到  $A = 0.5$  时,系统不再是经过准周期道路进入混沌,而是经历更复杂的过程进入混沌。从图 16 可以看出,随着动压进一步提高,系统响应再一次出现多周期 LCO 运动和准周期运动,并再次进入混沌。这样的过程随着动压的提高不断循环。在图 16 所示的分岔参数范围内,当动压  $\lambda_{u,1} > 543$  和  $\lambda_{u,1} > 735$  时,系统响应进入混沌运动。图 18 给出了两个典型动压下系统响应的相图和 Poincaré 映射图,这些结构定性地表现了系统响应为混沌运动。为了定量地判别混沌运动,经计算 (限于篇幅未展示) 可得动压  $\lambda_{u,1}$  分别为 310 和 778 时, LLE 曲线分别收敛到 2.230 和 2.736 左右,这些结果均表明系统运动为混沌运动。由此可见,当激波振荡幅值显著提高时混沌区域也会显著提高。

从上面的分析可以看出,与图 7 (即  $A = 0.1$ ) 中的结果相比,图 16 (即  $A = 0.5$ ) 中的结果显示了激波振荡幅值的提高完全改变了壁板非线性动力学行为的演化过程。当激波振荡幅值大幅度提高时,不仅混沌区域显著增大,通往混沌的道路也不再是准周期道路,而是经历更为复杂的过程进入混沌。

### 4.4 激波振荡频率的影响

保持振荡激波强度与振荡幅值不变,即  $\sigma = 18^\circ, A = 0.1$ , 将激波振荡频率变为  $\omega_f = 60$ , 图 19 给出了壁板运动响应的极值随动压  $\lambda_{u,1}$  变化的分岔图。已知壁板的无量纲固有频率为  $(j\pi)^2$ , 当



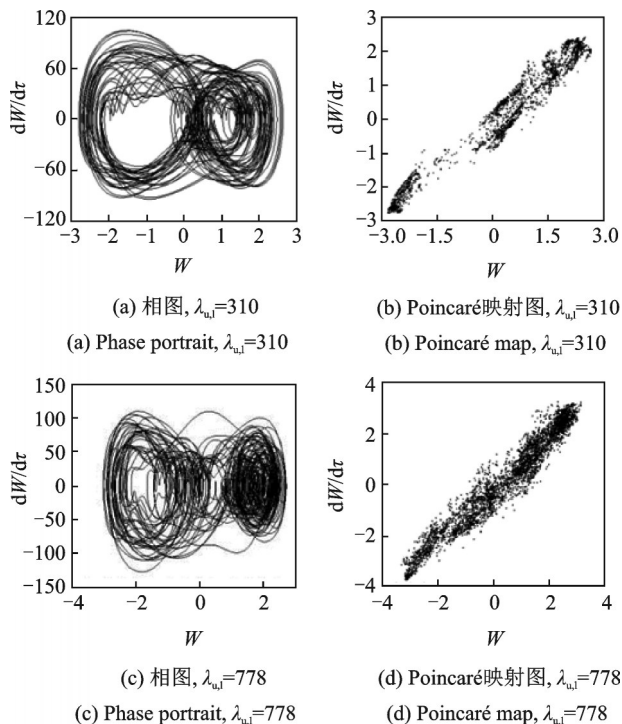


图 18 典型动压下系统响应的相图与 Poincaré 映射图  
Fig. 18 Phase portraits and Poincaré maps for several typical dynamic pressures

$\omega_f = 10$ , 激波振荡频率非常接近壁板第一阶固有频率, 而当  $\omega_f = 60$  时, 激波振荡频率将远离壁板固有频率。将图 7 ( $\omega_f = 10$ ) 中的结果与图 19 ( $\omega_f = 60$ ) 中结果进行比较, 发现激波振荡频率接近壁板固有频率时, 壁板在振荡激波作用下表现出更加丰富的动力学行为。下面分析激波振荡频率远离壁板固有频率, 即  $\omega_f = 60$  时, 系统的非线性动力学响应。图 19 的结果显示, 当动压  $\lambda_{u,1} < 187$ ,  $199 < \lambda_{u,1} < 237$  以及  $\lambda_{u,1} < 378$  时, 系统表现为单周期 LCO 运动。当动压  $187 < \lambda_{u,1} < 199$ ,  $237 < \lambda_{u,1} < 243$  以及  $263 < \lambda_{u,1} < 287$  时, 系统作周期-2LCO 运动。当动压  $243 < \lambda_{u,1} < 263$  时, 系统响应表现为准周期运动。当动压  $287 < \lambda_{u,1} < 378$  时, 系统交替出现准周

