

# 双参数层状地基中大直径单桩水平振动解析解与分析

辛 宇<sup>1</sup>, 崔春义<sup>1</sup>, 许成顺<sup>2</sup>, 梁志孟<sup>1</sup>, 王本龙<sup>1</sup>, 裴华富<sup>3</sup>

(1. 大连海事大学土木工程系, 辽宁 大连 116026;

2. 北京工业大学城市与工程安全减灾省部共建教育部重点实验室, 北京 100124;

3. 大连理工大学海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

**摘要:** 基于 Pasternak 地基和桩体 Timoshenko 梁理论, 考虑了轴向作用二阶效应, 建立了大直径桩-成层土相互作用体系水平振动分析简化模型, 采用微分变换方法和双剪切理论, 结合桩土连续边界条件, 进而推导出桩身位移、内力、转角解析解, 并与已有相关解析解进行退化对比验证。在此基础上, 探讨了桩身長径比、地基剪切系数、桩土模量比、桩身剪切变形系数及轴向荷载对桩基水平振动特性的影响规律。计算分析结果表明推导所得对应解析解, 能综合考虑轴向压力二阶效应、桩周土和桩身剪切变形的影响, 可为大直径桩基工程相关水平向振动分析和设计提供参考。

**关键词:** 桩基; 水平振动; Pasternak 模型; Timoshenko 梁; 成层土

**中图分类号:** TU473.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2022)03-0585-10

**DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2022.03.008

## 引 言

桩-土动力相互作用作为岩土工程中的热点问题, 一直受到学术界和工程界的关注<sup>[1-2]</sup>。近年来, 随着交通基础设施及近海工程建设的大力发展, 国内外学者对水平荷载作用下桩基动力响应问题进行了诸多层面的研究, 并取得了丰富的研究成果<sup>[3-7]</sup>。

首先, 因物理概念清晰和计算简单, Winkler 地基模型在桩基水平动力分析中得到了广泛应用<sup>[8-10]</sup>。相比较而言, Pasternak 双参数地基模型进一步考虑了地基土体剪切效应, 更加符合实际<sup>[11-15]</sup>。因此, 许多学者围绕双参数地基模型中桩基水平动力响应方面开展了系列研究工作。Dogan 等<sup>[12]</sup>在均质双参数地基上将桩等效为欧拉-伯努利梁, 利用拉格朗日方法推导出桩基水平振动解析解, 分析了 Pasternak 地基系数对桩基水平振动的影响规律。张望喜等<sup>[16]</sup>通过哈密顿原理和能量变分原理推导出多层 Pasternak 双参数地基中桩基受水平振动的解析解。王珏等<sup>[17-18]</sup>利用传递矩阵法推导得到 Pasternak 双参数层状地基中单桩水平和回转振动阻抗解析解。

以上研究桩基模型均将桩体简化为 Euler-Ber-

noulli 梁, 只考虑了桩体弯曲变形, 忽略了桩体剪切变形的影响。而对于大直径桩, 采用能考虑桩身剪切变形的 Timoshenko 梁模型则更为合理和必要<sup>[19]</sup>。基于此, 早期 Sun 等<sup>[20]</sup>、陈云敏等<sup>[21]</sup>考虑桩剪切变形影响, 分别建立了单层和成层土中桩基水平振动控制方程, 并推导出了对应解。进一步地, 胡安峰等<sup>[22-24]</sup>基于 Timoshenko 梁理论求解了复杂黏弹性地基中单桩水平动力响应, 强调了忽略桩身剪切变形会引起较大误差。随后, 章敏等<sup>[25]</sup>在 Timoshenko 梁模型基础上推导得出了桩顶水平频域响应解析解, 研究了非饱和土中端承桩稳态水平振动特性。栾鲁宝等<sup>[26]</sup>将 PCC 桩简化为 Timoshenko 模型, 进一步阐述了 Timoshenko 模型与 Euler-Bernoulli 模型计算桩顶阻抗时的差异性。

另一方面, 上述研究均未考虑轴向荷载对桩基动力响应的影响, 而在实际工程中桩基往往同时承受水平和轴向荷载作用<sup>[27-28]</sup>。围绕此点考虑, Catal<sup>[29-30]</sup>基于 Winkler 模型, 求解了在多向复杂荷载作用下的桩基振动方程。栾鲁宝等<sup>[31-32]</sup>考虑竖向荷载作用, 分别求解了黏弹性地基中大直径管桩和饱和土中端承桩水平动力响应解析解, 并进一步分析了竖向荷载对水平受荷桩动力响应的影响。

**收稿日期:** 2021-02-22; **修订日期:** 2021-04-14

**基金项目:** 国家重点研发计划(2021YFB2601102); 国家自然科学基金面上项目(51878109, 52178315); “双一流”建设专项资金资助项目(BSCXXM022)。

不难看出,在桩基水平振动已有研究中较少有同时考虑地基、桩基剪切变形和轴向荷载影响的相关研究。因此,本文将考虑轴向压力二阶效应的影响,将土体和桩基分别简化为 Pasternak 双参数成层地基和 Timoshenko 梁,建立大直径桩-成层土相互作用体系水平振动分析模型,进而结合桩土连续边界条件求解桩身位移、内力、转角的解析解,并与已有相关解析解进行退化对比验证其合理性。在此基础上,探讨桩身長径比、地基剪切层厚度、桩土模量比、桩身剪切变形系数及轴向荷载对桩基水平动力响应的规律。

## 1 力学模型描述与基本假定

基于 Pasternak 地基模型的水平简谐激振作用下大直径单桩简化计算模型如图 1 所示。具体地,桩顶处施加水平简谐激振力  $Q_0 e^{i\omega t}$ ,其中  $Q_0$  为激振力幅值, $\omega$  为激振圆频率, $i = \sqrt{-1}$ , $t$  为时间, $N_0$  为作用在桩顶的轴向压力。此外,第  $j$  层土的厚度、刚度系数、阻尼系数和地基剪切刚度分别为  $h_j, k_{xj}^s, c_{xj}^s$  和  $G_{xj}^s$ ;桩长、桩径分别为  $l$  和  $d$ ;桩身微元体倾角、剪切角以及截面转角分别为  $\alpha, \beta, \varphi$ ,第  $j$  段桩截面弯矩为  $M_j$ 。

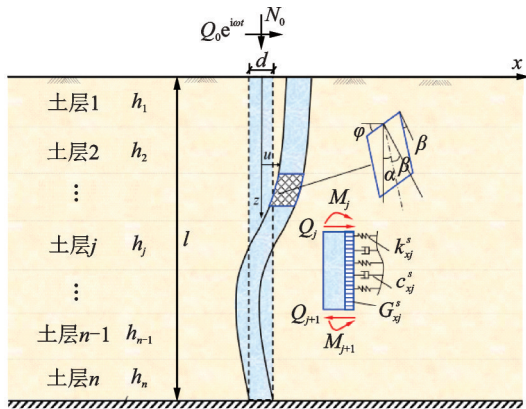


图 1 水平简谐激振作用下大直径单桩简化计算模型  
Fig. 1 Simplified calculation model for a large diameter single pile under horizontal harmonic excitation

基本假定如下:

- (1) 桩身简化为圆形等截面、均质 Timoshenko 梁;
- (2) 桩周土体沿桩身纵向划分为  $n$  层,每层土体简化为 Pasternak 地基模型以描述桩-土相互作用;
- (3) 桩-土模型系统各部分均满足小变形条件,桩土界面为完全接触且无相对滑动;
- (4) 桩顶处仅发生水平位移,桩底处为固端约束。

