第35卷第2期
2022年4月

振　动　工　程　学　报
Journal of Vibration Engineering

Vol. 35 No. 2
Apr. 2022

平面薄膜结构耦合动力学特性研究与无量纲分析

张　月[1]，从　强[2]，刘荣强[1]，史　创[1]，郭宏伟[1]，林秋红[2]

（1.哈尔滨工业大学机电工程系，黑龙江 哈尔滨 150001；2.北京空间飞行器总体设计部，北京 100094）

摘要： 利用固定界面的模态综合法建立了平面薄膜结构耦合动力学模型，精确得到了薄膜结构发生耦合振动的临界条件，分析了其耦合动力学特性。结果表明，与薄膜结构耦合基频有关的参数主要有薄膜预应力、框架弹性模量、截面惯性矩、长宽比、边长、框架横截面积、框架密度、薄膜密度和薄膜厚度。当薄膜预应力小于临界值时，薄膜结构的振动由薄膜来主导，当薄膜预应力大于临界值时，薄膜与框架发生耦合振动，此时薄膜结构的振动特性由薄膜与框架共同影响，并且随着薄膜预应力的增大，薄膜与框架发生耦合振动的阶数也随之增多并会出现振型顺序后移的现象。对薄膜结构的动力学特性进行了无量纲分析，推导了薄膜结构的小尺寸模型和大尺寸实物之间的相似准则。

关键词： 薄膜结构；耦合振动；模态综合；无量纲分析；相似准则

中图分类号： V414.3　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1004-4523(2022)02-0495-08

DOI：10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2022.02.025

引　言

平面薄膜结构不同于传统的刚性桁架结构，具有质量轻、面积大和高收纳比等优点，被广泛地应用到航天器上，如大型薄膜天线、柔性太阳能电池阵和太阳帆等。

平面薄膜结构可靠的动力学行为是保证其在轨工作时能够稳定运行的必要条件，国内外学者在薄膜结构动力学领域开展了相关研究。吕娟霞等[1]利用在轨识别的方法来确定薄膜天线的模态参数。邱慧等[2]从仿真和实验两个角度分析了薄膜预应力和花边半径对薄膜自由振动的影响。曹鹏等[3]通过数值模拟建立了薄膜结构的有限元模型，确定了最优薄膜边界形状。Goncalves等[4]研究了在时变横向张力作用下圆形薄膜的非线性振动响应。张华等[5]分析了薄膜材料、厚度和预应力对其动力学特性的影响。Lesieutre[6]针对薄膜载荷如何影响其结构模态阻尼进行了相应研究。张莹莹[7]利用绝对节点坐标法分析了薄膜结构对冲击的响应。马鑫等[8]对太阳帆柔性结构动力学进行了仿真分析。郑志刚[9]研究了四边固支薄膜的非线性。Tatematsu等[10]通过实验研究了各参数对不同尺寸薄膜结构间的相似关系的影响程度。林文静等[11]和胡宇[12]分别从理论和仿真两个角度研究了薄膜结构的动力学特性。

上述学者对薄膜结构动力学特性的研究大多停留在仿真与实验分析阶段，均对薄膜结构各部件间的耦合关系进行了一定程度的简化或者直接忽略耦合关系，并未说明简化的合理性与依据，对薄膜结构耦合机理方面的研究不足，分析得到的薄膜结构耦合振动临界点的准确性有待提高。然而薄膜结构各部件间的耦合振动在很大程度上影响着其整体动力学特性，此外，目前在薄膜结构小尺寸模型与大尺寸实物间的相似关系方面的研究也很少。本文针对薄膜结构发生耦合振动的临界条件，进行相应的理论分析、仿真校验和无量纲分析，来研究平面薄膜结构耦合动力学特性。

1　支撑框架自由振动动力学特性

平面薄膜结构的支撑框架如图1所示。该矩形支撑框架主要由可伸展支撑杆1、端杆和可伸展支撑杆2组成，并分别在界面o_3和界面o_4处刚性连接。为了使子结构易于分析，且使对接面尽量缩小，以减少子结构之间的耦合，将支撑框架划分为三个子结构，三个子结构分别对应支撑框架的三个部件。分别以固定端o_1和o_2以及界面o_3和o_4为原点建立坐标系$o_1x_1z_1$，$o_2x_2z_2$，$o_3x_3z_3$和$o_4x_4z_4$。

本文将采用固定界面的模态综合法，故将三个子结构的界面o_3和o_4加以固定，使三个子结构等效为两端固定的直梁，对于可伸展支撑杆来说，其满足几何边界条件的模态函数可取为：

收稿日期： 2020-08-06；**修订日期：** 2020-12-18

基金项目： 国家自然科学基金重点项目（51835002）；中国博士后科学基金资助项目（2021M690827）；黑龙江省博士后专项经费（LBH-Z20135）资助项目。

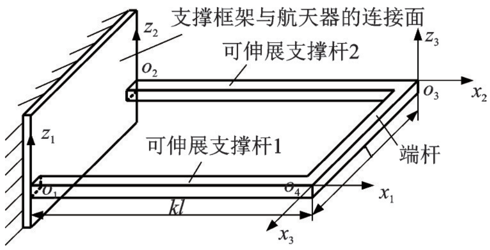


图1 支撑框架示意图

Fig. 1 Schematic diagram of support frame

$$\phi_1(x_i)=\left(\frac{x_i}{kl}\right)^2\left(1-\frac{x_i}{kl}\right)^2,\quad i=1,2 \tag{1}$$

