

# 网架式天线环状支撑桁架结构连续体降阶模型研究

吴瑞琴<sup>1,2</sup>, 祝巍<sup>1,2</sup>, 张伟<sup>3</sup>, 陈建恩<sup>1,2</sup>, 胡文华<sup>1,2</sup>

(1. 天津理工大学机械学院先进机电系统设计与智能控制天津市重点实验室, 天津 300384;

2. 天津理工大学机电工程国家级实验教学示范中心, 天津 300384;

3. 北京工业大学机电学院机械结构非线性振动与强度北京市重点实验室, 北京 100124)

**摘要:** 根据环状支撑桁架结构组成特点描述了环状桁架单元, 给出了变形假设条件, 并基于梁模型得到了环状桁架等效多边形结构。计算了等效多边形单元及其对应外接圆环单元的动能和应变能, 利用能量等效原理分别推导了等效多边形结构和其外接圆环结构的弹性模量与密度之间的关系表达式, 从而计算得到了两者频率比表达式, 综合利用有限元和理论方法对比了等效多边形结构和对应圆环结构的低阶振型和频率。研究表明, 当单元数目大于 30 后, 采用连续体降阶圆环模型简化等效多边形结构对环状支撑桁架结构进行动力学分析是合理的。

**关键词:** 支撑桁架; 连续体模型; 等效多边形结构; 频率比

**中图分类号:** V414.2; V443+.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2022)02-0487-08

**DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2022.02.024

## 引言

随着通讯、侦查、探测等空间任务需求不断提升, 航天器结构逐步大型化、复杂化, 然因受限于发射成本和运载空间, 航天器功能部件多被设计为轻质可展开结构, 如太阳能帆板、空间天线等。近年来快速发展的大型网架式可展天线因其高刚度比、大口径优势, 成为较理想天线结构, 备受各大航天科研院所关注并逐步投入使用<sup>[1]</sup>。网架式天线在轨展开锁定后成为大型乃至超大型柔性结构, 其在轨服役动力学性能好坏会影响航天器工作可靠性, 而且天线自身具有的大尺度、轻量化、多自由度等特点, 给整个航天器结构的动力学建模及振动控制也带来巨大挑战<sup>[2]</sup>, 因此研究大型柔性空间天线的动力学问题至关重要。

大型网架式天线主要由周边支撑桁架、金属反射网、前后张力索等组成, 其入轨展开及在轨服役中的动力学建模及振动分析是中国天线技术进一步发展迫切需要攻克的重要科学问题之一<sup>[3]</sup>。天线入轨顺利展开是其能进入工作状态的重要前提, 近年来在网架式天线展开动力学研究方面取得了可喜进展。Li<sup>[4]</sup>基于 Lagrange 方法建立了桁架天线展开动

力学模型, 考虑了耗散力、铰链处扭簧的驱动力、索网预张力等对天线展开过程的影响, 得到了展开过程中驱动力与天线位形变化之间的关系。Nie 等<sup>[5]</sup>考虑杆件的刚体旋转、索网几何非线性及桁架与索网之间存在刚柔耦合等因素研究了大型可展天线在轨展开动力学特性。Li 等<sup>[6]</sup>采用绝对节点坐标法模拟了天线展开过程, 将天线系统用节点和有限元网格分解成几个独立的子系统进行研究。Lu 等<sup>[7]</sup>研究了网架式天线从伸展臂到反射器展开全过程的动力学行为。网架式天线展开锁定后进入服役期间受到空间热辐射及航天器调姿等干扰易产生低频振动, 从而可能导致其工作精度降低甚至失效, 因此在天线研制阶段除了考虑天线入轨展开问题还需分析其在轨动力学特性从而确保其具备良好在轨动力学品质。

服役中的大型网架式天线为元件众多的空间复杂柔性结构, 这类结构动力学研究的关键是建立便于分析求解的低维高精度动力学降阶模型<sup>[8]</sup>。由于大型网架式天线的周边支撑桁架是其结构刚度的重要来源, 研究者将天线在轨动力学行为特性分析这一复杂问题初步简化为研究天线桁架支撑结构的在轨动力学问题。Chen 等<sup>[9]</sup>将天线桁架简化为旋转圆柱壳模型, 研究了其在热激励作用下的呼吸振动问题。天线周边支撑桁架是由杆件、铰链等元件组

收稿日期: 2021-02-18; 修订日期: 2021-05-31

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(12002236, 11872274); 上海航天科技创新基金资助项目(SAST2018-094)。

成的桁架单元沿环状排列而成的周期离散结构。一些学者根据离散结构与其连续体模型力学性能对等这一原则发展了多种等效方法,为简化工程中大型类梁式周期桁架结构的动力学模型开辟了道路。Noor等<sup>[10]</sup>利用能量等效原理研究了不同几何特征周期胞元组成的类梁式和类板式桁架结构的等效参数。Nayfeh等<sup>[11]</sup>基于位移等效原则建立了复杂平面桁架结构的等效力学模型。Moreau等<sup>[12]</sup>指出在结构尺度较大、单元较多的情况下,将周期类梁式桁架结构等效为连续体模型进行动力学分析具有合理性。Salehinan等<sup>[13]</sup>将直线式桁架结构等效为 Timoshenko 梁模型并进行了实验验证。等效方法经多年发展,现已被用于大型天线动力学模型降阶。Guo等<sup>[14]</sup>建立了双层环形桁架式天线的等效模型,给出了等效刚度矩阵和质量矩阵。Liu等<sup>[15]</sup>和柳剑波等<sup>[16]</sup>利用能量等效方法基于直梁模型得出了天线桁架的等效参数,对比分析了等效梁模型和原桁架结构的固有特性。Liu等<sup>[17]</sup>将直线型桁架等效为空间异性梁模型进而研究其耦合振动问题。从以上文献来看,利用等效方法可将类梁式或类板式的平直桁架结构等效为梁模型或板模型。然而大型网架式天线的支撑桁架为环状结构,用等效方法得到的简化模型是由等效梁单元组成的多边形结构<sup>[15]</sup>,还需进一步进行连续体降阶。