## 2 定解问题力学模型的建立与求解

综合 Timoshenko 梁和 Pasternak 地基模型相关

理论,得到第  $j$  ( $j$  为土层数,  $j=1, 2, \dots, m, \dots, n$ ) 层段桩身单元的动力平衡方程如下:

$$\begin{cases} K'A^p G^p \left[ \frac{\partial \varphi_j^p(z, t)}{\partial z} - \frac{\partial^2 u_j^p(z, t)}{\partial z^2} \right] + k_{xj}^s u_j^p(z, t) + \\ N_0 \frac{\partial \varphi_j^p(z, t)}{\partial z} + c_{xj}^s \frac{\partial u_j^p(z, t)}{\partial t} + m^p \frac{\partial^2 u_j^p(z, t)}{\partial t^2} - \\ G_{xj}^s \frac{\partial^2 u_j^p(z, t)}{\partial z^2} = 0 \\ E^p I^p \frac{\partial^2 \varphi_j^p(z, t)}{\partial z^2} + (K'A^p G^p + N_0) \cdot \\ \left[ \frac{\partial u_j^p(z, t)}{\partial z} - \varphi_j^p(z, t) \right] = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中  $u_j^p(z, t), \varphi_j^p(z, t)$  分别为第  $j$  层段桩身质点的水平位移和截面转角;  $A^p, G^p, E^p, I^p, m^p$  分别为桩体截面积、剪切模量、弹性模量、截面惯性矩和单位长度质量;  $K'$  为剪力形状系数。

$G_{xj}^s, k_{xj}^s$  和  $c_{xj}^s$  按如下公式确定<sup>[33]</sup>:

$$k_{xj}^s = 1.2E_j^s \quad (2)$$

$$c_{xj}^s = 6a_0^{-\frac{1}{4}} \rho_j^s V_j^s d + 2\xi_j^s \frac{k_{xj}^s}{\omega} \quad (3)$$

$$G_{xj}^s \approx \lambda_j^s k_{xj}^s \quad (4)$$

式中  $V_j^s = \sqrt{E_j^s / [2\rho_j^s(1 + \nu_j^s)]}$  为第  $j$  层土的剪切波速;  $E_j^s, \rho_j^s, \xi_j^s$  和  $\nu_j^s$  分别为第  $j$  层土的弹性模量、密度、阻尼系数及泊松比;  $a_0 = \omega d / V_j^s$  为无量纲频率;  $\lambda_j^s$  为第  $j$  层地基剪切系数比,当  $\lambda_j^s = 0$  时可退化为 Winkler 地基。Fwa 等<sup>[34]</sup>建议地基剪切系数比取值范围为 0.35~0.55。

桩体水平位移和转角可表示为:

$$\begin{cases} u_j^p(z, t) = U_j^p(z) e^{i\omega t} \\ \varphi_j^p(z, t) = \psi_j^p(z) e^{i\omega t} \end{cases} \quad (5)$$

式中  $U_j^p(z)$  为第  $j$  层桩身水平位移幅值,  $\psi_j^p(z)$  为第  $j$  段桩身截面转角。

将式(5)代入式(1)可得:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 U_j^p(z)}{dz^4} - \frac{k_j^s M^p + (J^p + N_0)(G_{xj}^s - N_0)}{M^p (J^p + G_{xj}^s)} \cdot \\ \frac{d^2 U_j^p(z)}{dz^2} + \frac{k_j^s (J^p + N_0)}{M^p (J^p + G_{xj}^s)} U_j^p(z) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

式中  $M^p = E^p I^p, J^p = K'A^p G^p, k_j^s = k_{xj}^s + i c_{xj}^s \omega - m^p \omega^2$ 。

显然,式(6)为四阶线性常系数微分方程,其对应的 4 个特征根为

$$\pm \left[ \sqrt{\frac{k_j^s (J^p + N_0)}{4M^p (J^p + G_{xj}^s)}} \pm \frac{k_j^s M^p + (J^p + N_0)(G_{xj}^s - N_0)}{4M^p (J^p + G_{xj}^s)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

通解为:

$$U_j^p(z) = e^{\lambda_j z} (A_{j1} \cos \chi_j z + B_{j1} \sin \chi_j z) + e^{-\lambda_j z} (C_{j1} \cos \chi_j z + D_{j1} \sin \chi_j z) \quad (7)$$

式中  $\lambda_j = \left[ \sqrt{\frac{k_j^s (J^p + N_0)}{4M^p (J^p + G_{xj}^s)}} + \frac{k_j^s M^p + (J^p + N_0)(G_{xj}^s - N_0)}{4M^p (J^p + G_{xj}^s)} \right]^{\frac{1}{2}}$ ;  $\chi_j = \left[ \sqrt{\frac{k_j^s (J^p + N_0)}{4M^p (J^p + G_{xj}^s)}} - \frac{k_j^s M^p + (J^p + N_0)(G_{xj}^s - N_0)}{4M^p (J^p + G_{xj}^s)} \right]^{\frac{1}{2}}$ ; 系数  $A_{j1}, B_{j1}, C_{j1}, D_{j1}$  的取值将由边界条件确定。

进一步地,由式(1)化简可得转角为:

$$\phi_j^p(z) = \frac{M^p (J^p + G_{xj}^s)}{(J^p + N_0)^2} \frac{d^3 U_j^p(z)}{dz^3} - \left[ \frac{M^p k_j^s}{(J^p + N_0)^2} - 1 \right] \frac{dU_j^p(z)}{dz} \quad (8)$$

当桩体不发生剪切变形时(即  $J^p \rightarrow \infty$ ),式(8)可退化为 Bernoulli-Euler 理论解,即  $\phi_j^p(z) = \frac{dU_j^p(z)}{dz}$ 。

将式(7)代入式(8)可得转角通解为:

$$\phi_j^p(z) = e^{\lambda_j z} (A_{j2} \cos \chi_j z + B_{j2} \sin \chi_j z) + e^{-\lambda_j z} (C_{j2} \cos \chi_j z + D_{j2} \sin \chi_j z) \quad (9)$$

基于 Timoshenko 梁理论,桩身弯矩、剪力与桩身水平位移相互关系为:

$$M_j^p(z) = -M^p \frac{d\phi_j^p(z)}{dz} = -M^p [e^{\lambda_j z} (A_{j3} \cos \chi_j z + B_{j3} \sin \chi_j z) + e^{-\lambda_j z} (C_{j3} \cos \chi_j z + D_{j3} \sin \chi_j z)] \quad (10)$$

$$Q_j^p(z) = J^p \left[ \frac{dU_j^p(z)}{dz} - \phi_j^p(z) \right] = M^p [e^{\lambda_j z} (A_{j4} \cos \chi_j z + B_{j4} \sin \chi_j z) + e^{-\lambda_j z} (C_{j4} \cos \chi_j z + D_{j4} \sin \chi_j z)] \quad (11)$$

令  $f_{j0}(l) = e^{\lambda_j z} \cos \chi_j z, f_{j1}(l) = e^{\lambda_j z} \sin \chi_j z, f_{j2}(l) = e^{-\lambda_j z} \cos \chi_j z, f_{j3}(l) = e^{-\lambda_j z} \sin \chi_j z$ , 则式(9), (10)和(11)中待定系数可表达为

$$\begin{cases} A_{j2} = A_{j1} f_{j4} + B_{j1} f_{j5} \\ B_{j2} = -A_{j1} f_{j5} + B_{j1} f_{j4} \\ C_{j2} = -C_{j1} f_{j4} + D_{j1} f_{j5} \\ D_{j2} = -C_{j1} f_{j5} - D_{j1} f_{j4} \\ A_{j3} = A_{j1} f_{j6} + B_{j1} f_{j7} \\ B_{j3} = -A_{j1} f_{j7} + B_{j1} f_{j6} \\ C_{j3} = C_{j1} f_{j6} - D_{j1} f_{j7} \\ D_{j3} = C_{j1} f_{j7} + D_{j1} f_{j6} \\ A_{j4} = A_{j1} f_{j8} + B_{j1} f_{j9} \\ B_{j4} = -A_{j1} f_{j9} + B_{j1} f_{j8} \\ C_{j4} = -C_{j1} f_{j8} + D_{j1} f_{j9} \\ D_{j4} = -C_{j1} f_{j9} - D_{j1} f_{j8} \end{cases} \quad (12)$$

