

考虑桩周饱和土扰动效应的楔形桩水平振动阻抗

王 珏^{1,2}, 项 颖¹, 李振亚², 王佳栋³, 周 叮⁴

(1. 河海大学机电工程学院, 江苏 常州 213022; 2. 河海大学岩土力学与堤坝工程教育部重点实验室, 江苏 南京 210098; 3. 江苏大学土木工程与力学学院, 江苏 镇江 212013; 4. 南京工业大学土木工程学院, 江苏 南京 211816)

摘要: 为了计算考虑桩周土扰动效应下的楔形桩水平振动阻抗, 将薄层饱和土径向离散, 利用 Biot 波动理论建立饱和土的复刚度传递多圈层水平振动平面应变模型, 计算径向非均质的桩周土对桩身的水平动反力; 将楔形桩轴向离散, 基于 Timoshenko 梁理论建立考虑桩身剪切振动效应的横向振动微分方程, 利用传递矩阵法推导桩顶水平振动阻抗的半解析解。对考虑饱和土扰动效应下楔形桩水平振动阻抗的影响因素进行了参数化分析, 研究表明: 在低频激励下增大楔形角能提高桩顶的水平阻抗, 且随着振动频率的提高, 增大楔形角会增强阻抗的频率依赖性; 在低频激励下桩周土弱化会降低楔形桩的水平阻抗, 且随着振动频率的提高, 弱化效应会提高阻抗的共振幅值; 对于如砂砾、粗砂、细砂等渗透系数较大的饱和土应考虑土体中流体惯性效应对楔形桩水平振动阻抗的影响; 对于桩身长径比小且高频振动的楔形桩, 有必要采用可以考虑桩身转动惯量及剪切效应的 Timoshenko 梁模型描述桩身水平振动。

关键词: 桩-土相互作用; 楔形桩; 饱和土; 水平阻抗; 扰动效应

中图分类号: TU473.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2022)03-0595-11

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2022.03.009

引 言

楔形桩是一种起源于前苏联的变截面桩基础, 它充分利用桩身斜侧面与土体的相互作用, 提高了桩侧摩阻力, 具有良好的承载性能和经济特性。近年来, 国内外学者通过现场或模型试验^[1-2]、数值仿真^[3]或理论模型^[4-5]对楔形桩的承载特性展开了研究, 结果表明: 在相同土质条件下, 楔形桩的单位体积承载力比等截面桩提高 0.5~2.5 倍, 基础工程造价降低 40%~60%, 因此楔形桩逐渐被应用于基础工程。对于高耸的动力敏感结构, 楔形桩与周围土体的动力相互作用会影响上部结构的动力特性, 因此土与楔形桩动力相互作用对上部结构的动力学设计具有至关重要的影响^[6]。

在采用子结构法考虑土与结构动力相互作用的动力学建模中, 确定反应桩头位移和外力关系的振动阻抗是模拟桩-土动力相互作用的关键。用于模拟土与等截面桩动力相互作用的动力 Winkler 模型^[7]、平面应变模型^[8-9]和连续介质模型^[10]等开始被应用于土与楔形桩的动力相互作用问题。蔡燕燕等^[11]通过将土与楔形桩沿桩身轴向离散, 并利用土体平面应变模型及桩身 Euler 梁模型推导了楔形桩

桩顶的垂直振动阻抗的解析解。吴文兵等^[12]在此基础上进一步考虑了楔形桩的横向惯性效应对垂直振动阻抗的影响。Ghazavi 等^[13-14]将 Gazetas 等^[7]提出的桩侧土刚度和阻尼系数简化公式作为 Winkler 地基系数, 建立了水平简谐荷载作用下土与楔形桩的动力相互作用模型。杨紫健等^[15]在此基础上利用 Timoshenko 梁理论进一步考虑了楔形桩剪切效应, 计算了桩身位移及内力的包络线。在上述土与楔形桩动力相互作用模型中均视土体为单相介质, 随着 Biot^[16]建立的饱和和多孔介质波动理论在桩-土动力相互作用模型中的应用, 研究表明: 流体在固相中的渗透性会对桩顶振动阻抗产生一定的影响^[17-18]。范小雪等^[19]基于饱和土平面应变模型研究了非等截面桩的桩身扩径及缩径情况对桩顶水平振动阻抗的影响。因此有必要考虑饱和土中流体渗透特性对楔形桩水平振动阻抗的影响。

此外, 上述研究中忽略了桩基础受环境荷载或施工扰动后, 桩周土在一定范围内将呈现出径向非均匀性, 例如: 长期循环荷载影响桩周土弱化, 剪切波速降低; 受施工影响桩周土压实, 剪切波速增加的现象。早期 Novak 等^[20]就对此提出了将桩周土划分为忽略质量的内部扰动域和半无限大的外部非扰动域的平面应变模型, 建立了考虑扰动效应的桩-土相

收稿日期: 2021-01-18; **修订日期:** 2021-04-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(52178474, 51808190); 中央高校基础业务费资助项目(B210202127); 常州市科技计划资助项目(CJ20210138)。

互作用问题的理论基础。为了研究扰动域土体参数呈任意变化形式下的振动问题,研究者们提出了圈层平面应变模型并对此不断完善^[21-24],随后被用于研究径向非均质单相土对楔形桩基础振动阻抗的影响。Wu等^[25]基于该模型研究了考虑挤土效应时楔形桩扭转振动阻抗;高柳等^[26]基于该模型研究了桩周土压实及弱化情况下的楔形桩垂直振动阻抗;王珏等^[27-28]进一步基于Biot理论及分数导数理论对地基的复刚度传递多圈层平面应变模型进行改进,研究了饱和土压实及弱化效应对楔形桩垂直振动阻抗的影响。上述研究主要针对楔形桩的垂直和扭转振动,但结构在风、波浪或地震作用下,楔形桩通常以承受水平荷载为主,因此求解考虑桩周饱和土扰动效应下的楔形桩水平振动阻抗,对近海工程、高压输电塔、高层建筑等结构的动力学设计具有重要的工程意义。