式中 k为长宽比,l为端杆的长度。

不计可伸展支撑杆的纵向变形时,界面无横向位移,但可自由转动。当界面o_3和o_4产生单位角位移时,可伸展支撑杆满足几何边界条件的模态,即约束模态可取为:

$$\phi_2(x_i)=\left(\frac{x_i}{kl}\right)^2\left(1-\frac{x_i}{kl}\right),\quad i=1,2 \tag{2}$$

同理,端杆的模态函数可取为:

$$\phi_3(x_3)=\left(\frac{x_3}{l}\right)^2\left(1-\frac{x_3}{l}\right)^2 \tag{3}$$

端杆的约束模态可取为:

$$\phi_4(x_3)=\frac{x_3}{l}\left(1-\frac{x_3}{l}\right) \tag{4}$$

将支撑框架各子结构自由振动时的横向位移在物理空间下的表达式转化为模态空间表达式,表示为:

$$\begin{cases} z_1(x_1,t)=[\ \phi_1(x_1)\quad \phi_2(x_1)\ ]\begin{bmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Phi}_1(x_1)\boldsymbol{\Psi}_1(t)\\ z_2(x_2,t)=[\ \phi_1(x_2)\quad \phi_2(x_2)\ ]\begin{bmatrix}\zeta_3\\ \zeta_4\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Phi}_2(x_2)\boldsymbol{\Psi}_2(t)\\ z_3(x_3,t)=[\ \phi_3(x_3)\quad \phi_4(x_3)\ ]\begin{bmatrix}\zeta_5\\ \zeta_6\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Phi}_3(x_3)\boldsymbol{\Psi}_3(t)\end{cases} \tag{5}$$

式中 $z_1(x_1,t)$,$z_2(x_2,t)$和$z_3(x_3,t)$分别表示可伸展支撑杆1、可伸展支撑杆2和端杆在z方向上的位移,$\zeta_i(i=1,2,3,4,5,6)$为支撑框架各子结构的模态坐标。

支撑框架系统的动能可表示为:

$$\begin{aligned} T=&\frac{1}{2}\int_0^{kl}\rho_t S\left\{\left[\frac{\partial z_1(x_1,t)}{\partial t}\right]^2+\left[\frac{\partial z_2(x_2,t)}{\partial t}\right]^2\right\}\mathrm{d}x+\\ &\frac{1}{2}\int_0^{l}\rho_t S\left[\frac{\partial z_3(x_3,t)}{\partial t}\right]^2\mathrm{d}x=\\ &\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\Psi}}_1^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{M}}_1\dot{\boldsymbol{\Psi}}_1+\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\Psi}}_2^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{M}}_2\dot{\boldsymbol{\Psi}}_2+\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\Psi}}_3^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{M}}_3\dot{\boldsymbol{\Psi}}_3=\\ &\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\Psi}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{M}}\dot{\boldsymbol{\Psi}}\end{aligned} \tag{6}$$

式中 ρ_t,S分别为支撑框架各子结构的密度和横截面积;$\boldsymbol{\Psi}$为支撑框架的模态坐标矩阵;$\boldsymbol{\Psi}=(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4,\zeta_5,\zeta_6)$;$\widetilde{\boldsymbol{M}}_1$,$\widetilde{\boldsymbol{M}}_2$和$\widetilde{\boldsymbol{M}}_3$分别为可伸展支撑杆1、可伸展支撑杆2和端杆的质量矩阵;$\widetilde{\boldsymbol{M}}$为支撑框架的质量矩阵。

支撑框架的势能可表示为:

$$\begin{aligned} V=&\frac{1}{2}\int_0^{kl}EI\left\{\left[\frac{\partial^2 z_1(x_1,t)}{\partial x_1^2}\right]^2+\left[\frac{\partial^2 z_2(x_2,t)}{\partial x_2^2}\right]^2\right\}\mathrm{d}x+\\ &\frac{1}{2}\int_0^{l}EI\left[\frac{\partial^2 z_3(x_3,t)}{\partial x_3^2}\right]^2\mathrm{d}x=\\ &\frac{1}{2}\boldsymbol{\Psi}_1^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{K}}_1\boldsymbol{\Psi}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\Psi}_2^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{K}}_2\boldsymbol{\Psi}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{\Psi}_3^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{K}}_3\boldsymbol{\Psi}_3=\\ &\frac{1}{2}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{\Psi}\end{aligned} \tag{7}$$

式中 E和I分别为支撑框架各子结构的弹性模量和截面惯性矩;$\widetilde{\boldsymbol{K}}_1$,$\widetilde{\boldsymbol{K}}_2$和$\widetilde{\boldsymbol{K}}_3$分别为可伸展支撑杆1、可伸展支撑杆2和端杆的刚度矩阵;$\widetilde{\boldsymbol{K}}$为支撑框架的刚度矩阵。