式中  $f_{j4} = \lambda_j \left[ 1 - \frac{M^p k_j^s}{(J^p + N_0)^2} \right] + \frac{M^p (J^p + G_{xj}^s)}{(J^p + N_0)^2} (\lambda_j^3 - 3\lambda_j \chi_j^2)$ ;  $f_{j5} = \chi_j \left[ 1 - \frac{M^p k_j^s}{(J^p + N_0)^2} \right] + \frac{M^p (J^p + G_{xj}^s)}{(J^p + N_0)^2} (3\lambda_j^2 \chi_j - \chi_j^3)$ ;  $f_{j6} = \lambda_j^2 - \chi_j^2 - \frac{k_j^s}{J^p + N_0} + \frac{(G_{xj}^s + N_0) [k_j^s M^p + (G_{xj}^s + N_0)(J^p + N_0)]}{2M^p (J^p + N_0)(J^p + G_{xj}^s)}$ ;  $f_{j7} = 2\lambda_j \chi_j \left( 1 + \frac{G_{xj}^s + N_0}{J^p + N_0} \right)$ ;  $f_{j8} = \frac{J^p k_j^s}{(J^p + N_0)^2} \lambda_j - \frac{J^p (J^p + G_{xj}^s)}{(J^p + N_0)^2} (\lambda_j^3 - 3\lambda_j \chi_j^2)$ ;  $f_{j9} = \frac{J^p k_j^s}{(J^p + N_0)^2} \chi_j - \frac{J^p (J^p + G_{xj}^s)}{(J^p + N_0)^2} (3\lambda_j^2 \chi_j - \chi_j^3)$ ;  $A_{j2}, A_{j3}, A_{j4}, B_{j2}, B_{j3}, B_{j4}, C_{j2}, C_{j3}, C_{j4}, D_{j2}, D_{j3}, D_{j4}$  为未知系数,可由边界条件求得。

在第  $j$  段与第  $j+1$  段桩身截面处,桩的水平位移、转角、弯矩及剪力连续,即:

$$\begin{cases} U_j(z) = U_{j+1}(z) \\ \phi_j(z) = \phi_{j+1}(z) \\ M_j(z) = M_{j+1}(z) \\ Q_j(z) = Q_{j+1}(z) \end{cases} \quad (13)$$

综合式(12)和(13)可得系数矩阵方程组如下:

$$F_j(z_j) T_j = F_{j+1}(z_j) T_{j+1} \quad (14)$$

式中  $T_j = [A_{j1} \ B_{j1} \ C_{j1} \ D_{j1}]^T$ ;  $F_j(z_j) =$

$$\begin{bmatrix} f_{j0} & f_{j1} \\ f_{j4} f_{j0} - f_{j5} f_{j1} & f_{j5} f_{j0} + f_{j4} f_{j1} \\ f_{j6} f_{j0} - f_{j7} f_{j1} & f_{j7} f_{j0} + f_{j6} f_{j1} \\ f_{j8} f_{j0} - f_{j9} f_{j1} & f_{j9} f_{j0} + f_{j8} f_{j1} \\ f_{j2} & f_{j3} \\ -f_{j4} f_{j2} - f_{j5} f_{j3} & f_{j5} f_{j2} - f_{j4} f_{j3} \\ f_{j6} f_{j2} - f_{j7} f_{j3} & -f_{j7} f_{j2} - f_{j6} f_{j3} \\ -f_{j8} f_{j2} - f_{j9} f_{j3} & f_{j9} f_{j2} - f_{j8} f_{j3} \end{bmatrix} \circ$$

由式(14)可得:

$$T_{j+1} = F_{j+1}^{-1}(z_j) F_j(z_j) \cdot T_j \quad (15)$$

由递推关系可将第  $m$  段桩身对应系数矩阵  $T_m$  表示为:

$$T_m = \left[ \prod_{j=1}^m [F_j(z_{j-1})]^{-1} F_{j-1}(z_{j-1}) \right] T_1 \quad (16)$$

进一步考虑桩顶和桩底边界条件:

$$\begin{cases} \left\{ \begin{matrix} \phi_1(0) \\ Q_1(0) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ Q_0 \end{matrix} \right\} \\ \left\{ \begin{matrix} U_n(l) \\ \phi_n(l) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} \end{cases} \quad (17)$$

并将系数表达式(12)代入式(17),化简可得:

$$\begin{bmatrix} f_{14} & f_{15} & -f_{14} & f_{15} \\ f_{18} & f_{19} & -f_{18} & f_{19} \end{bmatrix} T_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_0/M^p \end{Bmatrix} \quad (18a)$$

$$\phi \begin{bmatrix} A_{n1} \\ B_{n1} \end{bmatrix} + \varphi \begin{bmatrix} C_{n1} \\ D_{n1} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (18b)$$

式中  $\phi = \begin{bmatrix} f_{n0}(l) & f_{n1}(l) \\ f_{n4}f_{n0}(l) - f_{n2}f_{n1}(l) & f_{n2}f_{n0}(l) + f_{n4}f_{n1}(l) \end{bmatrix}$ ;

$\varphi = \begin{bmatrix} f_{n2}(l) & f_{n3}(l) \\ -f_{n4}f_{n2}(l) - f_{n5}f_{n3}(l) & f_{n5}f_{n2}(l) - f_{n4}f_{n3}(l) \end{bmatrix}$ .

联立式(16)~(18)则可求出  $T_1$ ,再根据递推公式(16),最终可求出  $m$ 段桩身对应系数矩阵  $T_m$ ,进而可求得桩身各段水平位移;根据桩身水平位移表达式,利用桩身弯矩、剪力与桩身水平位移之间的关系,可求出桩身弯矩、剪力。

为便于后续分析,定义如下位移、弯矩、剪力无量纲包络值参量如下:

$$\begin{cases} \bar{U} = E^p du_{\max}/(500Q_0) \\ \bar{M} = m_{\max}/(2Q_0d) \\ \bar{Q} = q_{\max}/Q_0 \end{cases} \quad (19)$$