为了完善上述土与楔形桩动力相互作用的理论模型,本文利用Biot波动理论建立了饱和土径向复刚度传递多圈层水平振动平面应变模型,推导了考虑扰动效应的桩周土对桩身的水平动反力;基于Timoshenko梁理论建立了考虑桩身剪切振动效应的横向振动微分方程,利用桩身轴向传递矩阵法推导了桩顶水平振动阻抗的半解析解;参数化研究了楔形角、楔形桩长径比、土体扰动效应以及渗透系数对楔形桩水平振动阻抗的影响。

1 分析模型及基本假定

在如图1所示的含有扰动域的饱和黏弹性半空间中,埋置了一根底面半径为 r_b ,长为 L ,倾角为 θ ,顶部受水平及摇摆简谐荷载 $Q_0e^{i\omega t}$ 和 $M_0e^{i\omega t}$ 的楔形桩基础。其中, Q_0 和 M_0 分别为水平和摇摆激振的幅值, ω 为激振频率,虚数 $i = \sqrt{-1}$ 。如图2(a)所示,将桩-土系统沿轴向从桩顶到桩底划分成 M 层,其中第 i 层($i=1, 2, \dots, M$)的厚度为 h_i ,该层桩身半径 $r_{i0} = r_b + (M-i)(L/M)\tan\theta$ 。为了处理桩周饱和土的扰动效应,如图2(b)所示,将各层桩周土径向离散成宽度为 Δr_i 的内圈扰动域及外圈非扰动域,并进一步将内圈扰动域径向离散成 N 个子圈层,由内至外标号为 $1, 2, \dots, N$,非扰动域标号为 $N+1$ 。因此,第 i 层中第 j 圈的外半径 r_{ij} 表达式为 $r_{ij} = r_{i0} + j\Delta r_i/N$ 。当各薄层土中扰动域的径向子圈层单元划分足够多时,可近似将子圈层中的饱和土视为均质。

模型中的基本假定如下:地基土轴向由一系列满足Novak平面应变模型的土层组成。各层桩身视为等截面Timoshenko梁。系统振动过程中桩-土系统满足弹性和小变形假定,相邻子圈层交界面及相邻桩身交界面均满足力的平衡及位移连续条件。

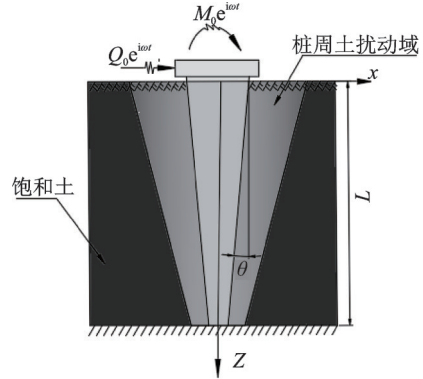
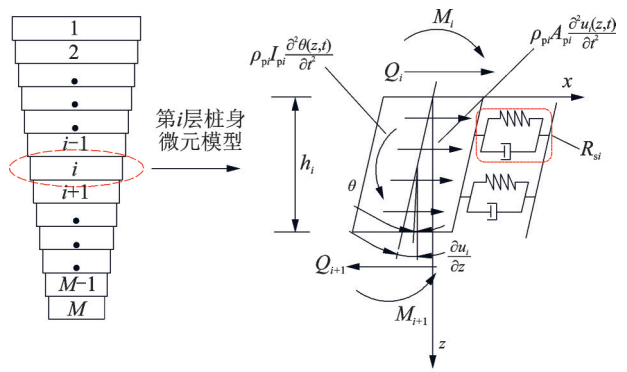
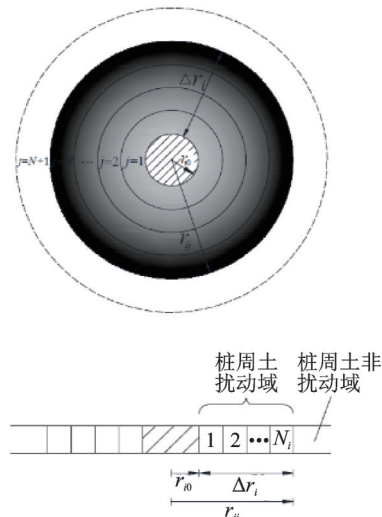


图1 受扰动的饱和土与楔形桩水平动力相互作用
Fig. 1 The disturbed saturated soil interacts with the wedge pile horizontally



(a) 桩身轴向离散
(a) Discretization of the pile in vertical axis



(b) 薄层土径向离散
(b) Discretization of soil layer in radial direction

图2 桩-土动力相互作用系统离散模型

Fig. 2 The discrete model of the pile-soil dynamic interaction system

2 方程建立及求解

2.1 饱和土的水平振动

取第 i 薄层土中第 j 圈内的饱和土单元为研究

对象,基于 Biot 理论描述的平面应变模型,各饱和薄层土的水平振动控制方程为:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda_c + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \alpha M_s \nabla (\nabla \cdot \mathbf{w}) = \rho \ddot{\mathbf{u}} + \rho_i \ddot{\mathbf{w}} \quad (1a)$$

$$\alpha M_s \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + M_s \nabla (\nabla \cdot \mathbf{w}) = \rho_i \ddot{\mathbf{u}} + m \ddot{\mathbf{w}} + b_c \dot{\mathbf{w}} \quad (1b)$$

$$\alpha M_s \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} + M_s \nabla \cdot \dot{\mathbf{w}} = -\dot{p}_i \quad (1c)$$