支撑框架三子结构的联接界面o_3和o_4分别满足位移协调条件和弯矩协调条件,结合式(5)所得到的约束方程组可表示为:

$$\begin{cases}\zeta_3=\zeta_1-4\zeta_2\\ \zeta_4=-\zeta_2\\ \zeta_5=\zeta_1-\zeta_2\\ \zeta_6=\zeta_2\end{cases} \tag{8}$$

取独立模态坐标:ζ_1,ζ_2记作q_1,q_2,引入坐标列阵$\boldsymbol{q}$:

$$\boldsymbol{q}=(\ q_1\quad q_2\ )^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

则约束方程组可写作:

$$\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{q} \tag{10}$$

式中 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{1}{k^2} & 0\\ 0 & 1 & -4 & -1 & \left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{2}{k^2}\right) & \dfrac{1}{k}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$为约束矩阵。

将式(10)代入式(6)和(7)得到用独立模态坐标表示的支撑框架系统的动能和势能的表达式:

$$T=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{q}},\ V=\frac{1}{2}\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{q} \tag{11}$$

式中 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{\beta}$,$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{\beta}$。

支撑框架系统的本征方程为:

$$\left|\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right|=0 \tag{12}$$

分别将支撑框架的质量矩阵和刚度矩阵代入上式可得到支撑框架的基频为:

$$\omega_t=\sqrt{\frac{1008EI(18k-\gamma+\tau)}{\rho_t S l^4 k^2\nu}} \tag{13}$$

式中　$\gamma=(324k^2+882k^3+2785k^4+3188k^5+2476k^6-224k^7+4680k^8+4344k^9-44k^{10}+3040k^{11}+992k^{12}-960k^{13}+144k^{14})^{\frac{1}{2}}$,$\tau=26k^2+62k^3+38k^5+112k^6+12k^7$,$\nu=3+152k^3+248k^5+304k^8$。

可伸展支撑杆的模态向量满足:

$$(\boldsymbol{K}-\omega_i^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{\phi}=0 \tag{14}$$

可得到支撑杆 $i(i=1,2)$ 的模态向量:

$$\boldsymbol{\phi}_i=(2.02\quad 1)^{\mathrm{T}},\quad i=1,2 \tag{15}$$

进而得到支撑杆 $i(i=1,2)$ 的模态函数:

$$\varphi_i=2.02\phi_1+\phi_2=2.02\left(\frac{x_i}{kl}\right)^2\left(1-\frac{x_i}{kl}\right)^2+\left(\frac{x_i}{kl}\right)^2\left(1-\frac{x_i}{kl}\right),\quad i=1,2 \tag{16}$$

同理可得端杆的模态函数:

$$\varphi_3=1.08\phi_3+\phi_4=1.08\left(\frac{x_3}{l}\right)^2\cdot\left(1-\frac{x_3}{l}\right)^2+\frac{x_3}{l}\left(1-\frac{x_3}{l}\right) \tag{17}$$

2　平面薄膜结构耦合动力学特性研究

2.1　边界约束下的薄膜自由振动动力学特性

以支撑框架为边界的的矩形薄膜如图 2 所示,将矩形薄膜看作连续系统来建立其偏微分动力学方程。

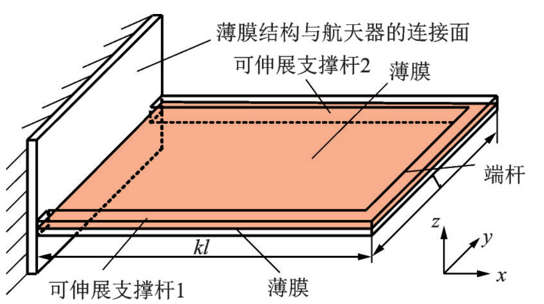


图 2　以支撑框架为边界的薄膜示意图

Fig. 2　Schematic diagram of membrane structure with support frame as boundary

假设薄膜振动时其张力变化量相对于原有张力可以忽略,则薄膜在 z 方向上的动力学方程[9]可表示为:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)F=\rho_m\sigma\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \tag{18}$$

式中　$z(x,y,t)$ 为薄膜在 z 方向的位移函数,ρ_m 为薄膜密度,σ 为薄膜厚度,F 为薄膜预应力。

将薄膜在 z 方向上的位移函数在物理空间的表达转化为在模态空间的表达式:

$$z(x,y,t)=\alpha(x,y)\beta(t) \tag{19}$$

式中　$\alpha(x,y)$ 为薄膜振动的模态函数,$\beta(t)$ 为薄膜振动的广义坐标。

将上式代入式(18)得:

$$\frac{F}{\alpha}\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}\right)=\frac{\rho_m\sigma}{\beta}\frac{\partial^2\beta}{\partial t^2} \tag{20}$$

由于上式的左端与 t 无关,右端与 x,y 无关,故方程左右两端恒等于一常数,不妨暂设这个常数为一负数 $-\omega^2$,则有:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}+\dfrac{\rho_m\sigma}{F}\omega^2\alpha=0\\[2ex]\dfrac{\partial^2\beta}{\partial t^2}+\omega^2\beta=0\end{cases} \tag{21}$$

将模态函数进行变量分离,可以写作:

$$\alpha(x,y)=I(x)J(y) \tag{22}$$

将式(22)代入式(21)的第一个常微分方程可得:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}\frac{1}{I}+\frac{\partial^2 J}{\partial y^2}\frac{1}{J}+\frac{\rho_m\sigma}{F}\omega^2=0 \tag{23}$$