式中  $u_{\max}(z), m_{\max}(z), q_{\max}(z)$  分别为每个动力循环中桩基水平振动位移、弯矩和剪力最大值。

便于更清晰地说明上述推导过程,图 2 给出了对应求解流程图。

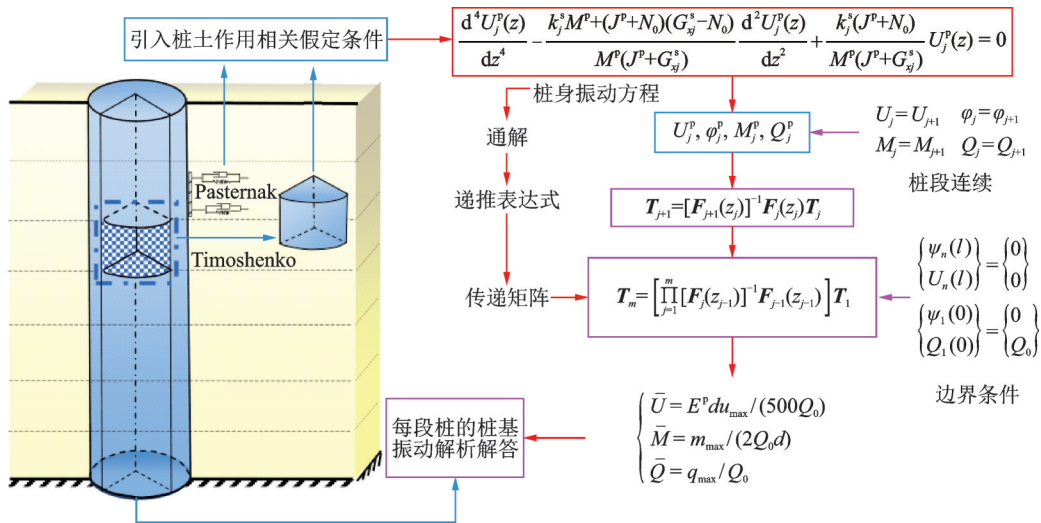


图 2 单桩求解流程示意图

Fig. 2 Schematic diagram of single pile solution process

### 3 算例分析

关于大直径单桩的界定及相关参数取值参照已有相关研究<sup>[22-24, 31-32, 35]</sup>。如无特殊说明,算例中计算参数选取如下:土层参数  $n=3$ 、第  $j$  层土阻尼系数  $\xi_j^s = 0.05$ 、泊松比  $\nu_j^s = 0.4$ 、密度  $\rho_j^s = 2.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、弹性模量  $E_j^s = 4.0 \times 10^8 \text{ Pa}$ 、桩土弹模比  $E^p/E_j^s = 5000$ 、桩长  $l=8 \text{ m}$ 、桩径  $d=1 \text{ m}$ 、桩体密度  $\rho^p = 2.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、桩体剪力形状系数  $K'=3/4$ 、无量纲频率  $a_0 = 0.5$ 、外荷载幅值  $Q_0 = 100 \text{ kN}$ 。

特别需要强调的是,为方便说明问题,后续分析中位移、弯矩、剪力振动响应均采用前述定义的无量纲包络值参量描述。

#### 3.1 解析解的合理性验证

为了验证本文所推导的大直径单桩水平动力响

应解析解的合理性,不考虑轴向荷载的影响 ( $N_0 \rightarrow 0$ ),首先将桩体由 Timoshenko 梁退化为 Euler-Bernoulli 梁 ( $J^p \rightarrow \infty$ ),本文退化解与文献[18]解的对比情况如图 3 所示。同时,将土层 Pasternak 模型退化至 Winkler ( $\lambda_j^s \rightarrow 0$ )模型,本文退化解与文献[24]解的对比情况如图 4 所示。由图可见,本文所推导大直径单桩水平振动响应解析解的退化解分别与已有解结果吻合。

#### 3.2 桩基参数化对比分析

为进一步分析桩基和层状地基剪切变形对桩体水平振动响应的的影响,分别将本文计算模型中桩体由 Timoshenko 梁退化为 Euler-Bernoulli 梁 ( $J^p \rightarrow \infty$ ),桩周土 Pasternak 地基退化为 Winkler 地基 ( $\lambda_j^s \rightarrow 0$ ),即将本文 P-T (Pasternak-Timoshenko) 模型退化至 W-E (Winkler-Euler)模型。由文献[10]

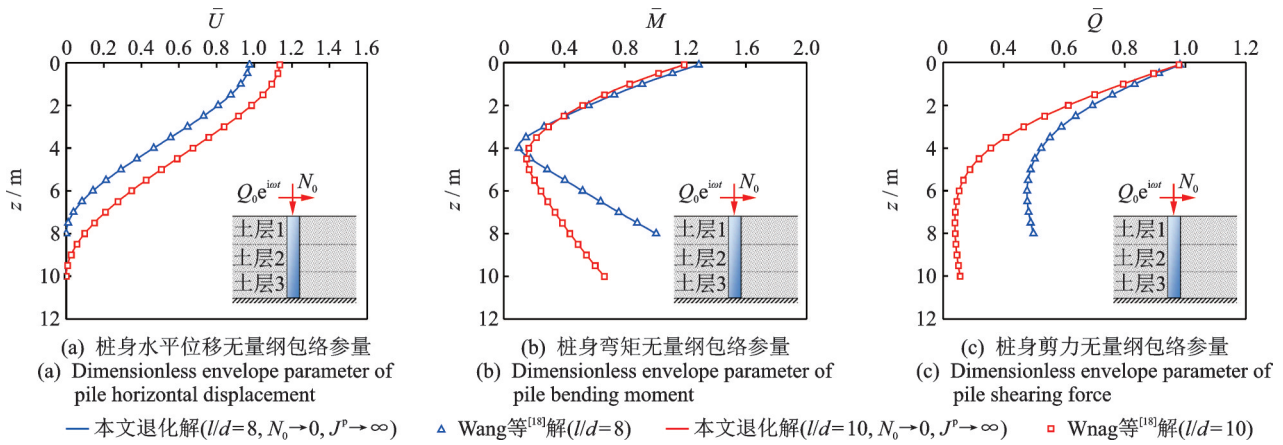


图3 本文退化解( $N_0 \rightarrow 0, J^p \rightarrow \infty$ )与Wang等<sup>[18]</sup>已有解分布对比情况

Fig. 3 Comparison of present solution ( $N_0 \rightarrow 0, J^p \rightarrow \infty$ ) with Wang, et al in Ref. [18]

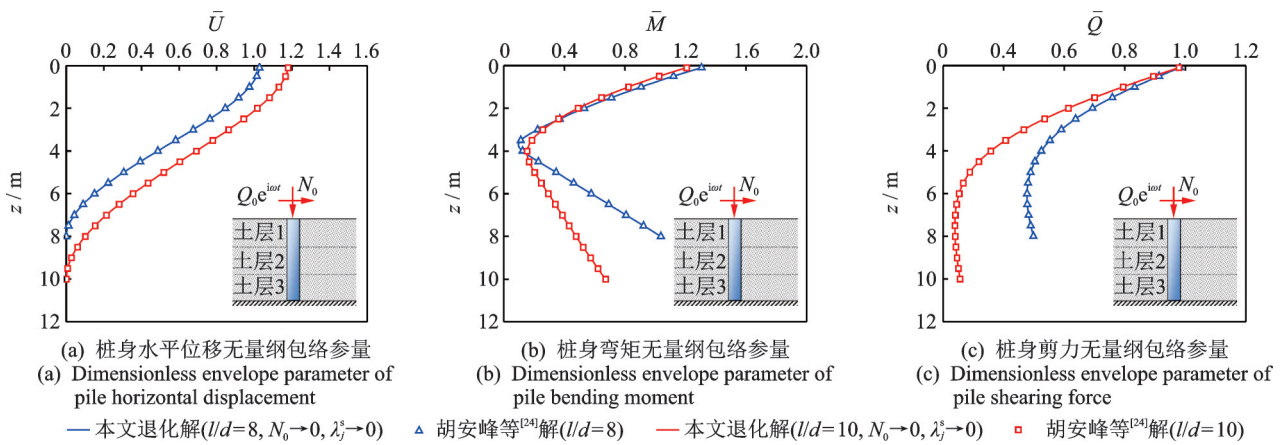


图4 本文退化解( $N_0 \rightarrow 0, \lambda_j^s \rightarrow 0$ )与胡安峰等<sup>[24]</sup>已有解分布对比情况

Fig. 4 Comparison of present solution ( $N_0 \rightarrow 0, \lambda_j^s \rightarrow 0$ ) with Hu An-feng, et al in Ref. [24]

可知,当桩长径比(即桩长与桩直径的比值) $l/d < 8$ 时,桩身剪切效应的不可忽视。具体地,算例中分别选取桩体长径比 $l/d=3, 6$ ,桩土弹模比为 $E^s = E^p/5000$ 。

图5所示为上述两种模型计算所得桩身水平位移、弯矩及剪力无量纲包络参量分布对比情况。由图5(a)可见,P-T模型和W-E模型计算所得桩身水平位移无量纲包络参量的最大值均出现于桩顶,且