式中 拉普拉斯算子 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$, 变量上的点表示对时间的求导。 \mathbf{u} 和 \mathbf{w} 分别为与外激振频率 ω 有关的饱和土固相和液相的位移向量; p_i 为孔隙水压力; α 和 M_s 为与饱和和孔隙介质压缩有关的 Biot 参数。饱和土的拉梅常数分别为 $\lambda = 2\mu v_s / (1 - 2v_s)$, $\mu = G_s (1 + i\beta_s)$ 和 $\lambda_c = \lambda + \alpha^2 M_s$, 其中 v_s , G_s 和 β_s 分别为饱和土泊松比、剪切模量和黏性系数。 ρ , ρ_s 和 ρ_i 分别为土体总密度、固相密度和液相密度, 且满足 $\rho = n\rho_i + \rho_s(1 - n)$, 其中 n 为饱和土孔隙率。饱和土中的固相和液相的耦合作用采用参数 $m = \rho_i/n$ 和 $b_c = \rho_i g/k_D$ 表示, 其中 k_D 为达西渗透系数, g 为重力加速度。

引入如下势函数, 令:

$$\mathbf{u} = \nabla \phi_1 + \nabla \times \boldsymbol{\varphi}_1, \mathbf{w} = \nabla \phi_2 + \nabla \times \boldsymbol{\varphi}_2 \quad (2)$$

式中 ϕ_1 和 ϕ_2 分别为饱和土固相和液相的位移标量; $\boldsymbol{\varphi}_1$ 和 $\boldsymbol{\varphi}_2$ 分别为固相和液相的位移矢量。

将式(2)代入式(1), 做 Laplace 变换后整理得两个含有微分算子的矩阵方程。为使方程有非零解, 则需满足下式:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - \eta_1^2)(\nabla^2 - \eta_2^2)\phi_1 &= 0, \\ (\nabla^2 - \eta_1^2)(\nabla^2 - \eta_2^2)\phi_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$(\nabla^2 - \eta_3^2)\phi_1 = 0, (\nabla^2 - \eta_3^2)\phi_2 = 0 \quad (4)$$

式中

$$\begin{aligned} \eta_1^2 &= \frac{d_1 + \sqrt{d_1^2 - 4d_2}}{2}, \eta_2^2 = \frac{d_1 - \sqrt{d_1^2 - 4d_2}}{2}, \\ \eta_3^2 &= \frac{\rho_i^2 \omega^4 - \rho \omega^2 (m\omega^2 - ib_c \omega)}{\mu (m\omega^2 - ib_c \omega)}, d_1 = \\ &= \frac{2\alpha M_s \rho_i \omega^2 - (\lambda_c + 2\mu)(m\omega^2 - ib_c \omega) - \rho \omega^2 M_s}{(\lambda + 2\mu) M_s}, \\ d_2 &= \frac{(m\rho - \rho_i^2)\omega^4 - ib_c \rho \omega^3}{(\lambda + 2\mu) M_s}. \end{aligned}$$

由算子分解理论及分离变量法可得式(3)和式(4)中 ϕ_i 和 $\boldsymbol{\varphi}_i (i=1, 2)$ 的解, 进而代入式(2), 得到固相径向位移 u_r , 固相环向位移 u_θ , 液相径向位移 w_r , 以及液相环向位移 w_θ 的通解, 并表示成如下形式:

$$\begin{cases} u_r(r, \omega, \theta) = U_r(r, \omega) \cos \theta \\ u_\theta(r, \omega, \theta) = U_\theta(r, \omega) \sin \theta \\ w_r(r, \omega, \theta) = W_r(r, \omega) \cos \theta \\ w_\theta(r, \omega, \theta) = W_\theta(r, \omega) \sin \theta \end{cases} \quad (5)$$

将式(5)中饱和土的位移场代入其应力-位移的

微分关系 $\sigma_r = \lambda \nabla \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} - \alpha p_i$, $\tau_\theta = \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right)$, 并将应力表示成如下形式:

$$\begin{cases} \sigma_r(r, \omega, \theta) = \sigma(r, \omega) \cos \theta \\ \tau_\theta(r, \omega, \theta) = \tau(r, \omega) \sin \theta \end{cases} \quad (6)$$

将式(5)和式(6)中的位移和应力通解表示成如下矩阵表达式:

$$\mathbf{S}_s(r, \omega) = \mathbf{T}_s(r, \omega) \cdot \mathbf{X}_s \quad (7)$$

式中 位移和应力向量 $\mathbf{S}_s = \{U_r, U_\theta, W_r, W_\theta, \sigma, \tau\}^T$, 待定系数向量 $\mathbf{X}_s = \{A_s, B_s, C_s, D_s, E_s, F_s\}^T$ 需根据土体边界条件求解, 饱和土的径向传递矩阵 T_s 的表达式见附录 A。

扰动域内的解 ($r \leq r_N$)

对扰动域中第 j 圈层 ($j=1, 2, \dots, N$) 饱和土, 根据式(7)中的位移场和应力场通解有:

$$\mathbf{S}_{sj}(r, \omega) = \mathbf{T}_{sj}(r, \omega) \cdot \mathbf{X}_{sj} \quad (8)$$

式中 $T_{sj}(r, \omega)$ 为将第 j 圈内的饱和土材料参数代入附录公式(A-1)计算得到的该圈层土体传递矩阵。

根据交界面的位移和应力连续条件 $\mathbf{S}_{sj}(r_j, \theta) = \mathbf{S}_{s(j+1)}(r_j, \theta)$, 由传递矩阵法可建立第 1 层土体待定系数向量 \mathbf{X}_{s1} 和第 N 层土体待定系数向量 \mathbf{X}_{sN} 之间的关系:

$$\mathbf{X}_{s1} = \left\{ \prod_{j=1}^{N-1} [T_{sj}^{-1}(r_j) T_{s(j+1)}(r_j)] \right\}_{6 \times 6} \mathbf{X}_{sN} \quad (9)$$

非扰动域内的解 ($r \geq r_N$)

对于第 $N+1$ 圈的饱和土非扰动域, 其径向需满足无限域的边界条件 $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{u}(r, \theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{w}(r, \theta) = 0$ 。