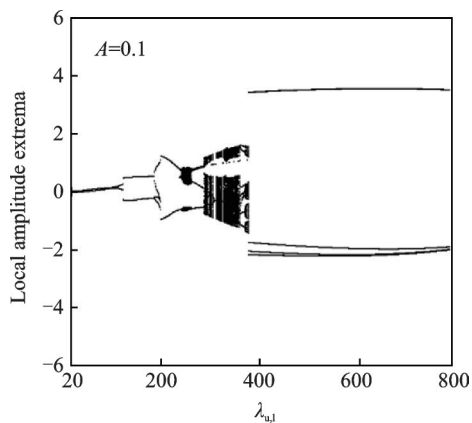


图 19  $\sigma = 18^\circ, \omega_f = 60$  时壁板分岔特性  
Fig. 19 Bifurcation diagram for  $\sigma = 18^\circ, \omega_f = 60$

期和多周期 LCO 运动。

比较图 7 ( $\omega_f = 10$ ) 与图 19 ( $\omega_f = 60$ ) 中结果, 发现当激波振荡的频率远离壁板固有频率时, 系统响应为单周期 LCO 运动、多周期 LCO 运动和拟周期运动, 而当激波振荡频率接近壁板固有频率时, 多种频率成分的运动会被激发出来, 壁板将表现出更加丰富的非线性动力学行为, 系统响应为单周期 LCO 运动、多周期 LCO 运动、拟周期运动以及混沌运动。

## 5 结 论

本文对振荡激波作用下二维壁板的非线性动力学特性进行了较为深入的研究。分析了激波强度、激波振荡幅值以及激波振荡频率对壁板分岔特性及混沌等复杂动力学特性的影响, 可以得到如下的结论:

- (1) 壁板在振荡激波作用下极限环幅值随着激波强度和激波振荡幅值的增大而增大。
- (2) 在分析壁板在振荡激波作用下作单周期 LCO 运动时, 至少要取二阶谐波模态; 在分析复杂动力学响应时, 计算中至少要取四阶谐波模态。
- (3) 斜激波的振荡容易激发出混沌运动, 并且通往混沌的道路为准周期道路。激波强度的增大不会改变通往混沌的道路, 而当激波振荡幅值大幅度提高时, 不仅混沌区域显著增大, 通往混沌的道路不再是准周期道路, 而是经历更为复杂的过程进入混沌。
- (4) 当振荡频率远离壁板固有频率时, 系统响应为单周期 LCO 运动和拟周期运动, 而当激波振荡频率接近壁板固有频率时, 系统响应为单周期 LCO 运动、多周期 LCO 运动、准周期运动以及混沌运动。

## 参考文献:

- [1] Vignesh R Petha S, Tae H K, Heuy D K, et al. Effects of back pressure perturbation on shock strain oscillations in a rectangular duct [J]. Acta Astronautica, 2021, 179: 525-535.
- [2] Dowell E H. Flutter of a buckled plate as an example of chaotic motion of deterministic autonomous system [J]. Journal of Sound and Vibration, 1982, 85(3): 333-334.
- [3] 叶献辉, 杨翊仁, 范晨光. 热环境下壁板非线性颤振分析 [J]. 计算力学学报, 2009, 26(5): 684-689.  
Ye Xianhui, Yang Yiren, Fan Chenguang. Nonlinear flutter analysis of a panel in the thermal environment [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2009, 26(5): 684-689.
- [4] 杨智春, 周建, 谷迎松. 超音速气流中受热曲壁板的非