水平位移无量纲包络参量随土层深度增加呈减小趋势。特别地,地基浅层范围内(本文 $z < 1\text{ m}$ ),采用两种模型计算所得桩身水平位移无量纲包络参量差异较为明显,且此种差异随土层加深而渐至可以忽略。图5(b)中桩顶弯矩无量纲包络参量均大于桩端,桩身无量纲包络参量在半桩长处出现反转折点,且此后随土层深度的增加,两种模型计算所得桩身无量纲弯矩包络参量差异变大。此外,由图5(c)可

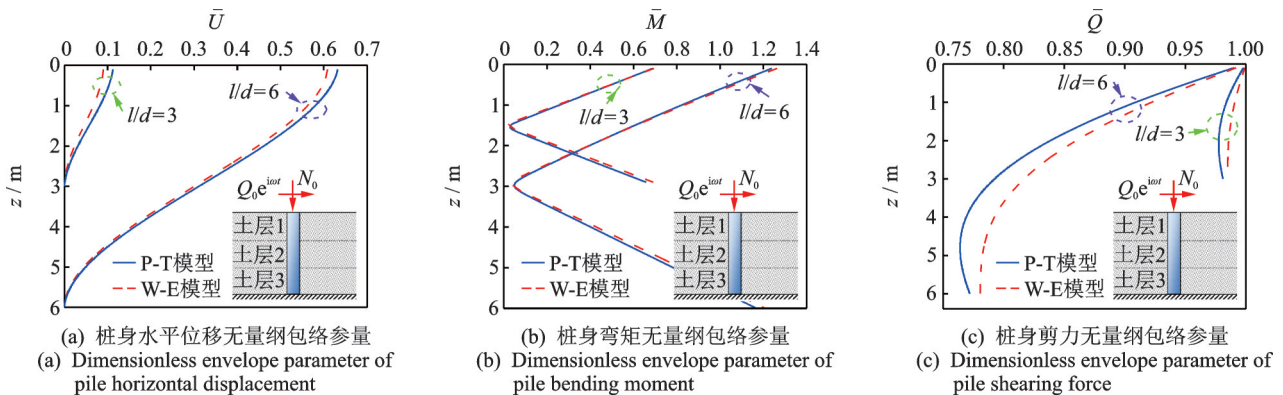


图5 P-T模型和W-E模型计算所得桩身无量纲包络参量分布对比情况

Fig. 5 Comparison of the distribution of dimensionless envelope parameters of the pile body calculated by P-T model and W-E model

以看出,桩身剪力无量纲包络参量均随土层深度的增加而减小,且采用两种模型计算所得桩身剪力无量纲包络参量差值随土层深度的增加呈现出先增大后减小的趋势。综上不难看出,由于考虑了桩周土和桩身剪切变形的影响,本文所采用P-T模型计算桩身内力结果均比W-E模型对应结果偏小。

图6所示为不同桩身长径比条件下的桩身水平位移、弯矩、剪力无量纲包络参量分布对比情况。由

图6可见,不同桩长径比条件下的桩身水平位移无量纲包络参量,均随桩身长径比的增加而增大;长径比越小,后半桩长段无量纲弯矩包络参量增幅越大,并随长径比的增大而减小;桩身无量纲剪力包络参量随桩长径比的增加而减小。综上所述,当桩身长径比较小时,桩身长径比变化对桩身无量纲水平位移、弯矩和剪力包络参量均影响显著,且此种变化影响随桩径比增大而逐渐变小,并趋于稳定。

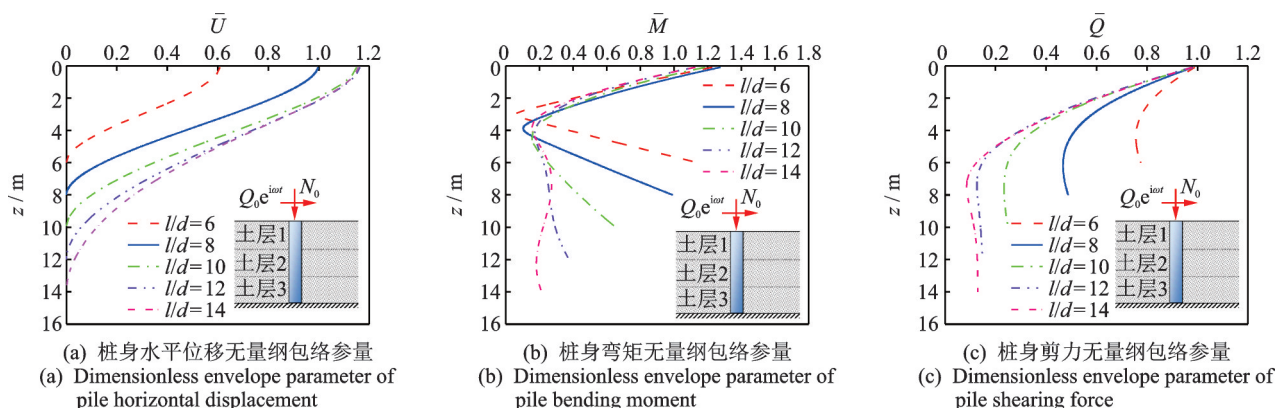


图6 不同桩长径比条件下桩身水平位移、弯矩及剪力无量纲包络参量分布对比情况

Fig. 6 The comparison of pile dimensionless envelope parameters of horizontal displacement, bending moment and shearing force under different pile slenderness

为进一步分析桩土弹模比对桩基水平位移、弯矩、剪力无量纲包络参量的影响规律,分析工况具体如表1所示。其中,Case1~Case3为表层土 $E^p/E_1^s$ 的变化工况,Case4~Case6为夹层土 $E^p/E_2^s$ 的变化工况。

表1 桩-土弹模比工况

工况	$E^p/E_1^s$	$E^p/E_2^s$	$E^p/E_3^s$
Case1	500	5000	5000
Case2	5000	5000	5000
Case3	10000	5000	5000
Case4	5000	500	5000
Case5	5000	5000	5000
Case6	5000	10000	5000

如图7所示为桩土弹模比变化对桩基水平位移无量纲包络参量的影响情况。从图中可以看出,在同一深度条件下,随表层土、夹层土对应桩土弹模比的增加,桩顶水平位移无量纲包络参量幅值变大。图8和9所示分别为桩土弹模比变化对桩基弯矩、剪力无量纲包络参量的影响情况。由图可见,在同一深度条件下,随着表层土、夹层土对应桩土弹模比的增加,桩身弯矩和剪力无量纲包络参量均变大。相比较而言,表层土桩土弹模比的变化对桩顶水平位移、桩身弯矩和剪力无量纲包络参量的影响更为显著。