令 $W_1^2+W_2^2=\rho_m\sigma\omega^2/F$,将其代入到式(23),可得到两个线性常微分方程,分别为:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 I}{\partial x^2}+W_1^2 I=0\\[2ex]\dfrac{\partial^2 J}{\partial y^2}+W_2^2 J=0\end{cases} \tag{24}$$

解上述微分方程可得:

$$\begin{cases}I(x)=A_1\sin(W_1x)+B_1\cos(W_1x)\\J(x)=A_2\sin(W_2x)+B_2\cos(W_2x)\end{cases} \tag{25}$$

将上式代入式(22)可得含有未知数的薄膜模态函数的表达式:

$$\begin{aligned}\alpha(x,y)=\;&C_1\sin(W_1x)\sin(W_2y)+\\&C_2\sin(W_1x)\cos(W_2y)+\\&C_3\cos(W_1x)\sin(W_2y)+\\&C_4\cos(W_1x)\cos(W_2y)\end{aligned} \tag{26}$$

以支撑框架为边界的薄膜边界条件为:

$$\begin{cases}\alpha(x_1,0)=\phi_1(x_1)\\\alpha(x_2,l)=\phi_2(x_2)\\\alpha(kl,x_3)=\phi_3(x_3)\\\alpha(0,y)=0\end{cases} \tag{27}$$

为了计算方便又对最终的计算结果影响不大,

可将支撑框架各子结构的模态函数简化为如下形式：

$$\begin{cases}\varphi_i(x_i)=2\phi_1(x_i)+\phi_2(x_i),i=1,2\\ \varphi_3(x_3)=\phi_1(x_3)+\phi_3(x_3)\end{cases} \tag{28}$$

将式(26)和(28)代入式(27)中可得：

$$\begin{cases}C_2\sin(W_1x)=\varphi_1(x)\\ C_1\sin(W_1x)\sin(W_2l)+\varphi_1(x)\cos(W_2l)=\varphi_2(x)\\ C_1\sin(W_1kl)\sin(W_2y)=\varphi_3(y)\\ C_3=C_4=0,\quad x=y=0\end{cases} \tag{29}$$

则当 $y\to l/2$ 时，$\sin(W_2y)$ 与 $1/C_1(y)$ 必为同阶无穷小，满足：

$$\lim_{y\to\frac{l}{2}}\frac{\sin\frac{2n\pi}{l}y}{\frac{1}{C_1(y)}}=c \tag{30}$$

式中 c 为一常数，$C_1(y)=C_1$。

假设 $c=1$，则根据式(29)与式(30)可以近似得出：

$$W_1=\frac{1}{\pi kl},W_2=\frac{2\pi}{l} \tag{31}$$

将式(31)代入式(24)可得以支撑框架为边界的矩形薄膜自由振动的基频表达式：

$$\omega=\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{F}{\rho_m\sigma}\left(\frac{1}{k^2\pi^4}+4\right)} \tag{32}$$

2.2 薄膜与框架耦合振动动力学特性

将支撑框架各子结构与薄膜耦合后的平面薄膜结构在 z 方向上的位移 $z(x,y,t)$ 在物理空间下的表达式转化为模态空间表达式：

$$z(x,y,t)=\varphi_1(x)\zeta_1(t)+\varphi_2(x)\zeta_2(t)+\varphi_3(y)\zeta_3(t)+\alpha(x,y)\zeta_4(t) \tag{33}$$

式中 $\zeta_i(t)(i=1,2,3,4)$ 为平面薄膜结构的耦合模态坐标，$\alpha(x,y)$ 为文献[9]中所推出的四边固支薄膜的模态函数。

平面薄膜结构在 z 方向上的位移表达式可用矩阵表示为：

$$z(x,y,t)=[\varphi_1(x)\ \varphi_3(y)\ \alpha(x,y)]\begin{bmatrix}\zeta_a(t)\\ \zeta_b(t)\\ \zeta_c(t)\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Phi}(x,y)\boldsymbol{q}(t) \tag{34}$$

式中 $\zeta_a(t)=\zeta_1(t)+\zeta_2(t)$，$\zeta_b(t)=\zeta_3(t)$，$\zeta_c(t)=\zeta_4(t)$

则平面薄膜结构的动能可表示为：

$$T=\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^{kl}\rho_tS\rho_ml\delta\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{q}} \tag{35}$$

式中 $\boldsymbol{q}$ 为平面薄膜结构耦合模态坐标矩阵，δ 为薄膜厚度，$\boldsymbol{M}$ 为平面薄膜结构耦合质量矩阵：

$$\boldsymbol{M}=\rho_tS\rho_ml\delta\cdot\begin{bmatrix}\int_0^l\int_0^{kl}\varphi_1^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y & \int_0^l\int_0^{kl}\varphi_1\varphi_3\mathrm{d}x\mathrm{d}y & \int_0^l\int_0^{kl}\varphi_1\alpha\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \int_0^l\int_0^{kl}\varphi_1\varphi_3\mathrm{d}x\mathrm{d}y & \int_0^l\int_0^{kl}\varphi_3^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y & \int_0^l\int_0^{kl}\varphi_3\alpha\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \int_0^l\int_0^{kl}\varphi_1\alpha\mathrm{d}x\mathrm{d}y & \int_0^l\int_0^{kl}\varphi_3\alpha\mathrm{d}x\mathrm{d}y & \int_0^l\int_0^{kl}\alpha^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{bmatrix} \tag{36}$$