本文首先基于梁模型将天线环状支撑桁架等效为多边形结构,分别计算了多边形单元及其对应外接圆环单元的动能和应变能,进而利用能量等效原理分别推导了等效多边形结构和其外接圆环结构的频率关系表达式,并对比分析了圆环结构和等效多边形结构的固有特性,最后通过理论计算和数值方法验证了当桁架单元数目较多后采用连续体降阶圆环模型简化等效多边形结构,进而对环状桁架结构进行动力学分析是合理可行的。

## 1 桁架单元等效

### 1.1 桁架单元应变能

网架式天线环状支撑桁架是由众多杆件和接头组成,其中接头是实现桁架展开及锁定的重要功能部件,待天线完全展开锁定后,环状桁架成为天线网面的支撑机构,也是天线的主要刚度来源。环状桁架是由多个桁架单元周期排列组成的一个封闭环状结构,以环状桁架变形前与对称轴方向一致的杆件

重心所在平面和对称轴的交点为坐标原点,以对称轴为  $z$  轴,建立柱坐标系  $OR\theta z$ ,如图 1 所示。环状桁架未变形前其任意点位置可由  $R, \theta, z$  来确定,环状桁架中线(桁架中与对称轴方向一致的杆件重心连线)上各点位置可由  $\theta$  确定。利用平截面假设并根据天线工作状态,考虑环状桁架结构可发生径向伸长或收缩、面内面外弯曲及扭转变形。桁架变形状态可用其中线上各点沿当地  $R, \theta, z$  三个方向的线位移分量  $u, v, w$  及桁架横截面绕中线的转角  $\varphi$  来确定。

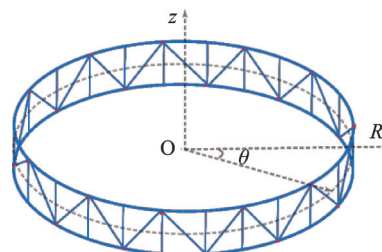


图1 环状桁架结构示意图

Fig. 1 The schematic of a circular truss structure

图 2 所示为环状桁架单元,实际单元左右两部分互成一定夹角,如图中蓝色虚线所示,图中蓝色实线为便于直观描述桁架单元所用。环状桁架单元是由四根纵杆、三根横杆和两根斜杆组成,长度分别为  $L_1, L_b, L_d$ 。桁架单元左右两部分的区别在于斜杆布置不同,在单元中心处建立坐标系  $O_1x_1y_1z_1$  和  $O_2x_2y_2z_2$  来分别描述左右两部分的变形。桁架单元的变形状态由单元横截面上各点沿当地坐标系  $O_1x_1y_1z_1$  ( $O_2x_2y_2z_2$ ) 中三个方向的位移分量  $u_i^0(y_i), v_i^0(y_i)$  和  $w_i^0(y_i)$  以及截面绕轴线的转角  $\varphi_{y_i}^0$  所确定。设单元横截面为垂直于桁架中线的截面,且桁架单元是由细杆件组成,桁架单元横截面上任意点的位移变量  $u_i, v_i, w_i$  沿  $z_i$  轴线性变化,基于 Euler-Bernoulli 梁理论,桁架单元上任意点的位移可表示为<sup>[13]</sup>:

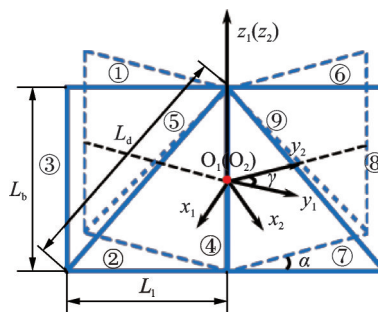


图2 环形桁架单元示意图

Fig. 2 The typical element of the circular truss

$$\begin{cases} u_i(x_i, y_i, z_i) = u_i^0(y_i) + z\varphi_{yi}^0(y_i) \\ v_i(x_i, y_i, z_i) = v_i^0(y_i) - z\frac{\partial w_i^0(y_i)}{\partial y_i} \\ w_i(x_i, y_i, z_i) = w_i^0(y_i) + z\varepsilon_{zi}^0(y_i) \end{cases} \quad (1)$$

式中  $i=1, 2$ ;  $u_i^0(y_i)$ ,  $v_i^0(y_i)$  和  $w_i^0(y_i)$  为桁架单元横截面与  $y_i$  轴交点处的位移分量;  $\varphi_{yi}^0$  为横截面在  $y_i$  轴交点处绕  $y_i$  轴的转角;  $\varepsilon_{zi}^0(y_i)$  为该点处沿  $z_i$  轴方向的正应变。

考虑桁架结构发生小变形的情况, 给出桁架结构的应变-位移关系式如下:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2)$$

根据式(1)和(2)可计算出桁架单元上每根杆件任意点处的应变分量为:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{(k)} &= 0, \quad \varepsilon_{yy}^{(k)} = \varepsilon_{yy0} - z^{(k)}\kappa_x, \quad \varepsilon_{zz}^{(k)} = \varepsilon_{zi}^0, \\ \varepsilon_{xy}^{(k)} &= \varepsilon_{yx}^{(k)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^0}{\partial y_i} + z^{(k)}\kappa_z\right), \\ \varepsilon_{xz}^{(k)} &= \varepsilon_{zx}^{(k)} = \frac{1}{2}\varphi_{yi}^0, \quad \varepsilon_{yz}^{(k)} = \varepsilon_{zy}^{(k)} = \frac{z^{(k)}}{2}\frac{\partial \varepsilon_{zi}^0}{\partial y_i} \end{aligned} \quad (3)$$