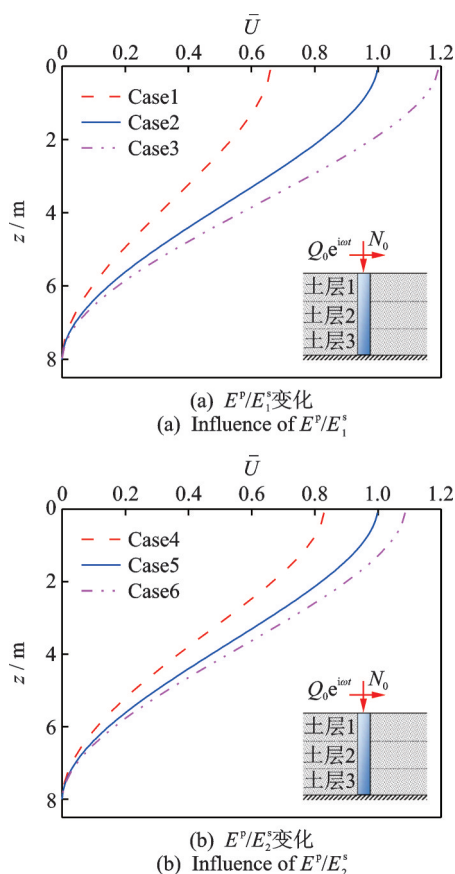
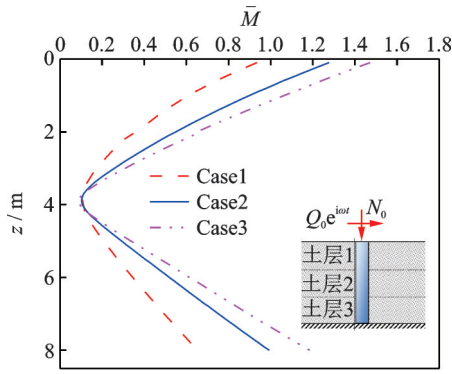
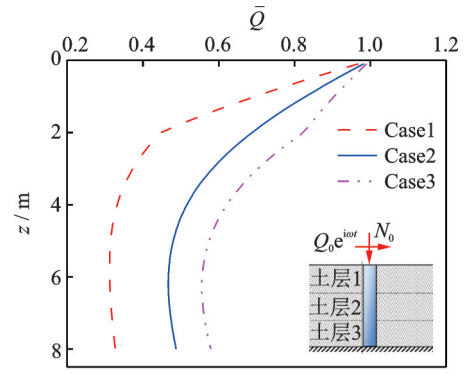


图7 桩土弹模比变化对桩身水平位移无量纲包络参量的影响

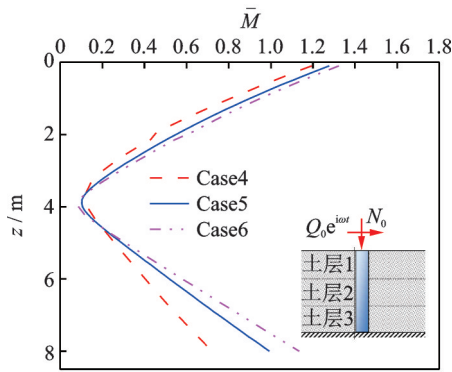
Fig. 7 Influence of pile-soil elastic modulus ratio on the dimensionless envelope parameters of pile horizontal displacement



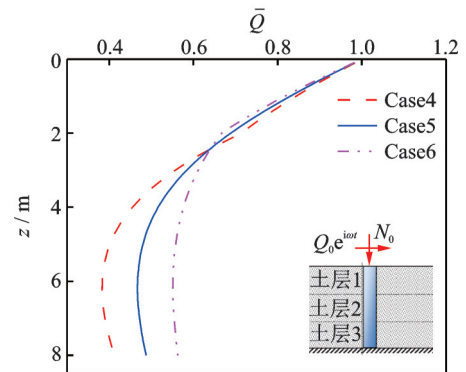
(a)  $E^p/E_1^s$ 变化  
(a) Influence of  $E^p/E_1^s$



(a)  $E^p/E_1^s$ 变化  
(a) Influence of  $E^p/E_1^s$



(b)  $E^p/E_2^s$ 变化  
(b) Influence of  $E^p/E_2^s$



(b)  $E^p/E_2^s$ 变化  
(b) Influence of  $E^p/E_2^s$

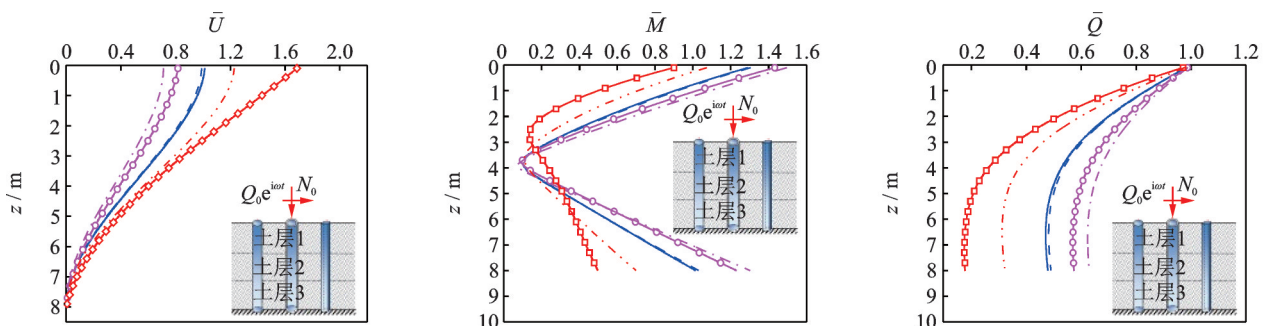
图 8 桩土弹模比变化对桩身弯矩无量纲包络参数的影响  
Fig. 8 Influence of pile-soil elastic modulus ratio on the dimensionless envelope parameters of pile bending moment

图 9 桩土弹模比变化对桩身剪力无量纲包络参数的影响  
Fig. 9 Influence of pile-soil elastic modulus ratio on the dimensionless envelope parameters of pile shearing force

为了方便说明问题,引入与桩体截面形状有关的剪力形状系数  $K'$ (见公式(1))。具体地,当截面形状为圆形时,  $K'$  一般取为  $3/4$ ;当横截面为方形时,  $K'$  一般取为  $2/3$ ;当横截面为环形截面时,  $K' = \frac{3}{4} \frac{R^2 + r^2}{R^2 + Rr + r^2}$ , 其中  $R$  为外圆半径,  $r$  为内圆半径<sup>[36]</sup>。

图 10 所示为桩截面变化对桩身水平位移、弯矩及

剪力无量纲包络参数分布的影响情况。其中,同时将本文解中桩体由 Timoshenko 梁退化为 Euler-Bernoulli 梁( $J^p \rightarrow \infty$ ),即由 P-T 模型退化为 P-E 模型进行对比分析。由图可见,在相同截面条件下, P-T 模型对应的桩身水平位移无量纲包络参数大于 P-E 模型计算结果; P-T 模型对应的桩身内力无量纲包络参数小于 P-E 模型计算结果。特别地,在环形截面条件下, P-T 模型对应的桩身水平位移和内力无量纲包络参数与 P-E 模型计算结果差异最为显著。而对于圆形截面



(a) 桩身水平位移无量纲包络参数  
(a) Dimensionless envelope parameter of pile horizontal displacement

(b) 桩身弯矩无量纲包络参数  
(b) Dimensionless envelope parameter of pile bending moment

(c) 桩身剪力无量纲包络参数  
(c) Dimensionless envelope parameter of pile shearing force

— 圆形截面 P-T 模型    -o- 方形截面 P-T 模型    -◇- 环形截面 P-T 模型    - - 圆形截面 P-E 模型    - · - 方形截面 P-E 模型    - · · - 环形截面 P-E 模型

图 10 桩截面对桩身水平位移、弯矩及剪力无量纲包络参数分布的影响

Fig. 10 The comparison of pile dimensionless envelope parameters of horizontal displacement, bending moment and shearing force under different pile sections

面而言,此种差异很小甚至可以忽略。这也就是说,对于环形截面的大直径管桩而言,在进行桩基水平振动特性分析时考虑桩体剪切变形影响十分必要。

考虑轴向力  $N_0$  作用时,定义  $H = \pi G_{xj}^s d^2$ ,  $N_0 = \delta H$ , 并将  $\delta (\delta=0, 1, 2, 4)$  作为考虑轴向二阶效应的特征参数<sup>[37]</sup>。轴向作用特征参数变化对桩身水平位移、弯矩及剪力无量纲包络参量分布的影响如图 11