因此, 待定系数向量 $\mathbf{X}_{s(N+1)}$ 中的系数 $A_s = C_s = E_s = 0$ 。根据式(7)中非扰动域饱和土位移场和应力场通解有:

$$\mathbf{S}_{s(N+1)}(r, \omega) = \mathbf{T}_{s(N+1)}(r, \omega) \cdot \mathbf{X}_{s(N+1)} \quad (10)$$

式中 $\mathbf{X}_{s(N+1)} = \{B_s, D_s, F_s\}^T$, $T_{s(N+1)}(r, \omega)$ 为将非扰动域饱和土材料参数代入附录 A 公式(A-2)计算得到土体传递矩阵。

薄层土与桩身接触面的水平动反力

根据扰动域和非扰动域交界面连续条件 $\mathbf{S}_N(r_N, \theta) = \mathbf{S}_{N+1}(r_N, \theta)$, 采用传递矩阵法可建立第

1层土体待定系数向量 X_{s1} 和第 $N+1$ 层土体待定系数向量 $X_{s(N+1)}$ 之间的关系:

$$X_{s1} = Ts \cdot X_{s(N+1)} \quad (11)$$

$$\text{式中 } Ts = \left\{ \prod_{j=1}^N [T_{s_j}^{-1}(r_j) T_{s_{(j+1)}}(r_j)] \right\}_{6 \times 3} \circ$$

根据桩周土边界条件,当桩身段发生单位水平位移且桩体接触面不透水时,由下式可确定第 1 圈层位移场和应力场通解中的待定系数:

$$X_{s1} = \{Ts\}_{6 \times 3} \cdot \left\{ \left\{ \tilde{T}_{s1}(r_0) \right\}_{3 \times 6} \cdot \{Ts\}_{6 \times 3} \right\}_{3 \times 3}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

式中 \tilde{T}_{s1} 为 T_{s1} 矩阵中的前 3 行元素。

将求解得到的第 1 圈层待定系数式(12)代入式(7)后,即得第 1 圈层中应力场 $\sigma_i(r, \theta)$ 和 $\tau_\theta(r, \theta)$ 的解,对桩周土 $r=r_{i0}$ 处的应力解积分,则可得桩-土接触面上单位位移产生的水平动反力:

$$R_{si} = \int_0^{2\pi} r_{i0} [-\sigma_1(r_{i0}) \cos^2 \theta + \tau_1(r_{i0}) \sin^2 \theta] d\theta \quad (13)$$

2.2 楔形桩的水平振动

根据 Timoshenko 梁振动理论,在第 i 层桩侧土动反力作用下,桩身横向振动位移 $u_{pi}(z, t)$ 满足以下振动控制方程:

$$\rho_{pi} A_{pi} \frac{\partial^2 u_{pi}(z, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\kappa G_{pi} A_{pi} \left(\frac{\partial u_{pi}(z, t)}{\partial z} - \theta_{pi}(z, t) \right) \right] - R_{si} u_{pi}(z, t) \quad (14a)$$

$$\rho_{pi} I_{pi} \frac{\partial^2 \theta_{pi}(z, t)}{\partial t^2} = E_{pi} I_{pi} \frac{\partial^2 \theta_{pi}(z, t)}{\partial z^2} + \kappa G_{pi} A_{pi} \left(\frac{\partial u_{pi}(z, t)}{\partial z} - \theta_{pi}(z, t) \right) \quad (14b)$$

式中 κ 为桩身截面形状系数; A_{pi} , ρ_{pi} , E_{pi} , G_{pi} 和 I_{pi} 分别为第 i 层桩身截面积、密度、弹性模量、剪切模量和截面惯性矩。

当桩身受简谐荷载作用时,其横向振动位移满足 $u_{pi}(z, t) = U_{pi}(z) e^{i\omega t}$ 形式,式(14)可整理成关于位移的四阶常系数微分方程,其通解为:

$$U_{pi}(z) = A_i \cosh\left(\frac{\alpha_i}{h_i} z\right) + B_i \sinh\left(\frac{\alpha_i}{h_i} z\right) + C_i \cos\left(\frac{\beta_i}{h_i} z\right) + D_i \sin\left(\frac{\beta_i}{h_i} z\right) \quad (15)$$

式中

$$\alpha_i = \sqrt{\sqrt{\frac{\delta_i^4}{4} + \lambda_i^4} - \frac{\delta_i^2}{2}}, \quad \beta_i = \sqrt{\frac{\delta_i^2}{2} + \sqrt{\frac{\delta_i^4}{4} + \lambda_i^4}},$$

$$\left(\frac{\delta_i}{h_i}\right)^2 = \frac{E_{pi} I_{pi} R_i + J_{pi} W_{pi}}{E_{pi} I_{pi} W_{pi}}, \quad \left(\frac{\lambda_i}{h_i}\right)^4 = \frac{R_i (W_{pi} - J_{pi})}{E_{pi} I_{pi} W_{pi}},$$

$W_{pi} = \kappa G_{pi} A_{pi}$, $J_{pi} = \rho_{pi} I_{pi} \omega^2$, $R_i = \rho_{pi} A_{pi} \omega^2 - R_{si}$; A_i , B_i , C_i 和 D_i 分别为第 i 段桩身位移通解的待定系数。

将式(15)代入桩身截面转角、截面弯矩以及截面剪力的微分关系,整理后可得第 i 段桩身单元的变形、内力与待定系数之间的关系为:

$$\begin{Bmatrix} U_{pi}(z) \\ \theta_{pi}(z) \\ Q_{pi}(z) \\ M_{pi}(z) \end{Bmatrix} = T_{pi}(z) \begin{Bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \end{Bmatrix} \quad (16)$$