式中  $\varepsilon_{yy0}$ ,  $\kappa_x$ ,  $\kappa_z$  为桁架单元横截面与  $y_i$  轴交点处的应变分量和曲率。

考虑小变形情况, 将桁架单元每根杆件任意点处的位移在桁架单元中心点  $O_1(O_2)$  处进行 Taylor 展开, 并将任意点的应变用中心点处的应变表示<sup>[10]</sup>, 且其中的应变又可近似为是不沿  $y_i$  轴变化<sup>[15-16]</sup>。给出第  $k$  根杆件应变能计算公式如下:

$$U^{(k)} = \frac{1}{2} E^{(k)} A^{(k)} L^{(k)} (\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)})^2 \quad (4)$$

式中  $E^{(k)}$  为杆件的弹性模量;  $A^{(k)}$  为杆件的横截面积;  $L^{(k)}$  表示杆件长度;  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}$  表示杆件的轴向应变。

为使桁架结构等效为连续体梁模型, 需使<sup>[13]</sup>:

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{zi}^0} = 0 \quad (5)$$

通过式(3)~(5)计算得到桁架单元左部分(或右部分)的应变能为:

$$\begin{aligned} U &= \frac{E_d A_d L_b^2 L_1^2}{2L_d^3} \left[ \left( \frac{\partial u_i^0}{\partial y_i} \right)^2 + \left( \frac{2L_b}{L_1} \varphi_{yi}^0 - \frac{2L_1}{L_b} \frac{\partial v_i^0}{\partial y_i} - \frac{2L_b}{L_1} \varepsilon_{zi}^0 \right) \frac{\partial u_i^0}{\partial y_i} + 2(\varepsilon_{zi}^0 - 2\varphi_{yi}^0) \frac{\partial v_i^0}{\partial y_i} \right] + \\ &\left( E_b A_b L_b + \frac{2E_d A_d L_b^4}{L_d^3} \right) \left[ \frac{(\varphi_{yi}^0)^2}{4} - \frac{\varepsilon_{zi}^0 \varphi_{yi}^0}{2} \right] + \\ &\left( E_1 A_1 L_1 + \frac{E_d A_d L_1^4}{2L_d^3} \right) \left( \frac{\partial v_i^0}{\partial y_i} \right)^2 + \left( \frac{E_b A_b L_b}{2} + \frac{E_d A_d L_b^4}{2L_d^3} \right) (\varepsilon_{zi}^0)^2 + \frac{E_1 A_1 L_1 L_b^2}{4} \left( \frac{\partial^2 w_i^0}{\partial y_i^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (6)$$

式中 下标 l, b, d 分别表示纵杆、横杆和斜杆。

## 1.2 桁架单元动能

桁架相邻单元间共用杆件, 所以计算时取共用杆件动能的一半。每根杆件的速度通过其首尾两节点速度来计算, 杆件节点速度如图3所示。

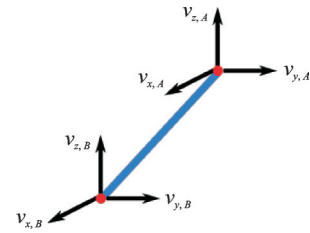


图3 桁架单元杆件节点速度

Fig. 3 The nodal velocities of a bar in the truss element

由图3计算出桁架单元中每根杆的动能为:

$$T^{(k)} = \frac{1}{6} \rho^{(k)} A^{(k)} L^{(k)} (v_{x,A}^2 + v_{y,A}^2 + v_{z,A}^2 + v_{x,B}^2 + v_{y,B}^2 + v_{z,B}^2 + v_{x,A}v_{x,B} + v_{y,A}v_{y,B} + v_{z,A}v_{z,B}) \quad (7)$$

式中  $\rho^{(k)}$  为杆件的密度;  $v_{x,A}$ ,  $v_{y,A}$ ,  $v_{z,A}$ ,  $v_{x,B}$ ,  $v_{y,B}$  和  $v_{z,B}$  为杆首尾两端节点的速度分量。

桁架单元中左部分(右部分)的动能可分别表示为:

$$\begin{cases} T_{\text{zuo}} = T^{(1)} + T^{(2)} + \frac{T^{(3)}}{2} + \frac{T^{(4)}}{2} + T^{(5)} \\ T_{\text{you}} = \frac{T^{(4)}}{2} + T^{(6)} + T^{(7)} + \frac{T^{(8)}}{2} + T^{(9)} \end{cases} \quad (8)$$

由式(7)和(8)计算得到桁架单元左部分(右部分)的动能表达式为:

$$\begin{aligned} T_e &= \left( \frac{\rho_b A_b L_b}{2} + \frac{\rho_d A_d L_d}{2} + \rho_1 A_1 L_1 \right) \left[ \left( \frac{\partial u_i^0}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_i^0}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_i^0}{\partial t} \right)^2 \right] + \\ &\left( \frac{\rho_b A_b L_b^3}{24} + \frac{\rho_d A_d L_b^2 L_d}{24} + \frac{\rho_1 A_1 L_b^2 L_1}{4} \right) \left[ \left( \frac{\partial \varphi_{yi}^0}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w_i^0}{\partial y_i \partial t} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (9)$$