所示。因桩顶受轴力和水平力耦合作用可产生  $P-\Delta$  效应。由图可见,随着轴向作用特征参数的增加,水平位移无量纲包络参量显著增大。不同地,仅下半段桩身弯矩和桩端一定区域以外的剪力无量纲参量随轴向作用特征参数的增加而增大。因此,在实际工程中桩顶轴向荷载对桩基水平振动特性的影响不可忽视。

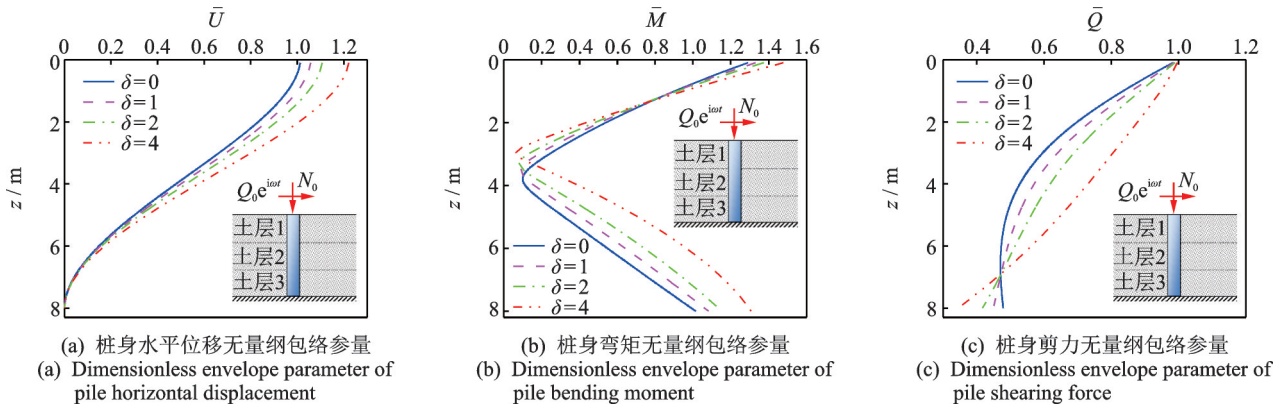


图 11 轴向荷载对桩身位移、弯矩及剪力无量纲包络参量分布的影响

Fig. 11 Influence of axial loads on the dimensionless envelope parameters of pile shearing force

## 4 结论

本文土体采用 Pasternak 地基模型,将桩基简化为 Timoshenko 梁,建立了大直径桩-成层土相互作用体系水平振动分析简化分析模型,采用微分变换对方程解耦,并结合桩土连续边界条件求解相关解答。在此基础上,探讨了桩身长径比、地基剪切层厚度、桩土模量比、桩身剪切变形系数及轴向荷载对桩基水平振动特性的影响规律。计算分析结果表明:

(1) 由于考虑了桩周土和桩身剪切变形的影响,采用 P-T 模型计算桩身内力无量纲包络参量结果均比 W-E 模型偏小。不同地,采用 P-T 模型计算桩身水平位移无量纲包络参量结果比 W-E 模型偏大,且此种差异随土层加深而渐至可以忽略。

(2) 随着内部区域土体软(硬)化程度的加大,扭转阻抗曲线振幅明显增大(减小),但内部区域土体软(硬)化程度对扭转阻抗曲线共振频率的影响可以忽略。

(3) 在相同截面条件下,P-T 模型对应的桩身水平位移无量纲包络参量大于 P-E 模型计算结果;P-T 模型对应的桩身内力无量纲包络参量小于 P-E 模型计算结果。特别地,在环形截面条件下,P-T 模型对应的桩身水平位移和内力无量纲包络参量与 P-E 模型计算结果差异最为显著。

(4) 随着轴向作用特征参数  $\delta$  的增加,水平位移无量纲包络参量显著增大。不同地,仅下半段桩身弯矩和桩端一定区域以外的剪力无量纲参量随轴

向作用特征参数  $\delta$  的增加而增大。

(5) 本文所采用解析模型和推导所得对应解析解答,能综合考虑轴向压力二阶效应、桩周土和桩身剪切变形的影响,并针对求解相关解答进行了退化对比验证,可为大直径桩基工程相关水平向振动分析和设计提供参考。

## 参考文献:

- [1] CUI Chunyi, MENG Kun, WU Yajun, et al. Dynamic response of pipe pile embedded in layered visco-elastic media with radial inhomogeneity under vertical excitation[J]. Geomechanics and Engineering, 2018, 16(6): 609-618.
- [2] 崔春义,孟坤,武亚军,等.非均质土中不同缺陷管桩纵向振动特性研究[J].振动工程学报,2018,31(5): 280-291.  
CUI Chunyi, MENG Kun, WU Yajun, et al. Vertical dynamic response of differ-defective pipe pile embedded in inhomogeneous soil[J]. Journal of Vibration Engineering, 2018, 31(5): 280-291.
- [3] Gazetas G, Fan K, Kaynia A. Dynamic response of pile groups with different configurations[J]. Soil Dynamics & Earthquake Engineering, 1993, 12(4): 239-257.
- [4] Gupta B K, Basu D. Soil resistances for laterally loaded rigid piles in multi-layered elastic soil[J]. Geomechanics and Geoengineering, 2020, 15(1): 10-28.
- [5] Anoyatis G, Lemnitzer A. Kinematic Winkler modulus for laterally-loaded piles[J]. Soils and Foundations, 2017, 57(3): 453-471.