由于薄膜自身的抗弯刚度几乎为零，薄膜主要是靠其表面的预应力来提供抗弯刚度，从而抵抗外界的弯曲载荷，故平面薄膜结构的势能可表示为：

$$V=\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^{kl}EIF\left(\frac{\partial^4z(x,y,t)}{\partial x^2\partial y^2}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{q} \tag{37}$$

式中 $\boldsymbol{K}$ 为薄膜结构耦合刚度矩阵。

$$\boldsymbol{K}=EFI\cdot\begin{bmatrix}\int_0^l\int_0^{kl}(\varphi_1'')^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y & \int_0^l\int_0^{kl}\varphi_1''\varphi_3''\mathrm{d}x\mathrm{d}y & \int_0^l\int_0^{kl}\varphi_1''\alpha^{(4)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \int_0^l\int_0^{kl}\varphi_1''\varphi_3''\mathrm{d}x\mathrm{d}y & \int_0^l\int_0^{kl}(\varphi_3'')^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y & \int_0^l\int_0^{kl}\varphi_3''\alpha^{(4)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \int_0^l\int_0^{kl}\varphi_1''\alpha^{(4)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y & \int_0^l\int_0^{kl}\varphi_3''\alpha^{(4)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y & \int_0^l\int_0^{kl}(\alpha^{(4)})^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{bmatrix} \tag{38}$$

平面薄膜结构系统的本征方程为：

$$\left|\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right|=0 \tag{39}$$

分别将平面薄膜结构的质量矩阵和刚度矩阵代入上式即可得到平面薄膜结构的基频的表达式：

$$\omega=\sqrt{\frac{287639EFI}{13k^3l^7\rho_tS\rho_m\delta}} \tag{40}$$

由之前对支撑框架的动力学分析可知，可伸展支撑杆或者端杆受压后整个支撑框架的质量矩阵不变，但其刚度矩阵的变化与施加在薄膜上的预应力有关，具体可表示为：

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{\beta}=\frac{EI}{5k^4l^3(1+16F)}\cdot\begin{bmatrix}2k+1 & -3k-2\\ -3k-2 & 6k^2+22k+4\end{bmatrix} \tag{41}$$

结合支撑框架的质量矩阵表达式可得到考虑薄膜预应力影响的框架基频表达式：

$$\omega=\sqrt{\frac{1008EI(18k-\gamma+\tau)}{\rho_tSl^4k^2\nu(1+16F)}} \tag{42}$$

式中 $\gamma=(324k^2+882k^3+2785k^4+3188k^5+$

$2476k^6-224k^7+4680k^8+4344k^9-44k^{10}+3040k^{11}+992k^{12}-960k^{13}+144k^{14})^{\frac{1}{2}}$，$\tau=26k^2+62k^3+38k^5+112k^6+12k^7$，$\nu=3+152k^3+248k^5+304k^8$。

根据式(42)可知，薄膜结构的耦合基频随着薄膜预应力、框架弹性模量和截面惯性矩的增大而增大，随着长宽比、边长、框架横截面积、框架密度、薄膜密度和薄膜厚度的增大而减小。

3　算例分析

本文所用到的平面薄膜结构的各物理量参数如表1所示。

表1　框架与薄膜物理量参数

Tab. 1　Frame and membrane physical parameters

参数	数值
端杆长度/mm	500
框架密度/(kg·m^{-3})	2700
薄膜结构长宽比	1
框架泊松比	0.35
框架弹性模量/MPa	70000
框架截面尺寸/(mm×mm)	20×5
薄膜厚度/mm	0.05
薄膜密度/(kg·m^{-3})	1420
薄膜弹性模量/MPa	3000
薄膜预应力/MPa	0.012
薄膜边长/mm	500

根据式(32)，(40)和(42)，总结薄膜结构预应力对各基频的影响规律，所绘制的影响曲线如图3所示。

框架基频受薄膜预应力的影响较小，薄膜结构基频比预应力薄膜基频略小，但其受预应力影响的

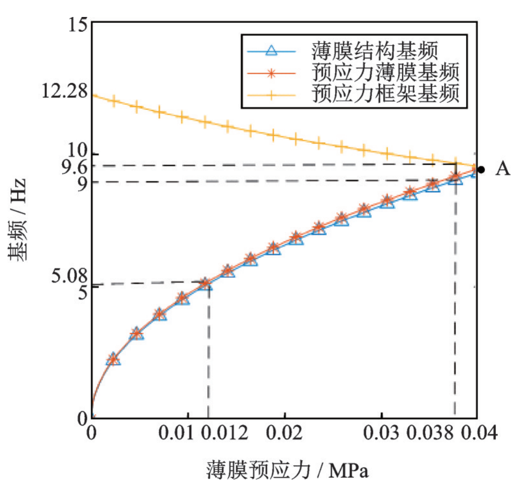


图3　薄膜预应力对各基频的影响

Fig. 3　Effect of membrane prestress on each fundamental frequency

曲线基本重合，说明预应力薄膜始终都在影响着薄膜结构振动。预应力框架基频随着薄膜预应力的增大而减小，而预应力薄膜与薄膜结构的基频随着薄膜预应力的增大而增大，且随着薄膜预应力增大，三条曲线趋于一点，当薄膜预应力增加到0.038 MPa时，预应力框架的基频为9.6 Hz，薄膜结构基频为9 Hz，相差约6%，此时框架与薄膜开始发生耦合振动，薄膜结构的振动特性由框架与薄膜共同影响，在此之前薄膜结构的自由振动仅由薄膜主导。