### 1.3 桁架单元动力学方程

将桁架单元的势能表达式(6)和动能表达式(9)代入到Hamilton方程中进行计算,得到桁架单元左部分或右部分的偏微分运动控制方程为:

$$\begin{aligned}
 & (\rho_b A_b L_b + \rho_d A_d L_d + 2\rho_1 A_1 L_1) \left( \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial t^2} \right) - \\
 & \frac{E_b A_b E_d A_d L_b^2 L_d^2}{E_d A_d L_b^3 + E_b A_b L_d^3} \left( \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial y_i^2} \right) + \\
 & \frac{E_b A_b E_d A_d L_b L_d}{2E_d A_d L_b^3 + 2E_b A_b L_d^3} \left( 2L_1^2 \frac{\partial^2 v_i^0}{\partial y_i^2} - L_b^2 \frac{\partial \varphi_{yi}^0}{\partial y_i} \right) = 0, \\
 & (\rho_b A_b L_b + \rho_d A_d L_d + 2\rho_1 A_1 L_1) \left( \frac{\partial^2 v_i^0}{\partial t^2} \right) + \\
 & \frac{E_b A_b E_d A_d L_b^2 L_d}{2E_d A_d L_b^3 + 2E_b A_b L_d^3} \left( L_b \frac{\partial \varphi_{yi}^0}{\partial y_i} + 2L_1 \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial y_i^2} \right) - \\
 & \left( \frac{2E_d A_d E_1 A_1 L_b^3 L_1 + 2E_b A_b E_1 A_1 L_d^3 L_1}{E_d A_d L_b^3 + E_b A_b L_d^3} + \right. \\
 & \left. \frac{E_b A_b E_d A_d L_1^4}{E_d A_d L_b^3 + E_b A_b L_d^3} \right) \left( \frac{\partial^2 v_i^0}{\partial y_i^2} \right) = 0, \\
 & (\rho_b A_b L_b + \rho_d A_d L_d + 2\rho_1 A_1 L_1) \left( \frac{\partial^2 w_i^0}{\partial t^2} \right) - \\
 & \left( \frac{\rho_b A_b L_b^3}{12} + \frac{\rho_d A_d L_d L_b^2}{12} + \frac{\rho_1 A_1 L_1 L_b^2}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 w_i^0}{\partial y_i \partial t} \right) + \\
 & \frac{E_1 A_1 L_1 L_b^2}{2} \left( \frac{\partial^4 w_i^0}{\partial y_i^4} \right) = 0, \\
 & \left( \frac{\rho_b A_b L_b^3}{12} + \frac{\rho_d A_d L_d L_b^2}{12} + \frac{\rho_1 A_1 L_1 L_b^2}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi_i^0}{\partial t^2} \right) + \\
 & \frac{E_b A_b L_b (2E_d A_d L_b^3 + E_b A_b L_d^3)}{4E_d A_d L_b^3 + 4E_b A_b L_d^3} \varphi_{yi}^0 - \\
 & \frac{E_d A_d E_b A_b L_b^2 L_1}{2E_d A_d L_b^3 + 2E_b A_b L_d^3} \left( L_1 \frac{\partial v_i^0}{\partial y_i} - L_b \frac{\partial u_i^0}{\partial y_i} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{10}$$

由式(10)可知,桁架单元的偏微分运动控制方程和空间柔性梁结构的偏微分运动方程具有相似形式,这说明桁架单元可通过能量等效原理得到其连续体空间柔性梁模型,这与文献[13,15-16]中研究结果相符合。

## 2 桁架结构降阶

### 2.1 动 能

若环状桁架由  $N$  个桁架单元组成,那么其可被近似等效为由  $2N$  段柔性梁组成的多边形结构。图

4给出了环状桁架结构等效简化为多边形结构的示意图。下面验证将这个多边形结构进一步简化为环状结构进行后续动力学分析的可行性。

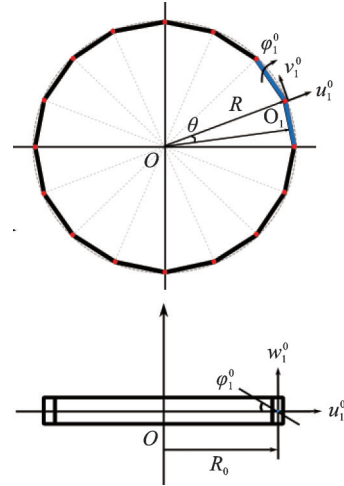


图4 环状桁架简化多边形结构示意图

Fig. 4 The scheme of the circular truss structure

为简化分析环状桁架等效多边形结构与圆环结构之间的等效参数以及频率关系,假设两者都为各向同性且均质,设圆环的密度和弹性模量分别为  $\rho_c$  和  $E_c$ ,其内接等边多边形的密度和弹性模量分别为  $\rho_b$  和  $E_b$ 。鉴于各向同性均质圆环的面内面外运动中物理参数相同,以下部分仅就面内运动进行分析。如图5所示,直线段  $\overline{O_1 O_2}$  表示由桁架单元等效的一段空间柔性梁,圆弧  $\widehat{O_1 O_2}$  内接多边形结构的一边,圆弧半径为  $R_0$ 。

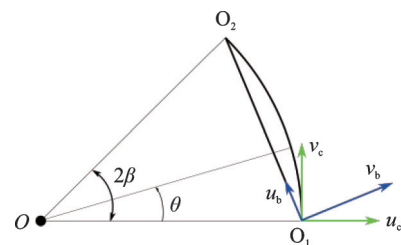


图5 多边形单元和对应圆环单元位移

Fig. 5 The displacements of the polygon unit and the corresponding arc

设  $O_1$  点位移在直线  $\overline{O_1 O_2}$  的轴线和法线投影是  $u_b$  和  $v_b$ ,在圆弧  $\widehat{O_1 O_2}$  法线和切线的投影为  $u_c$  和  $v_c$ ,则有:

$$\begin{bmatrix} u_c \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \beta & \cos \beta \\ \cos \beta & \sin \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_b \\ v_b \end{bmatrix}, \quad \beta = \frac{\pi}{n} \tag{11}$$