- [6] 付鹏,胡安峰,李龙,等.成层地基中海洋高桩基础水平动力阻抗分析[J].岩石力学与工程学报,2019(A2):3790-3798.  
FU Peng, HU Anfeng, LI Long, et al. Lateral dynamic impedance of offshore elevated piles in layered soils. [J] Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2019(A2):3790-3798.
- [7] 韩红霞,崔武文,李雨润.水平振动荷载作用下桩基动力特性[J].振动与冲击,2015,34(13):127-132.  
HAN Hongxia, CUI Wuwen, LI Yurun. Dynamic characteristics of a pile under horizontal vibration loading[J] Journal of Vibration and Shock, 2015, 34(13):127-132.
- [8] Mylonakis G, Gazetas G. Lateral vibration and internal forces of grouped piles in layered soil [J]. Journal of Geotechnical & Geo Environmental Engineering, 1999, 125(1):16-25.
- [9] Yao S, Nogami T. Lateral cyclic response of a pile in viscoelastic winkler subgrade[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1994, 120(4):758-775.
- [10] 胡安峰,谢康和,王奎华.粘弹性地基中有限长桩横向受迫振动问题解析解[J].岩土力学,2003(1):25-29.  
HU Anfeng, XIE Kanghe, WANG Kuihua. An analytical solution for lateral vibration of a pile with finite length pile in viscoelastic subgrade [J]. Rock and Soil Mechanics, 2003(1):25-29.
- [11] Filipic P F, Rosalesa M B. A further study about the behavior of foundation piles and beams in a Winkler-Pasternak soil [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2002, 44(1):21-36.
- [12] Dogan Q, Mesut S. Free vibration of an axially functionally graded pile with pinned ends embedded in Winkler-Pasternak elastic medium [J]. Structural Engineering and Mechanics, 2011, 40(4):583-594.
- [13] Guo W D, Lee F H. Load transfer approach for laterally loaded piles [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2001, 25(11):1101-1129.
- [14] Ke W, Zhang C. A closed-form solution for kinematic bending of end-bearing piles [J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2017, 103:15-20.
- [15] 刘飞禹,吴杰杰,陈江,等.考虑水平摩擦的Pasternak路基基层及路面变形分析[J].中国公路学报,2019,32(5):38-46+56.  
LIU Feiyu, WU Jiejie, CHEN Jiang, et al. Analysis of pavement and subbase on pasternak foundation considering horizontal friction [J]. China Journal of Highway and Transport, 2019, 32(5):38-46+56.
- [16] 张望喜,占鑫杰,易伟健,等.双参数层状地基受水平荷载长桩的水平位移计算[J].湖南大学学报(自然科学版),2011,38(3):17-21.  
ZHANG Wangxi, ZHAN Xinjie, YI Weijian, et al. Solution to the lateral displacement of lateral loaded long-piles under double-parameter layered-foundation [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2011, 38(3):17-21.
- [17] 王珏,周叮,刘伟庆,等.考虑成层土剪切效应的相邻桩基动力相互作用[J].振动工程学报,2013,26(5):732-742.  
WANG Jue, ZHOU Ding, LIU Weiqing, et al. Dynamic interaction between adjacent piles considering soil shear effect in layered foundation [J]. Journal of Vibration Engineering, 2013, 26(5):732-742.
- [18] Wang J, Zhou D, Liu W. Horizontal impedance of pile groups considering shear behavior of multilayered soils [J]. Soils & Foundations, 2014, 54(5):927-937.
- [19] Gupta B K, Basu D. Applicability of Timoshenko, Euler-Bernoulli and rigid beam theories in analysis of laterally loaded monopiles and piles [J]. Géotechnique, 2018, 68(9):772-785.
- [20] Sun K, Pires J A. Simplified approach for pile and foundation interaction analysis [J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1993, 119(9):1462-1479.
- [21] 陈云敏,王宏志.回传射线矩阵法分析桩的横向动力响应[J].岩土工程学报,2002,24(3):271-275.  
CHEN Yunmin, WANG Hongzhi. Analysis on lateral dynamic response of a pile with the method of reverberation ray matrix [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(3):271-275.
- [22] 胡安峰,谢康和,应宏伟,等.粘弹性地基中考虑桩体剪切变形的单桩水平振动解析理论[J].岩石力学与工程学报,2004,23(9):1515-1520.  
HU Anfeng, XIE Kanghe, Ying Hongwei, et al. Analytical theory of lateral vibration of single pile in viscoelastic subgrade considering shear deformation [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(9):1515-1520.
- [23] 胡安峰,谢康和.双层地基中考虑桩体剪切变形的单桩水平振动解析解[J].岩石力学与工程学报,2004,23(13):2298-2304.  
HU Anfeng, XIE Kanghe. Analytical solution of horizontal vibration for single pile in double-layer soils considering shear deformation [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(13):2298-2304.
- [24] 胡安峰,谢康和,肖志荣.层状土中考虑剪切变形的单桩水平振动解析解[J].浙江大学学报(工学版),2005,39(6):869-873.  
HU Anfeng, XIE Kanghe, XIAO Zhirong. Analytical solutions for lateral vibration of pile in layered soils considering shear deformation [J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2005, 39(6):869-873.
- [25] 章敏,王星华,冯国瑞.非饱和土中端承桩水平振动特性研究[J].岩土力学,2015(2):409-422.

- ZHANG Min, WANG Xinghua, FENG Guorui. Horizontal vibration of an end-bearing pile in unsaturated soil [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2015(2):409-422.
- [26] 栾鲁宝, 丁选明, 刘汉龙, 等. 考虑剪切变形的PCC桩水平振动响应解析解[J]. *岩石力学与工程学报*, 2016, 35(11):2345-2358.
- LUAN Lubao, DING Xuanming, LIU Hanlong, et al. Analytical solutions to lateral dynamic response of PCC piles considering shear deformation[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2016, 35(11):2345-2358.
- [27] Halabe U B, Jain S K. Lateral free vibration of a single pile with or without an axial load[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 195(3):531-544.
- [28] Lu J F, Zhang X, Wan J W, et al. The influence of a fixed axial top load on the dynamic response of a single pile[J]. *Computers and Geotechnics*, 2012, 39(1):54-65.
- [29] Catal H H. Free vibration of partially supported piles with the effects of bending moment, axial and shear force[J]. *Engineering Structures*, 2002, 24(12):1615-1622.
- [30] Catal H H. Free vibration of semi-rigid connected and partially embedded piles with the effects of the bending moment, axial and shear force[J]. *Engineering Structures*, 2006, 28(14):1911-1918.
- [31] 栾鲁宝, 丁选明, 刘汉龙, 等. 考虑竖向荷载影响的大直径管桩水平振动响应解析解[J]. *岩土工程学报*, 2016, 38(10):1859-1868.
- LUAN Lubao, DING Xuanming, LIU Hanlong, et al. Analytical solution of lateral dynamic response of a large diameter pipe pile considering influence of axial load[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2016, 38(10):1859-1868.
- [32] Luan Lubao, Ding Xuanming, Zhou Wei, et al. Horizontal dynamic response of a large-diameter pipe pile considering the second-order effect of axial force [J]. *Earthquake Engineering & Engineering Vibration*, 2018, 17(3):567-579.
- [33] Gazetas G, Dobry R. Horizontal response of piles in layered soils [J]. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, 1984, 110(1):20-40.
- [34] Fwa T F, Shi X P, Tan S A. Use of Pasternak foundation model in concrete pavement analysis[J]. *Journal of Transportation Engineering*, 1996, 122(4):323-328.
- [35] 中国建筑科学院. 建筑桩基技术规范: JGJ 94—2008 [S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2008.
- China Academy of Building Research. Technical code for building pile foundations: JGJ 94—2008[S]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2008.
- [36] 夏桂云, 李传习. 考虑剪切变形影响的杆系结构理论与应用[M]. 北京: 人民交通出版社, 2008: 21-22.
- XIA Guiyun, LI Chuanxi. *Frame Structure Theory and Its Applications Including Shear Deformation Effects* [M]. Beijing: China Communications Press, 2008:21-22.
- [37] 梁发云, 陈海兵, 宋著. 轴向荷载对横向受荷桩承载性状影响的参数分析[J]. *土木建筑与环境工程*, 2011, 33(6):25-30.
- LIANG Fayun, CHEN Haibing, SONG Zhu. Parameter analysis of effects of axial load on the lateral response of piles[J]. *Journal of Civil, Architectural & Environmental Engineering*, 2011, 33(6):25-30.

## Analytical analysis and solution of horizontal vibration of large diameter single pile in two-parameter layered soils

XIN Yu<sup>1</sup>, CUI Chun-yi<sup>1</sup>, XU Cheng-shun<sup>2</sup>, LIANG Zhi-meng<sup>1</sup>, WANG Ben-long<sup>1</sup>, PEI Hua-fu<sup>3</sup>

(1. Department of Civil Engineering, Dalian Maritime University, Dalian 116026, China;

2. Key Laboratory of Urban Security and Disaster Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China;

3. State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

**Abstract:** A simplified model of the large-diameter pile and layered surrounding soils system is established based on Pasternak foundation and Timoshenko beam models, considering the axial second-order effect of pile shaft. The corresponding analytical solution is derived by utilizing differential transformation method and double-shear theory as well as pile-soil continuity conditions, which is reduced and verified by comparing with existing solutions. On this basis, the effects of the slenderness ratio of pile, thickness of soil layers, pile-soil modulus ratio, shear deformation coefficient of pile shaft and axial force on the horizontal vibration of the pile-soil coupled system are examined via parametric analysis. The results show that the derived solution can give an engineering guide for horizontal vibration analysis and design with respect to large-diameter single pile, which accounts for the shear deformation influences of pile shaft and surrounding soils as well as the axial second-order effect.

**Key words:** pile; horizontal vibration; Pasternak model; Timoshenko beam; layered soils

**作者简介:** 辛宇(1990—),女,博士研究生。E-mail: sdxinyu@dlmu.edu.cn。

**通讯作者:** 崔春义(1978—),男,博士,教授,博士生导师。E-mail: cuichunyi@dlmu.edu.cn。