- 线性颤振特性[J]. 力学学报, 2012, 44(1): 30-38.  
Yang Zhichun, Zhou Jian, Gu Yingsong. Nonlinear flutter characteristics of heated curved panel in supersonic flow [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2012, 44(1): 30-38.
- [5] Wang X C, Yang Z C, Wang W, et al. Nonlinear viscoelastic heated panel flutter with aerodynamic loading exerted on both surfaces[J]. Journal of Sound and Vibration, 2017, 409: 306-317.
- [6] 叶柳青,叶正寅. 激波主导流动下壁板的热气动弹性稳定性理论分析[J]. 力学学报, 2018, 50(2): 221-232.  
Ye Liuqing, Ye Zhengyin. Aeroelastic stability analysis of heated flexible panel in shock-dominated flows [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2018, 50(2): 221-232.
- [7] Visbal M R. On the interaction of an oblique shock with a flexible panel[J]. Journal of Fluids and Structures, 2012, 30: 219-225.
- [8] Visbal M R. Viscous and inviscid interactions of an oblique shock with a flexible panel[J]. Journal of Fluids and Structures, 2014, 48: 27-45.
- [9] Brouwer K R, Crowell A R, McNamara J J. Rapid prediction of unsteady aeroelastic loads in shock-dominated flows[C]. 56th AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 2015.
- [10] Ye L Q, Ye Z Y. Effects of shock location on aeroelastic stability of flexible panel[J]. AIAA Journal, 2018, 56(9): 3732-3744.
- [11] 李映坤,陈雄,许进升. 基于流固耦合的斜激波冲击作用下曲壁板气动弹性分析[J]. 航空动力学学报, 2020, 35(4): 783-792.  
Li Yingkun, Chen Xiong, Xu Jinsheng. Aeroelastic analysis of curved panels subjected to impinging oblique shock based on fluid-structure coupling algorithm [J]. Journal of Aerospace Power, 2020, 35(4): 783-792.
- [12] 贺理浩,张启帆,岳连捷,等. 高速进气道低马赫数不起动特性及马赫数影响规律[J]. 推进技术, 2021, 42(10):2207-2217.  
He Lihao, Zhang Qifan, Yue Lianjie, et al. Unstart characteristics of high speed inlet at low Mach number and influence law of Mach number [J]. Journal of Propulsion Technology, 2021, 42(10):2207-2217.
- [13] 黄蓉,李祝飞,聂宝平,等. 带抽吸气二元进气道/隔离段激波串振荡特性[J]. 推进技术, 2020, 41(4): 767-777.  
Huang Rong, Li Zhufei, Nie Baoping, et al. Shock train oscillations in a two-dimensional inlet/isolator with suction[J]. Journal of Propulsion Technology, 2020, 41(4): 767-777.
- [14] Miller B A, Crowell A R, McNamara J J. Modeling and analysis of shock impingements on thermo-mechanically compliant surface panels[C]. 53rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, 2012.
- [15] Dennis D, Sebastian W, Ali G. Experiments on the interaction of a fast-moving shock with an elastic panel [J]. AIAA Journal, 2016, 54(2): 670-678.
- [16] Zhang W W, Ye Z Y, Zhang C A, et al. Supersonic flutter analysis based on a local piston theory[J]. AIAA Journal, 2009, 47(10): 2321-2328.
- [17] Tan H J, Sun S, Huang H X. Behavior of shock trains in a hypersonic inlet/isolator model with complex background waves [J]. Experiments in Fluids, 2012, 53: 1647-1661.
- [18] Dowell E H. Nonlinear oscillations of a fluttering plate [J]. AIAA Journal, 1966, 4: 1267-1275.
- [19] Zhou J, Yang Z C, Gu Y S. Aeroelastic stability analysis of heated panel with aerodynamic loading on both surfaces [J]. Science China Technology Sciences, 2012, 55: 2720-2726.

## Nonlinear dynamic analysis of a panel subjected to oscillating oblique shock

YE Liu-qing, YE Zheng-yin

(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** The shock trains in ramjet/scramjet are generally oscillatory. Thus, study of aeroelastic characteristics of the panel subjected to the oscillating shock has important guidance to the structural safety. Based on Von-Kármán large deflection plate theory and local first-order piston theory, the nonlinear dynamic equations of the panel subjected to an oscillating oblique shock are established by using the Galerkin discrete method. The fourth-order Runge-Kutta numerical integration method is adopted to solve the nonlinear dynamic equations. Considering different system parameters (i.e. shock strength, oscillation amplitude and oscillation frequency of the shock) and taking dynamic pressure as bifurcation parameter, the bifurcation characteristics and chaos behaviors of the panel subjected to an oscillating oblique shock are studied. The results show that compared with the case in which the shock location is fixed, the dynamic behaviors of the system are richer and the bifurcation characteristics are more complex when the panel is subjected to an oscillating shock. The LCO amplitude is observed to increase with the shock strength and oscillation amplitude of

the shock. Under the action of the oscillating shock, chaotic motion is very easily excited and the route to the chaotic motion is via the quasi-periodic motion. The increase of the shock strength will not change the route to the chaotic motion. However, when the oscillation amplitude of the shock is significantly increased, the route to the chaotic motion is no longer via the quasi-periodic motion but a more complex process.