考虑平面内运动,以梁模型描述直线  $\overline{O_1 O_2}$  和圆弧  $\widehat{O_1 O_2}$ ,则直线和圆弧的动能分别表示为:

$$\left\{ \begin{aligned} T_b &= \int \frac{1}{2} (\dot{u}_b^2 + \dot{v}_b^2) dm = \\ & \int_0^{2\beta} \frac{1}{2} \rho_b A_b (\dot{u}_b^2 + \dot{v}_b^2) x_\theta d\theta \\ T_c &= \int \frac{1}{2} (\dot{u}_c^2 + \dot{v}_c^2) dm = \\ & \int_0^{2\beta} \frac{1}{2} \rho_c A_c (\dot{u}_c^2 + \dot{v}_c^2) s_\theta d\theta \end{aligned} \right. \quad (12)$$

由式(11)可得:

$$\dot{u}_b^2 + \dot{v}_b^2 = \dot{u}_c^2 + \dot{v}_c^2 \quad (13)$$

设直线  $\overline{O_1O_2}$  和圆弧  $\widehat{O_1O_2}$  的截面积相等且为常数,由动能相等得到:

$$\int_0^{2\beta} \left[ \frac{1}{2} \rho_b A_b (\dot{u}_b^2 + \dot{v}_b^2) x_\theta - \frac{1}{2} \rho_c A_c (\dot{u}_c^2 + \dot{v}_c^2) s_\theta \right] d\theta = \\ \int_0^{2\beta} \frac{1}{2} A_c (\dot{u}_b^2 + \dot{v}_b^2) (\rho_b x_\theta - \rho_c s_\theta) d\theta = 0 \quad (14)$$

由图 5 可知:

$$x = R_0 \cos \beta [\tan \beta - \tan(\beta - \theta)], \quad s = R_0 \theta \quad (15)$$

式(14)中  $(\dot{u}_b^2 + \dot{v}_b^2)$  可为任意值,将式(15)代入式(14),可得:

$$\rho_c = \rho_b \frac{\int_0^{2\beta} \cos \beta [1 + \tan^2(\beta - \theta)] d\theta}{2\beta} \quad (16)$$

### 2.2 势能

直线  $\overline{O_1O_2}$  的势能为:

$$V_b = \int \frac{1}{2} \sigma_b \epsilon_b dv = \int_0^{L_b} \left( \int \frac{1}{2} E_b \epsilon_b^2 dA_b \right) dx = \\ \frac{1}{2} \int_0^{2\beta} \left[ E_b A_b \left( \frac{\partial u_b}{\partial x} \right)^2 + E_b J_{bz} \left( \frac{\partial^2 v_b}{\partial x^2} \right)^2 \right] x_\theta d\theta \quad (17)$$

计算得到圆弧  $\widehat{O_1O_2}$  的势能表达式为:

$$V_c = \int \frac{1}{2} \sigma_c \epsilon_c dv = \\ \int_0^{L_c} \left[ \frac{E_c A_c}{2} \left( \frac{u_c}{R_0} + \frac{v'_c}{R_0} \right)^2 + \frac{E_c J_{cz}}{2} \left( \frac{u_c}{R_0^2} + \frac{u''_c}{R_0^2} \right)^2 - \right. \\ \left. E_c J_{cz} \left( \frac{u_c}{R_0^2} + \frac{v'_c}{R_0^2} \right) \left( \frac{u_c}{R_0^2} + \frac{u''_c}{R_0^2} \right) \right] ds = \\ \int_0^{2\beta} \left[ \frac{E_c A_c}{2} \left( \frac{u_c}{R_0} + \frac{\partial v_c}{\partial s} \right)^2 + \frac{E_c J_{cz}}{2} \left( \frac{\partial^2 u_c}{\partial s^2} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{u_c}{R_0^2} \right)^2 - \frac{E_c J_{cz}}{R_0} \left( \frac{u_c}{R_0} + \frac{\partial v_c}{\partial s} \right) \left( \frac{u_c}{R_0^2} + \frac{\partial^2 u_c}{\partial s^2} \right) \right] s_\theta d\theta \quad (18)$$

### 2.3 能量等效

考虑多边形边数较多,圆弧半径较大,设直线  $\overline{O_1O_2}$  和圆弧  $\widehat{O_1O_2}$  的截面积相等,截面转矩相等,由

势能相等得到:

$$\int_0^{2\beta} \left\{ \left[ \frac{1}{2} E_b A_b \left( \frac{\partial u_b}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} E_b J_{bz} \left( \frac{\partial^2 v_b}{\partial x^2} \right)^2 \right] x_\theta - \right. \\ \left. \left[ \frac{E_c A_c}{2} \left( \frac{\partial v_c}{\partial s} \right)^2 + \frac{E_c J_{cz}}{2} \left( \frac{\partial^2 u_c}{\partial s^2} \right)^2 \right] s_\theta \right\} d\theta = \\ \frac{1}{2} \int_0^{2\beta} \left\{ E_b \left[ A_b \left( \frac{\partial u_b}{\partial x} \right)^2 + J_{bz} \left( \frac{\partial^2 v_b}{\partial x^2} \right)^2 \right] x_\theta - E_c s_\theta \cdot \right. \\ \left. \left[ A_c \left( \cos \beta \frac{\partial u_b}{\partial s} \right)^2 - J_{cz} \left( \cos \beta \frac{\partial^2 v_b}{\partial s^2} \right)^2 \right] \right\} d\theta = \\ \frac{1}{2} \int_0^{2\beta} \left[ E_b A_b \theta_x \left( \frac{\partial u_b}{\partial \theta} \right)^2 - E_c A_b \cos^2 \beta \theta_s \cdot \right. \\ \left. \left( \frac{\partial u_b}{\partial \theta} \right)^2 + E_b J_{bz} x_\theta \left( \frac{\partial^2 v_b}{\partial \theta^2} \theta_x^2 + \frac{\partial v_b}{\partial \theta} \theta_{xx} \right) - \right. \\ \left. E_c J_{bz} s_\theta \cos^2 \beta \left( \frac{\partial^2 v_b}{\partial \theta^2} \theta_s^2 + \frac{\partial v_b}{\partial \theta} \theta_{ss} \right) \right] d\theta = \\ \frac{1}{2} \int_0^{2\beta} \left[ (E_b \theta_x - E_c \theta_s \cos^2 \beta) A_b \left( \frac{\partial u_b}{\partial \theta} \right)^2 + \right. \\ \left. (E_b \theta_x^3 - E_c \theta_s^3 \cos^2 \beta) J_{bz} \left( \frac{\partial^2 v_b}{\partial \theta^2} \right)^2 \right] d\theta = \\ \frac{1}{2} \cos^2 \beta \int_0^{2\beta} \left\{ \left[ \frac{E_b}{\cos^3 \beta [1 + \tan^2(\beta - \theta)]} - E_c \right] \cdot \right. \\ \left. \frac{A_b}{R_0} \left( \frac{\partial u_b}{\partial \theta} \right)^2 + \left[ \frac{E_b}{\cos^5 \beta [1 + \tan^2(\beta - \theta)]^3} - \right. \right. \\ \left. \left. E_c \frac{J_{bz}}{R_0^3} \left( \frac{\partial^2 v_b}{\partial \theta^2} \right)^2 \right] \right\} d\theta \quad (19)$$