4　平面薄膜结构耦合动力学特性无量纲分析

目前应用在航天上的平面薄膜结构具有尺寸大、构型复杂和制作成本高昂等特点，又考虑到受实际地面实验条件的限制，现有的实验设施难以满足对大型或超大型平面薄膜结构进行实验验证的要求，因此，本文将对平面薄膜结构进行无量纲分析，推导薄膜结构缩比样机模型与大尺寸实物之间的相似准则。

根据式(40)对平面薄膜结构的基频表达式进行无量纲化。为了便于与后文区分，式(40)中的薄膜预应力F用F_1来替换，则各物理量可以表示为：

$$f(E,F_1,I,k,l,\rho_t,\rho_m,S,\delta,\omega)=0 \tag{43}$$

设无量纲π可表示为：

$$\pi=E^aF_1{}^bI^ck^dl^e\rho_t{}^f\rho_m{}^gS^h\delta^i\omega^j \tag{44}$$

采用力-量系统(F-L-T)来表示各物理量的量纲，各物理量的量纲如表1所示。

由F，L，T和各物理量以及各物理量的指数可表示出量纲矩阵：

$$\begin{array}{c} \\ \\ F \\ L \\ T \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h & i & j \\ E & F_1 & I & k & l & \rho_t & \rho_m & S & \delta & \omega \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 & 1 & -4 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \tag{45}$$

根据量纲矩阵分别对于F，L，T列出关于各指数的联立方程组：

$$\begin{cases} a+b+f+g=0 & (\text{对于}F) \\ -2a-2b+4c+e-4f-4g+ & \\ \quad 2h+i=0 & (\text{对于}L) \\ 2f+2g+j=0 & (\text{对于}T) \end{cases} \tag{46}$$

取薄膜结构边长l、框架的弹性模量E和基频ω三个物理量为基本量纲，则式(46)根据基本量纲进行移项得：

$$\begin{cases} a=-b-f-g \\ e=-2b-4c+2f+2g-2h-i \\ j=-2f-2g \end{cases} \tag{47}$$

综合以上推导并根据相似第二定理可列出π矩阵：

$$\begin{array}{c} \\ \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \\ \pi_6 \\ \pi_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} b & c & d & f & g & h & i & a & e & j \\ F & I & k & \rho_t & \rho_m & S & \delta & E & l & \omega \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{48}$$

再根据π定理可以得到各物理量的相似准则：

$$\begin{gathered} \pi_1=\frac{F}{E},\pi_2=\frac{I}{l^4},\ \pi_3=k,\pi_4=\frac{\rho_t l^2}{E\omega^2}, \\ \pi_5=\frac{\rho_m l^2}{E\omega^2},\pi_6=\frac{S}{l^2},\pi_7=\frac{\delta}{l} \end{gathered} \tag{49}$$

式中 π_1为无量纲薄膜预应力，π_2为无量纲框架各杆件的截面惯性矩，π_3为无量纲长宽比，π_4为无量纲框架密度，π_5为无量纲薄膜密度；π_6为无量纲框架各杆件横截面，π_7为无量纲薄膜厚度。

结合式(40)平面薄膜结构基频以边长l和框架的弹性模量E为基本量纲的无量纲表达式为：

$$\omega=\sqrt{\frac{287639E\pi_1\pi_2}{13\pi_3^3 l^7\pi_4\pi_5\pi_6\pi_7}} \tag{50}$$

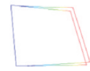
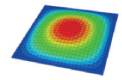
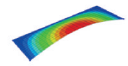
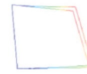
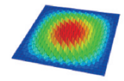
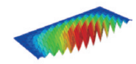
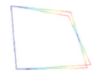
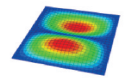
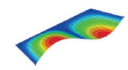
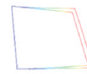
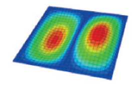
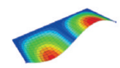
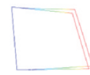
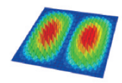
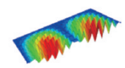
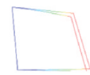
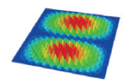
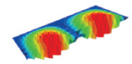
5 仿真校验

为了验证上文所分析的平面薄膜结构耦合动力学特性，本文将利用有限元仿真软件ABAQUS对平面薄膜结构进行模态仿真分析，薄膜结构各项参数的具体数值如表1所示，分别提取了薄膜结构自由振动的前六阶固有频率和相应振型以及各振型的剖面示意图，仿真结果如表2所示。