式中 $T_{pi}(z)$ 为桩身的轴向传递矩阵,其表达式见附录 B。

根据式(16)并结合桩身横向振动时力与变形的微分关系,可建立第 i 层桩段的上下表面变形和内力的关系如下:

$$\begin{Bmatrix} U_{pi}(h_i) \\ \theta_{pi}(h_i) \\ Q_{pi}(h_i) \\ M_{pi}(h_i) \end{Bmatrix} = T_{pi}(h_i) T_{pi}^{-1}(0) \begin{Bmatrix} U_{pi}(0) \\ \theta_{pi}(0) \\ Q_{pi}(0) \\ M_{pi}(0) \end{Bmatrix} \quad (17)$$

根据相邻桩身界面连续性条件,可通过轴向传递矩阵法建立楔形桩桩顶、桩底之间位移和力的关系:

$$\begin{Bmatrix} U_p(L) \\ \theta_p(L) \\ Q_p(L) \\ M_p(L) \end{Bmatrix} = T_p \begin{Bmatrix} U_p(0) \\ \theta_p(0) \\ Q_p(0) \\ M_p(0) \end{Bmatrix} \quad (18)$$

式中 $T_p = \prod_{i=1}^{N_p} \{T_{pi}(h_i) \cdot T_{pi}^{-1}(0)\}$ 。将矩阵 T_p 分解成 4 个 2×2 的子矩阵,即 $\begin{bmatrix} T_{p11} & T_{p12} \\ T_{p21} & T_{p22} \end{bmatrix}$ 。对于桩底为基岩的端承桩,其桩底为固定端,即 $U(L)=0$ 和 $\theta(L)=0$,由式(18)可得楔形桩桩基桩顶力与位移的关系式:

$$\begin{Bmatrix} Q_p(0) \\ M_p(0) \end{Bmatrix} = -T_{p12}^{-1} T_{p11} \begin{Bmatrix} U_p(0) \\ \theta_p(0) \end{Bmatrix} \quad (19)$$

桩顶水平-摇摆振动阻抗 $\mathfrak{R} = T_{p12}^{-1} \cdot T_{p11}$,其中水平振动阻抗为:

$$R_{hh} = R(1, 1) = \frac{r_b^3}{E_p I_{pM}} (K_{hh} + iC_{hh}) \quad (20)$$

式中 K_{hh} 表示水平阻抗无量纲化之后的动刚度; C_{hh} 表示水平阻抗无量纲化之后的动阻尼。

3 算例分析

以下算例通过参数分析研究了桩身的楔形角和剪切效应,以及桩周土的扰动效应及流体渗透性对楔形桩水平振动阻抗的影响。如无特殊说明,根据文献[19]中的饱和土与桩身计算参数取值如下:

$L=10\text{ m}$, $r_b=0.5\text{ m}$, $E_p=30\text{ GPa}$, $\rho_p=2500\text{ kg/m}^3$, $E_s=30\text{ MPa}$, $\rho_s=1000\text{ kg/m}^3$, $\rho_s=2700\text{ kg/m}^3$, $k_D=10^{-6}\text{ m/s}$, $n=0.4$, $\nu_s=0.3$, $\alpha=0.99$, $M_s=4.9\text{ GPa}$, $\beta_s=0.0$ 。剪切模量 $G_s=0.5E_s/(1+\nu_s)$, 剪切波速 $V_s=(G_s/\rho_s)^{1/2}$, 楔形桩的倾角为 $\theta=1^\circ$ 。此外,在分析过程中将频率通过桩底半径 r_b 及非扰动域剪切波速 V_s 进行无量纲化,令 $a_0=\omega r_b/V_s$ 。通过对楔形桩桩身单元轴向划分单元数及桩周饱和土扰动域径向划分单元数的收敛性计算分析,以下算例中轴向和径向的离散单元数分别取 $M=30$ 和 $N=30$ 。

3.1 楔形角对水平振动阻抗的影响

图3为不同桩身楔角对水平振动阻抗的影响,在桩底半径和桩长不变的前提下,桩身楔角取为 $0^\circ\sim 3.0^\circ$ 。当楔形角 $\theta=0^\circ$ 时,即退化为饱和土中的直桩,由图3可见,通过与文献解的对比,其结果表现出较好的一致性。此外,从图3中可以看出:当无量纲激振频率较小 ($0\leq a_0\leq 1.0$) 时,水平动刚度会随着楔形角的增大而增大,数值计算表明最大提高了2.5倍左右。随着频率的提高,楔形桩的水平振动阻抗会随频率的改变而产生波动,且楔形角越大频率依赖性越强。因此在对楔形角较大的桩基础进行动力学设计时,需要结合外激振荷载的特征频率进行综合考虑。