**Key words:** limit cycle oscillation; chaotic motion; bifurcation; oscillating shock; local piston theory

作者简介: 叶柳青(1993—),女,博士研究生。电话:18792502039;E-mail: ye5liu1qing2@mail.nwpu.edu.cn。

通讯作者: 叶正寅(1963—),男,教授。电话:(029)88491374;E-mail: yezy@nwpu.edu.cn。

附 录:

方程(10)中无量纲气动力  $Q$  的表达式为:

$$\begin{aligned}
 Q &= Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6 + Q_7, \\
 Q_1 &= \frac{1}{j\pi} (\bar{p}_{\text{loc}(u,l)} - \bar{p}_d) \left\{ 1 - \cos \left[ \frac{1}{2} j\pi + j\pi A \sin(\omega_f \tau) \right] \right\} + \frac{1}{j\pi} (\bar{p}_{\text{loc}(u,r)} - \bar{p}_d) \cdot \\
 &\quad \left\{ \cos \left[ \frac{1}{2} j\pi + j\pi A \sin(\omega_f \tau) \right] - \cos(j\pi) \right\}, \\
 Q_2 &= \lambda_{u,l} q_j(\tau) (j\pi) \left\{ \frac{1}{2j\pi} \cos \left[ j\pi + 2j\pi A \sin(\omega_f \tau) \right] - \frac{1}{2j\pi} \right\} + \lambda_{u,r} q_j(\tau) (j\pi) \cdot \\
 &\quad \left\{ \frac{1}{2j\pi} \cos(2j\pi) - \frac{1}{2j\pi} \cos \left[ j\pi + 2j\pi A \sin(\omega_f \tau) \right] \right\}, \\
 Q_3 &= \sqrt{R_{Mu,l} \lambda_{u,l}} \dot{q}_j(\tau) \left\{ -\frac{1}{2} - A \sin(\omega_f \tau) + \frac{\sin \left[ j\pi + 2j\pi A \sin(\omega_f \tau) \right]}{2j\pi} \right\} + \sqrt{R_{Mu,r} \lambda_{u,r}} \dot{q}_j(\tau) \cdot \\
 &\quad \left\{ -\frac{1}{2} + A \sin(\omega_f \tau) - \frac{\sin \left[ j\pi + 2j\pi A \sin(\omega_f \tau) \right]}{2j\pi} \right\}, \\
 Q_4 &= \sum_{i \neq j}^N \sqrt{R_{Mu,l} \lambda_{u,l}} \dot{q}_i(\tau) \left\{ -\frac{\sin \left[ \frac{1}{2} j\pi + j\pi A \sin(\omega_f \tau) - \frac{1}{2} i\pi - i\pi A \sin(\omega_f \tau) \right]}{j\pi - i\pi} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{\sin \left[ \frac{1}{2} j\pi + j\pi A \sin(\omega_f \tau) + \frac{1}{2} i\pi + i\pi A \sin(\omega_f \tau) \right]}{j\pi + i\pi} \right\}, \\
 Q_5 &= \sum_{i \neq j}^N \sqrt{R_{Mu,r} \lambda_{u,r}} \dot{q}_i(\tau) \left\{ \frac{\sin \left[ \frac{1}{2} j\pi + j\pi A \sin(\omega_f \tau) - \frac{1}{2} i\pi - i\pi A \sin(\omega_f \tau) \right]}{j\pi - i\pi} - \right. \\
 &\quad \left. \frac{\sin \left[ \frac{1}{2} j\pi + j\pi A \sin(\omega_f \tau) + \frac{1}{2} i\pi + i\pi A \sin(\omega_f \tau) \right]}{j\pi + i\pi} \right\}, \\
 Q_6 &= \sum_{i \neq j}^N \lambda_{u,l} q_i(\tau) (i\pi) \left\{ \frac{\cos \left[ \frac{1}{2} j\pi + j\pi A \sin(\omega_f \tau) + \frac{1}{2} i\pi + i\pi A \sin(\omega_f \tau) \right]}{j\pi + i\pi} - \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{j\pi + i\pi} - \frac{1}{j\pi - i\pi} + \frac{\cos \left[ \frac{1}{2} j\pi + j\pi A \sin(\omega_f \tau) - \frac{1}{2} i\pi - i\pi A \sin(\omega_f \tau) \right]}{j\pi - i\pi} \right\}, \\
 Q_7 &= \sum_{i \neq j}^N \lambda_{u,r} q_i(\tau) (i\pi) \left\{ -\frac{\cos \left[ \frac{1}{2} j\pi + j\pi A \sin(\omega_f \tau) + \frac{1}{2} i\pi + i\pi A \sin(\omega_f \tau) \right]}{j\pi + i\pi} + \frac{\cos(j\pi + i\pi)}{j\pi + i\pi} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{\cos(j\pi - i\pi)}{j\pi - i\pi} - \frac{\cos \left[ \frac{1}{2} j\pi + j\pi A \sin(\omega_f \tau) - \frac{1}{2} i\pi - i\pi A \sin(\omega_f \tau) \right]}{j\pi - i\pi} \right\}
 \end{aligned}$$