由表2可以看出，薄膜结构仿真结果的基频值为5.11 Hz，而前面算例的图3所示的薄膜结构基频理论值为5.08 Hz，相对误差不到1%，验证了理论推导的正确性。观察薄膜结构自由振动的各阶振型图可以看出，其振型不再只是常规的单向振型，而是出现了像二阶振型、五阶振型和六阶振型形式的剖面为锯齿状的双向振型，出现这一现象的原因是薄膜的四周边界与框架相连，而不是四周边界固定的工况，其相关的振动特性发生了改变。此外，还可以看出框架的各阶振型均有所不同，但薄膜的四周边界与框架相连的部分却处于静止状态，并没有发生振动，这说明此时薄膜与框架在各自做着自由振动，互不影响，并没有发生耦合振动，而薄膜结构各阶振型的变化主要体现在薄膜振型的变化上，这也对应了前面的理论分析，即当薄膜预应力为0.012 MPa时，小于0.038 MP薄膜与框架不发生耦合振动，并且此时薄膜结构的自由振动由薄膜来主导。

表2 薄膜结构仿真模态分析

Tab. 2 Simulation modal analysis of membrane structure

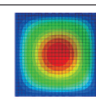
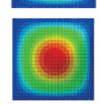
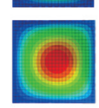
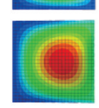
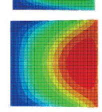
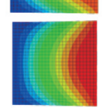
模态阶数	固有频率	框架振型	薄膜结构振型	薄膜结构振型剖面
1	5.11			
2	5.51			
3	8.06			
4	8.35			
5	8.54			
6	9.36			

为了验证薄膜与框架发生耦合的条件，利用ABAQUS对不同薄膜预应力工况的薄膜结构进行模态分析，提取其第一阶振型情况，如表3所示。

由以上模态分析结果可以看出，当薄膜预应力

表3 不同薄膜预应力下薄膜结构的一阶振型

Tab. 3 First mode shapes of membrane structures under different membrane prestressing forces

薄膜预应力/MPa	仿真结果基频/Hz	理论基频/Hz	一阶振型
0.012	5.11	5.08	
0.028	7.82	7.77	
0.038	9.11	9.05	
0.05	10.45	10.38	
0.1	14.72	14.68	
0.15	18.05	17.98	

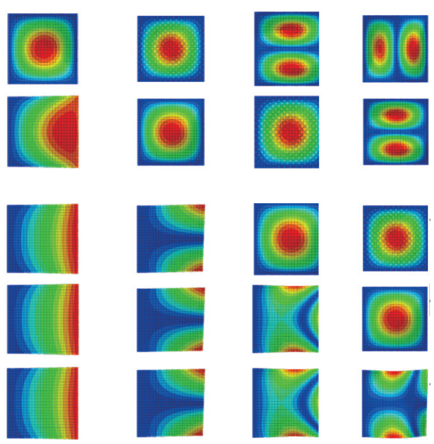
小于0.038 MPa时，薄膜结构振型由薄膜来主导，几乎不受框架影响，当薄膜预应力增大到0.038 MPa时，薄膜结构振型开始发生变化，可以发现薄膜边缘与框架相连处也发生了轻微的振型变化，说明薄膜与框架开始一同振动，即发生了薄膜与框架的耦合振动现象，并且随着薄膜预应力的不断增大，耦合振动也越明显，这也说明了薄膜结构发生耦合振动的临界条件是将薄膜预应力增大到0.038 MPa，仿真结果中各预应力工况下的基频值与理论值的相对误差均不超过1%，符合前面的理论分析。

下面分别进行薄膜预应力为0.01，0.1，1，2和4.5 MPa工况下的薄膜结构前四阶模态分析，得到的相应振型如表4所示。

表4　薄膜结构不同预应力工况下的前四阶振型

Tab. 4　The first four modes of membrane structure under different prestressing conditions

预应力/MPa	一阶振型	二阶振型	三阶振型	四阶振型
0.01				
0.1				
1				
2				
4.5				



由上表可以看出，当预应力为0.01 MPa时，薄膜结构前四阶振型均未体现出耦合振动，当预应力为0.1 MPa时，第一阶振型发生耦合振动，其余振型顺序后移；当预应力为1 MPa时，前两阶振型发生耦合振动，其余振型顺序后移；当预应力为2 MPa时，前三阶振型发生耦合振动，其余振型顺序后移；当预应力为4.5 MPa时，前四阶振型发生耦合振动，其余振型顺序后移。可见，随着薄膜预应力增大，薄膜与框架发生耦合振动的阶数也随之增多并且出现振型顺序后移的现象。

6　结　论

本文主要研究了平面薄膜结构的耦合动力学特性，得到的结论如下：

1）薄膜结构的耦合基频随着框架弹性模量和截面惯性矩的增大而增大，随着长宽比、边长、框架横截面积、框架密度、薄膜密度和薄膜厚度的增大而减小。

2）框架基频受薄膜预应力的影响较小；薄膜结构基频比预应力薄膜基频略小，薄膜始终都在影响着薄膜结构振动，框架基频随着薄膜预应力的增大而减小，而薄膜与薄膜结构基频随着薄膜预应力的增大而增大。

3）当薄膜预应力小于临界值时，薄膜结构的振动由薄膜来主导，当薄膜预应力大于临界值时，薄膜与框架发生耦合振动，此时薄膜结构的振动特性由薄膜与框架共同影响，并且随着薄膜预应力的增大，薄膜与框架发生耦合振动的阶数也随之增多并且出现振型顺序后移的现象。

参考文献：

[1]　吕娟霞，蔡国平，彭福军，等．薄膜天线结构模态参数的在轨辨识[J]．振动与冲击，2018，37(6)：82-85.
Lü Juanxia, Cai Guoping, Peng Fujun, et al. On-orbit identification of modal parameters of membrane antenna structure[J]. Journal of Vibration and Shock, 2018, 37(6): 82-85.