基于能量等效,考虑轴线伸长时直线  $\overline{O_1O_2}$  和圆弧  $\widehat{O_1O_2}$  的势能相等,由式(19)可得:

$$E_c = E_b \frac{\int_0^{2\beta} \cos^{-3} \beta [1 + \tan^2(\beta - \theta)]^{-1} d\theta}{2\beta} \quad (20a)$$

同理,考虑面内弯曲时直线  $\overline{O_1O_2}$  和圆弧  $\widehat{O_1O_2}$  的势能相等,由式(19)可得:

$$E_c = E_b \frac{\int_0^{2\beta} \cos^{-5} \beta [1 + \tan^2(\beta - \theta)]^{-3} d\theta}{2\beta} \quad (20b)$$

## 3 固有特性分析

### 3.1 频率比

结合式(16)和(20a),可得:

$$\eta_u = \frac{\sqrt{\frac{E_c}{\rho_c}}}{\sqrt{\frac{E_b}{\rho_b}}} = \frac{\sqrt{\int_0^{2\beta} \cos^{-3} \beta [1 + \tan^2(\beta - \theta)]^{-1} d\theta}}{\sqrt{\int_0^{2\beta} \cos \beta [1 + \tan^2(\beta - \theta)] d\theta}} \quad (21a)$$

结合式(16)和(20b),可得:

$$\eta_v = \frac{\sqrt{\frac{E_c}{\rho_c}}}{\sqrt{\frac{E_b}{\rho_b}}} = \frac{\sqrt{\int_0^{2\beta} \cos^{-5} \beta [1 + \tan^2(\beta - \theta)]^{-3} d\theta}}{\sqrt{\int_0^{2\beta} \cos \beta [1 + \tan^2(\beta - \theta)] d\theta}} \quad (21b)$$

式(21)给出了基于能量等效原则的直梁与其外接等效圆弧之间的弹性模量以及密度之间的关系,由式(21)可反推出采用相同材料参数时直梁和圆弧的频率比,基于此可计算得知多边形和其对应圆环的频率比 $\eta$ ,计算结果如图6所示。

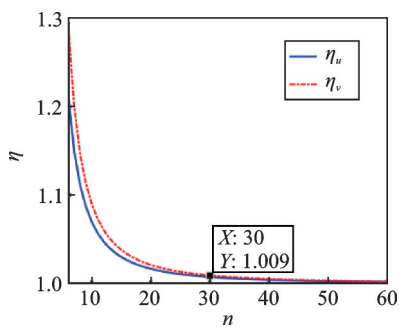


图6 多边形和对应圆环频率比  
Fig. 6 The frequency ratio of the polygon and the corresponding circle

由图6可知,采用相同的材料参数,多边形的边数在30以上时,其面内频率和外接圆环的非常接近,即图6说明当边数较多时,可以将多边形的物理参数用于近似分析外接圆环的动力学特性。

### 3.2 仿真验证

给出多边形和其外接圆环的结构参数:密度 $\rho=8000 \text{ kg/m}^3$ ,弹性模量 $E=200 \text{ GPa}$ ,截面面积 $A=12 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ ,截面宽度 $b=0.003 \text{ m}$ ,环半径 $R=1 \text{ m}$ ,利用ANSYS进行模态分析。图7所示为自由边界圆环的第一阶非零频率振型。图8所示为取相同结构参数但边数不同的多边形结构的第一阶非零频率振型,这里选取的边数分别为6,12,24和30。

结合图7和8可知,随着边数不断增多,多边形的第一阶振型与圆环的第一阶振型越来越接近,尤其是当多边形边数为30时,其第一阶振型与圆环的第一阶振型几乎一样,这表明当多边形结构边数较多时,采用圆环近似多边形是合理的。