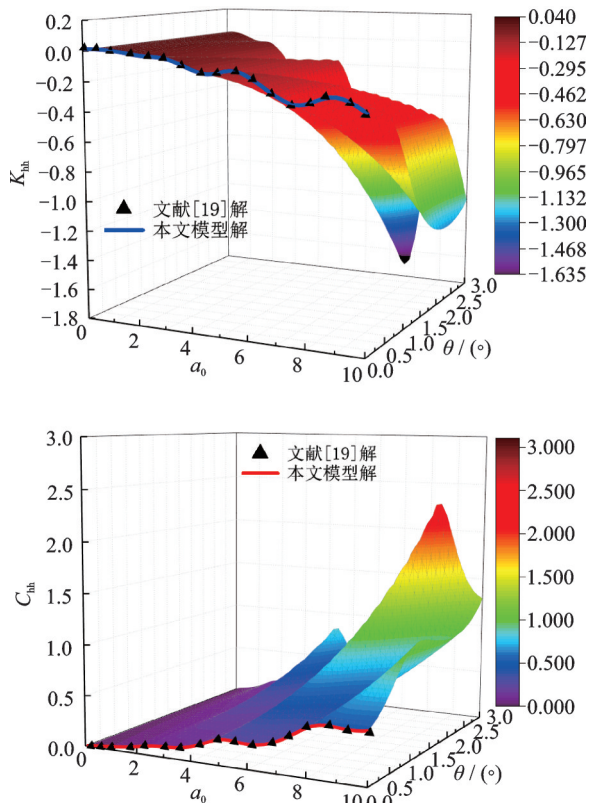


图3 埋置于饱和土中的楔形桩水平振动阻抗

Fig. 3 Lateral vibration impedance of wedge pile embedded in saturated soil

3.2 饱和土扰动效应对水平振动阻抗的影响

桩周饱和土的不同扰动程度采用桩-土界面剪切模量 G_{Si} 与非扰动域土体剪切模量 G_{So} 的比值表示,扰动域中内外侧的土体剪切模量呈线性变化。当 $G_{Si}/G_{So}<1$ 时表示桩周土发生弱化;当 $G_{Si}/G_{So}=1$ 时表示桩周土不发生扰动作用;当 $G_{Si}/G_{So}>1$ 时表示桩周土被压实。为验证本文考虑扰动效应的土体模型推导及程序的正确性,如图4所示将饱和土退化为单相介质,与文献[21]中考虑单相土扰动效应的桩顶水平振动阻抗解进行对比,其中阻抗系数 α_{hh} 和 β_{hh} 采用文献[21]中的表达式 $R_{hh}=K_s(\alpha_{hh}+ia_0\beta_{hh})$ 进行了规格化, K_s 为当无量纲频率为0时楔形桩的静刚度。从图4可以看出,将本文饱和土退化为单相介质后的计算结果与文献解具有较好的一致性。

桩周饱和土不同扰动程度对楔形桩水平振动阻抗的影响如图5所示,通过与非扰动地基情况下的桩顶阻抗解对比可以看出:在低频时随着桩周土弱化程度增加,楔形桩的动刚度减小,但低频振动时该弱化程度对楔形桩水平振动阻抗的影响并不大,此时可以忽略桩周土的扰动效应。随着激振频率的增加,水平振动阻抗随频率的增大而发生波动,其中桩周土共振效应会随着桩周土的压实而减小。桩周土的不同扰动范围 ($\Delta r_i/r_{i0}$) 对楔形桩水平振动阻抗的影响如图6所示。由于在工程上扰动的范围通常不会超过桩半径的1.5倍,因此扰动范围分别取桩身半径的0.5, 1.0, 1.25及1.5倍四种情况进行分析,从图6中可以看出:在扰动程度 G_{Si}/G_{So} 不变的情况下,桩周土扰动范围的扩大对楔形桩水平振动的影响并不显著。

这里需要说明的是本模型实现了考虑饱和土扰动效应的楔形桩水平振动阻抗计算,参数化分析了扰动效应中饱和土剪切模量对阻抗的影响。但实际工程中扰动效应在改变土体剪切模量的同时也会引起孔隙率和渗透性等参数的改变,有必要进一步通过饱和土循环加载试验得到真实的土体参数后代入模型计算,分析考虑多参数耦合变化对桩顶阻抗函数的影响。

3.3 流体渗透性对水平振动阻抗的影响

本算例如图7所示讨论了饱和土中达西渗透系数 k_D 对楔形桩水平振动阻抗的影响。从图7中可以看出:当渗透系数小于 $1\times 10^{-4}\text{ m/s}$ 时,渗透系数对桩顶水平阻抗几乎没有影响,这是由于渗透系数过小时,土体中液体的流动受到限制,土体趋近于单相土的封闭系统,此时可以采用单相土理论进行简化计算。但是,当土体的渗透系数大于 $1\times 10^{-4}\text{ m/s}$

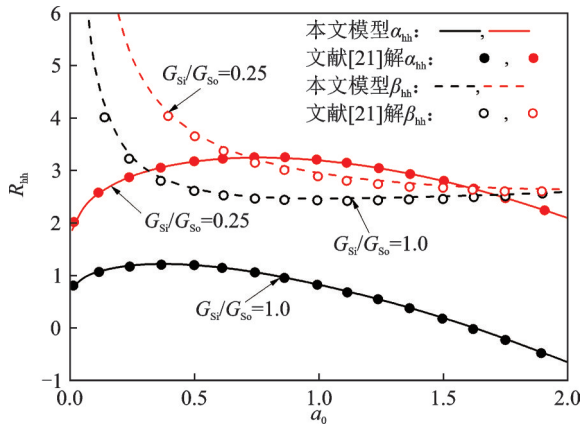


图4 考虑单相土扰动效应下的桩顶水平阻抗对比
Fig.4 Comparison of lateral impedance of pile tip under single-phase soil disturbance is considered

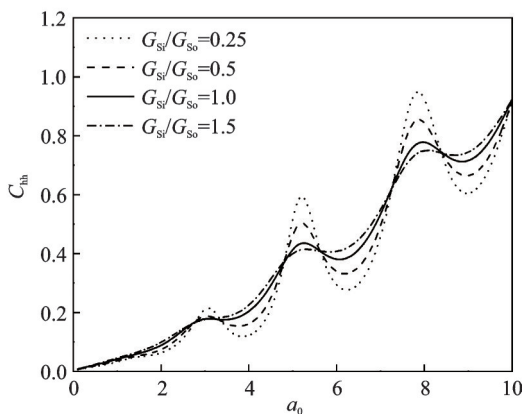
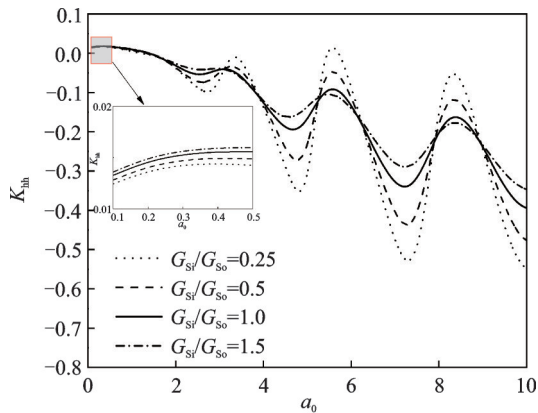


图5 不同扰动效应下桩顶阻抗随无量纲频率的变化
Fig.5 The variation of pile top impedance with dimensionless frequency under different disturbance effects