[2]　邱慧，李潇，樊俊峰，等．航天器平面薄膜结构模态分析和试验[J]．航天器工程，2017，26(3)：43-49.
Qiu Hui, Li Xiao, Fan Junfeng, et al. Modal analysis and test of spacecraft planar membrane structure[J]. Spacecraft Engineering, 2017, 26(3): 43-49.

[3]　曹鹏，保宏，杜敬利，等．空间薄膜天线索膜结构建模与形状优化[J]．西安电子科技大学学报，2018，45(2)：54-58.
Cao Peng, Bao Hong, Du Jingli, et al. Modeling and shape optimization of cable membrane structure of space membrane antenna[J]. Journal of Xidian University, 2018, 45(2): 54-58.

[4]　Goncalves P B, Soares R M, Pamplona D. Nonlinear vibrations of a radially stretched circular hyperelastic membrane[J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 327(1-2): 231-248.

[5]　张华，刘汉武，李东颖，等．大型空间可展薄膜结构动力学仿真分析[J]．空间科学学报，2018，38(1)：101-108.
Zhang Hua, Liu Hanwu, Li Dongying, et al. Dynamic simulation analysis of large space deployable membrane structure[J]. Journal of Space Science, 2018, 38(1): 101-108.

[6]　Lesieutre G A. How membrane loads influence the modal damping of flexural structures[J]. AIAA Journal, 2009, 47(7): 1642-1646.

[7]　张莹莹．基于绝对节点坐标法的薄膜结构的力学特性

分析[D].哈尔滨：哈尔滨工业大学，2016.
Zhang Yingying. Analysis of mechanical properties of membrane structures based on absolute node coordinate method[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2016.

[8] 马鑫，杨萱，郑建华，等.太阳帆柔性结构动力学仿真分析[J].空间控制技术与应用，2014，40(3)：36-40.
Ma Xin, Yang Xuan, Zheng Jianhua, et al. Dynamic simulation analysis of solar sail flexible structure[J]. Space Control Technology and Applications, 2014, 40(3): 36-40.

[9] 郑志刚.空间薄膜结构自由振动非线性效应研究[D].哈尔滨：哈尔滨工业大学，2019.
Zheng Zhigang. Research on nonlinear effect of free vibration of space membrane structure[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2019: 15-64

[10] Tatematsu Y, Suzuki T, Yamazaki M, et al. Verification of the similarity rules for spin deployment membrane in the ground experiment[C]. The 4th AIAA Spacecraft Structures Conference, Grapevine, USA, 2017: 1114-1126.

[11] 林文静，陈树辉.平面薄膜自由振动的有限元分析[J].动力学与控制学报，2010(3)：12-16.
Lin Wenjing, Chen Shuhui. Finite element analysis of free vibration of planar membrane[J]. Journal of Dynamics and Control, 2010(3): 12-16.

[12] 胡宇.空间薄膜阵面预应力及结构特性分析[D].上海：上海交通大学，2012.
Hu Yu. Analysis of prestress and structural characteristics of space membrane arrays[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2012.

Coupling dynamics and dimensionless analysis of a planar membrane structure

ZHANG Yue[1], *CONG Qiang*[2], *LIU Rong-qiang*[1], *SHI Chuang*[1], *GUO Hong-wei*[1], *LIN Qiu-hong*[2]
(1.Department of Mechatronics Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China;
2.Beijing Institute of Spacecraft System Engineering, Beijing 100094, China)

Abstract: The coupling dynamics model of a planar membrane structure is established by the modal synthesis method of the fixed interface. The critical conditions for the coupling vibration of the membrane structure are accurately obtained, and the coupling dynamics characteristics are analyzed. The results show that the parameters related to the fundamental frequency of the membrane structure coupling mainly include membrane prestress, frame elastic modulus, moment of inertia, aspect ratio, side length, frame cross-sectional area, frame density, membrane density, and membrane thickness. When the membrane prestress is less than the critical value, the vibration of the membrane structure is dominated by the membrane. When the membrane prestress is greater than the critical value, the membrane and the frame are coupled in vibration. At this time, the vibration characteristics of the membrane structure are jointly affected by the membrane and the frame. With the increase of the prestress of the film, the order of the coupled vibration between the membrane and the frame also increases and the order of the mode shapes will shift backward. Dimensionless analysis of the dynamic characteristics of the membrane structure is carried out, and the similarity criterion is derived between the small-size and the large-size of the membrane structures.

Key words: membrane structure; coupled vibration; modal synthesis; dimensionless analysis; similarity criterion

作者简介: 张　月(1996—)，男，硕士研究生。电话：18845611657；E-mail：1114205280@qq.com。
通讯作者: 刘荣强(1965—)，男，教授。电话：(0451)86413857；E-mail：liurq@hit.edu.cn。