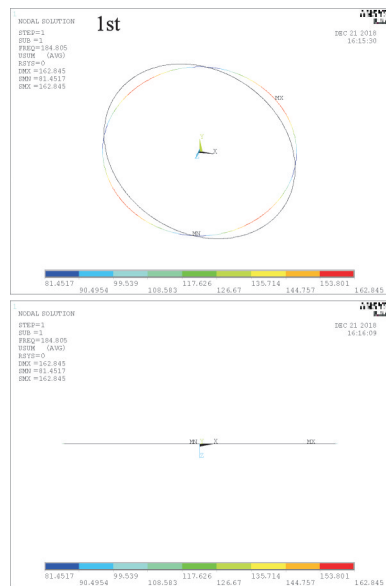
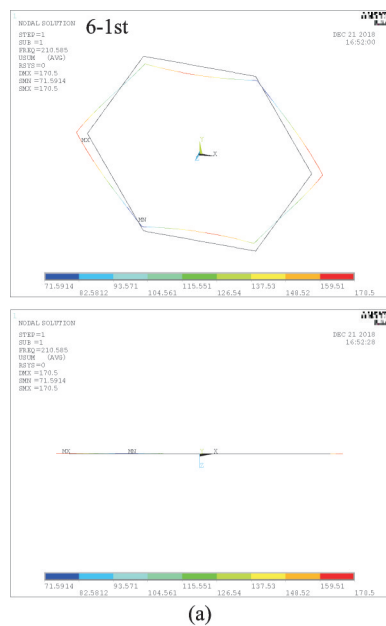
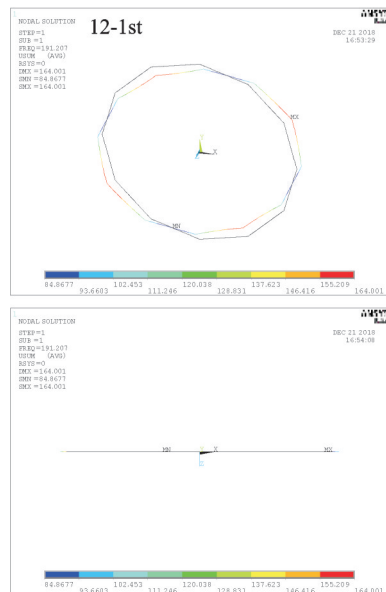


图7 圆环第一阶振型  
Fig. 7 The first modal shape of the ring



(a)



(b)

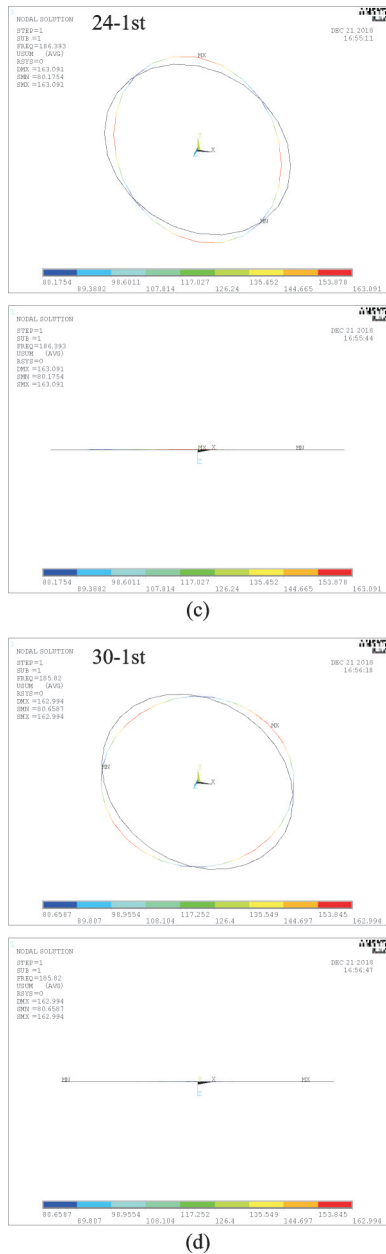


图 8 边数分别为 6,12,24,30 的正多边形第一阶振型  
Fig. 8 The first modal shapes of regular polygons with 6, 12, 24, 30 edges

图 9 给出了不同边数的多边形与其外接圆环的频率比,其中折线是有限元计算的前 8 阶频率比,红色和蓝色光滑曲线表示理论计算的频率比。由图 9

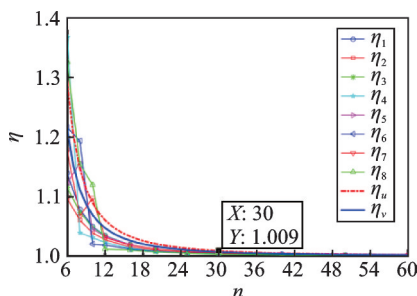


图 9 多边形和对应圆环频率比  
Fig. 9 The frequency ratio of the polygon and the corresponding arc

可知,利用有限元和理论方法计算的多边形与其外接圆环频率之比在趋势上很接近,尤其当多边形边数为 30 及以上时,圆环频率和其内接多边形频率非常接近,进一步表明当边数较多时,可用圆环近似多边形结构,这与前面振型分析所得结论一致。天线环状桁架单元数目众多,其等效多边形结构边数较多,因此根据以上分析结果可知采用圆环结构近似模拟环形桁架等效而来的多边形结构是可行的。

## 4 结 论

本文利用能量等效原理,基于梁模型得到了大型网架式天线环状支撑桁架的等效多边形结构。在此基础上,计算了等效多边形单元和与其对应的外接圆环单元的动能及应变能,利用能量等效原则得到了等效多边形结构和对应圆环结构的频率关系,对比分析了圆环结构和边数分别为 6,12,24 和 30 的等效多边形结构的振型和频率,并通过有限元验证了理论计算结果。研究发现当多边形边数在 30 以上后,多边形结构与其对应圆环结构的前 8 阶频率非常接近。研究结果表明当环状桁架单元数目较多的情况下,通过能量等效方法采用等效圆环结构对环状桁架进行后续动力学分析是合理可行的。本文研究方法可拓展到空间大型复杂桁架结构的动力学降阶建模。