时,随着渗透系数的提高,对桩顶水平阻抗的影响越显著。当施工场地条件为以砂砾、粗砂等渗透系数大的地基土为主时,如采用单相介质模型分析,会因忽略了振动过程中饱和多孔介质内流体的惯性效应而影响水平振动阻抗计算的合理性。除了地基土颗粒自身特性外,扰动效应也会改变饱和土的渗透系数,例如压实效应会导致土的密度增加,孔隙减小,渗透性也会降低,从而影响楔形桩水平振动阻抗。因此,这时有必要考虑渗透系数对桩顶阻抗的影响。

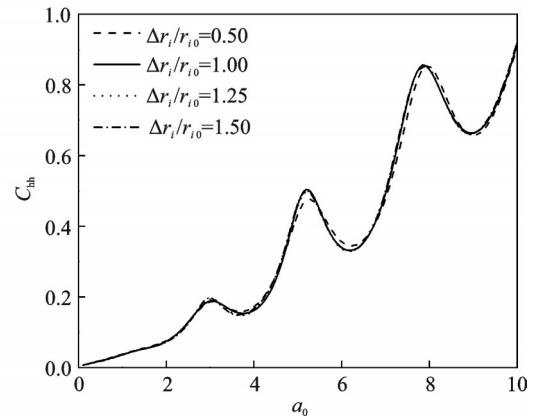
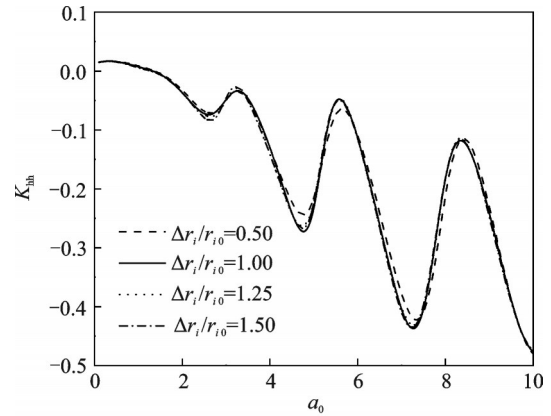


图6 不同扰动范围下桩顶阻抗随无量纲频率的变化
Fig.6 The variation of pile top impedance with dimensionless frequency under different disturbance range

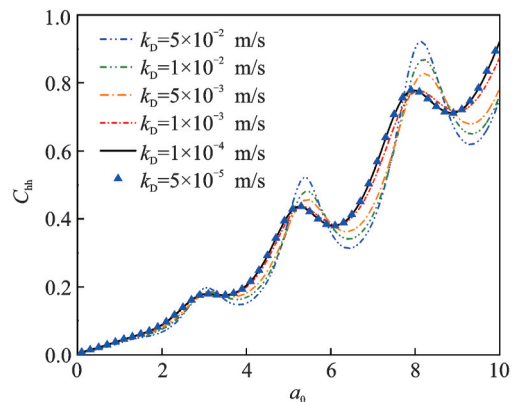
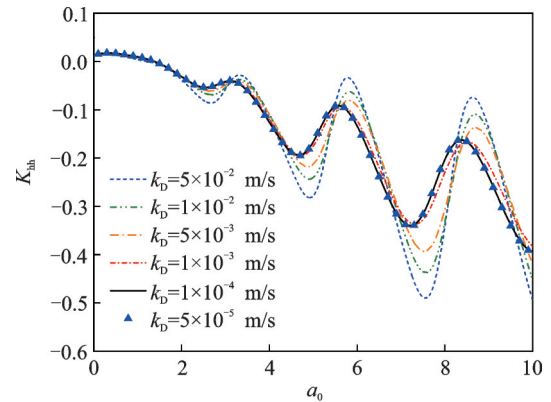


图7 不同渗透系数下水平阻抗随无量纲频率的变化
Fig.7 The variation of lateral impedance with dimensionless frequency under different permeability coefficients

3.4 桩身剪切效应对水平振动阻抗的影响

本算例分别采用 Timoshenko 梁和 Euler 梁理论计算了如图 8 所示的不同激振频率下桩顶水平振动阻抗随桩身長径比的变化。为了便于控制变量分析,本算例 θ 取为 0° 。从图 8 中可以看出:当激振频率较低时,桩顶刚度随着长径比 L/d 的增加而减小,最后趋于一个定值,此时的长径比称为有效桩长。桩身在低频振动时主要受剪切效应的影响,在长径比较小时采用 Timoshenko 梁模型计算的动刚度比 Euler 梁模型的结果偏小,但随着长径比增大,当 $L/d > 5$ 时两种模型的计算结果差异小于 5%。当激振频率较大时,桩顶动刚度和动阻尼随桩径比的变化存在一定的波动,但最后趋近于定值,此时的有效桩长比激振频率较小时的有效桩长大。在频率较大时,剪切变形和转动惯量对于动阻尼的影响不大,但对动刚度的影响不可忽略,从桩径比随动刚度变化的图可以看出,即使 L/d 达到 20 时,两种模型的动刚度依然存在差异,且振动频率越大差异越大,这是由于随着振动频率增大,桩身转动惯量的影响会更显著。因此,对于高频振动下长径比较小的楔形桩,采用考虑桩身剪切变形和转动惯量的 Timoshenko 梁理论能提高水平振动阻抗的计算精度。