## 参考文献:

- [1] 马小飞,李洋,肖勇,等.大型空间可展开天线反射器研究现状与展望[J].空间电子技术,2018,2: 16-26.  
Ma Xiaofei, Li Yang, Xiao Yong, et al. Development and tendency of large space deployable antenna reflector [J].Space Electronic Technology, 2018, 2: 16-26.
- [2] 孟光,周徐斌,苗军.航天重大工程中的力学问题[J].力学进展,2016,46: 267-322.  
Meng Guang, Zhou Xubin, Miao Jun. Mechanical problems in momentous projects of aerospace engineering [J]. Advances in Mechanics, 2016, 46: 267-322.
- [3] 胡海岩,田强,张伟,等.大型网架式可展开空间结构的非线性动力学与控制[J].力学进展,2013,43(4): 390-414.  
Hu Haiyan, Tian Qiang, Zhang Wei, et al. Nonlinear dynamics and control of large deployable space structures composed of trusses and meshes [J]. Advances in Mechanics, 2013, 43(4): 390-414.
- [4] Li Tuanjie. Deployment analysis and control of deployable space antenna [J]. Aerospace Science and Technology, 2012, 18: 42-47.
- [5] Nie Rui, He Baiyan, Zhang Lianhong. Deployment dynamics modeling and analysis for mesh reflector anten-

- nas considering the motion feasibility[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 91: 549-564.
- [6] Li Pei, Liu Cheng, Tian Qiang, et al. Dynamics of a deployable mesh reflector of satellite antenna: parallel computation and deployment simulation[J]. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2016, 11: 061005.
- [7] Lu Shaolin, Qi Xiaozhi, Hu Ying, et al. Deployment dynamics of large space antenna and supporting arms [J]. *IEEE ACCESS*, 2019, 7: 69922-69935.
- [8] 曹登庆, 白坤朝, 丁虎, 等. 大型柔性航天器动力学与振动控制研究进展[J]. *力学学报*, 2019, 51(1):1-13.  
Cao Dengqing, Bai Kunchao, Ding Hu, et al. Advances in dynamics and vibration control of large-scale flexible spacecraft [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(1): 1-13.
- [9] Chen Jie, Zhang Wei, Zhang Y F. Equivalent continuum model and nonlinear breathing vibrations of rotating circular truss antenna subjected to thermal excitation [J]. *Thin-Walled Structures*, 2020, 157:107127.
- [10] Noor Ahmed K, Anderson Melvin S, Creene William H. Continuum models for beam- and platelike lattice structures [J]. *AIAA Journal*, 1978, 16 (12) : 1219-1228.
- [11] Nayfeh Adna H, Hefzy Mohamed S. Continuum modeling of three-dimensional truss-like space structures [J]. *AIAA Journal*, 1978, 16(8): 779-787.
- [12] Moreau G, Caillerie D. Continuum modeling of lattice structures in large displacement applications to buckling analysis [J]. *Computers and Structures*, 1998, 68 (1-3): 181-189.
- [13] Salehian A, Inman D J. Dynamic analysis of a lattice structure by homogenization: experimental validation [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 316(1-5): 180-197.
- [14] Guo Hongwei, Shi Chuang, Li Meng, et al. Design and dynamic equivalent modeling of double-layer hoop deployable antenna [J]. *International Journal of Aerospace Engineering*, 2018, 2018, DOI:10.1155/2941981.
- [15] Liu Fushou, Jin Dongping, Wen Hao. Equivalent dynamic model for hoop truss structure composed of planar repeating elements [J]. *AIAA Journal*, 2017, 55 (3): 1058-1063.
- [16] 柳剑波, 王立峰, 金栋平. 周期胞元平面桁架结构等效动力学分析[J]. *振动工程学报*, 2018, 31(1): 67-73.  
Liu Jianbo, Wang Lifeng, Jin Dongping. Equivalent continuum modeling of a kind of planar lattice truss[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2018, 31(1): 67-73.
- [17] Liu Mei, Cao Dengqing, Zhu Dongfang. Coupled vibration analysis for equivalent dynamic model of the space antenna truss [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2021, 89: 285-295.

## The reduced-order continuum model of the ring-shaped supported truss structure of the mesh antenna

WU Rui-qin<sup>1,2</sup>, ZHU Wei<sup>1,2</sup>, ZHANG Wei<sup>3</sup>, CHEN Jian-en<sup>1,2</sup>, HU Wen-hua<sup>1,2</sup>

(1.Tianjin Key Laboratory for Advanced Mechatronic System Design and Intelligent Control, School of Mechanical Engineering, Tianjin University of Technology, Tianjin 300384, China;

2.National Demonstration Center for Experimental Mechanical and Electrical Engineering Education, Tianjin University of Technology, Tianjin 300384, China;

3.Beijing Key Laboratory on Nonlinear Vibrations and Strength of Mechanical Structures, College of Mechanical Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

**Abstract:** The truss element is described according to the structural composition characteristics of the ring-shaped supported truss, and the deformation assumptions are given. The equivalent polygon structure of the ring-shaped truss is obtained based on the beam model. The kinetic energy and strain energy of the equivalent polygon unit and its corresponding circumscribed circular ring unit are calculated. The relational expressions between the elasticity modulus and density of the equivalent polygon structure and the circumscribed circular ring are derived by using the energy equivalence principle. Thus, the expressions of the frequency ratio are obtained. The modal shapes and frequencies of the equivalent polygon structure and the corresponding ring structure are compared by using the finite element method and the theoretical method. The results show that it is reasonable to use the continuum ring model to simplify the equivalent polygon structure for the dynamic analysis of the ring truss structure when the number of elements is more than 30.

**Key words:** the supported truss; the continuum model; equivalent polygon structure; frequency ratio

作者简介: 吴瑞琴(1990—),女,讲师。电话:18811529132; E-mail: ruiqinwu@163.com。

通讯作者: 胡文华(1982—),男,讲师。电话:18222326797; E-mail: huwenhua@tjut.edu.cn。