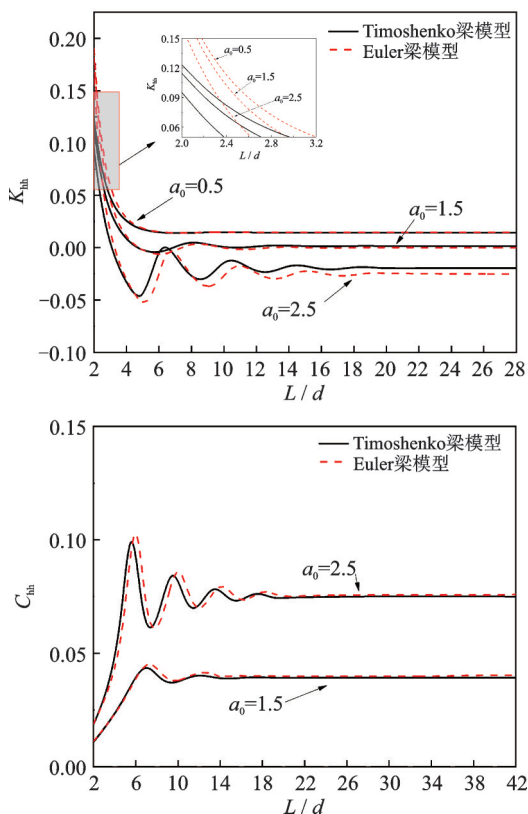


图 8 不同桩身模型下桩顶阻抗随长径比的变化

Fig. 8 The variation of pile top impedance with slenderness ratio under different pile models

4 结 论

本文利用 Biot 波动理论建立了考虑扰动效应的饱和土复刚度传递多圈层水平振动平面应变模型,利用 Timoshenko 梁理论及传递矩阵法建立了楔形桩横向振动模型,推导了考虑桩周土扰动效应下的桩基水平阻抗半解析解。通过对比算例验证了本文理论推导和数值计算的合理性,并参数化分析了楔形角、桩周土扰动效应、达西渗透系数及桩身剪切效应对楔形桩水平振动阻抗的影响,结论如下:

(1) 在低频激振下,增大楔形角能提高桩顶的水平阻抗;随着振动频率提高,增大楔形角会提高阻抗的频率依赖性。因此对于楔形角较大的桩基进行动力学设计时要综合考虑外激振荷载的特征频率。

(2) 桩周土的扰动效应对楔形桩水平振动阻抗的影响主要集中在其随频率变化曲线的共振峰值处。桩周土的弱化在低频振动时会降低楔形桩的水平阻抗,随着振动频率的增加,弱化效应会提高水平振动阻抗的共振幅值。

(3) 当流体渗透系数较小时,液体流动受限,土体趋近于封闭系统,此时渗透系数的减小对桩顶水平阻抗几乎没有影响。但当场地土以渗透系数较大的砂砾和粗砂等地基条件为主时,有必要考虑土体中流体惯性效应对楔形水平振动阻抗的影响。

(4) 通过 Timoshenko 梁与 Euler 梁模型的计算结果相比表明,桩身剪切效应对水平阻抗的实部刚度影响较大而对其虚部阻尼影响较小。当长径比较小时采用 Timoshenko 梁模型计算的动刚度比 Euler 梁模型的结果偏小。对于低频振动,当长径比 $L/d > 5$ 时两种模型的计算结果差异小于 5%。但对于高频振动,即使 $L/d > 20$ 时依然有必要采用 Timoshenko 梁理论描述桩身的横向振动。

参考文献:

- [1] Naggar M H EI, Sakr M. Evaluation of axial performance of tapered piles from centrifuge tests[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2000, 37(6): 1295-1308.
- [2] 蒋建平, 高广运, 顾宝和. 扩底桩、楔形桩、等直径桩对比试验研究[J]. 岩土工程学报, 2003, 25(6): 764-766.
Jiang Jianping, Gao Guangyun, Gu Baohe. Comparison of belled pile, tapered pile and equal-diameter pile[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2003, 25(6): 764-766.
- [3] Kodikara J, Kong K H, Haque A. Numerical evalua-

- tion of side resistance of tapered piles in mudstone[J]. *Geotechnique*, 2006, 56(7): 505-510.
- [4] 刘杰, 何杰, 闵长青. 夯实水泥土楔形桩复合地基中桩的合理楔角范围研究[J]. *土木工程学报*, 2010, 43(6): 122-127.
Liu Jie, He Jie, Min Changqing. Study of the rational wedge angle range in a composite foundation with rammed soil-cement tapered piles[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2010, 43(6): 122-127.
- [5] 周航, 孔纲强, 曹兆虎. 水平荷载下楔形桩桩-土相互作用理论分析[J]. *中南大学学报(自然科学版)*, 2016, 47(3): 897-904.
Zhou Hang, Kong Gangqiang, CAO Zhaohu. Theoretical analysis of pile-soil interaction under horizontal load[J]. *Journal of Central South University (Natural Science Edition)*, 2016, 47(3): 897-904.
- [6] 王奎华, 童魏烽, 肖偲, 等. 楔形桩的动力响应与试验研究[J]. *湖南大学学报(自然科学版)*, 2019, 46(5): 94-102.
Wang Kuihua, Tong Weifeng, Xiao Si, et al. Study on dynamic response of tapered pile and model test[J]. *Journal of Hunan University (Natural Sciences Edition)*, 2019, 46(5): 94-102.
- [7] Gazetas G, Dobry R. Horizontal response of piles in layered soils [J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1984, 110(1): 20-40.
- [8] Mylonakis G. Elastodynamic model for large-diameter end-bearing shafts[J]. *Soils and Foundations*, 2001, 41(3): 31-44.
- [9] Liu H L, Zheng C J, Ding X M, et al. A revised solution for the horizontal vibration of an end-bearing pile in viscoelastic soil[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2016, 40(13): 1890-1900.
- [10] Pak R Y S, Jennings P C. Elastodynamic response of pile under transverse excitations[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1987, 113(7): 1101-1116.
- [11] 蔡燕燕, 俞缙, 郑春婷, 等. 楔形桩桩顶纵向振动阻抗的解析解[J]. *岩土工程学报*, 2011, 33(S2): 392-398.
CAI Yanyan, YU Jin, ZHENG Chunting, et al. Analytical solution for longitudinal dynamic complex impedance of tapered pile[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2011, 33(S2): 392-398.
- [12] 吴文兵, 王奎华, 窦斌. 任意层地基中粘弹性楔形桩纵向振动响应研究[J]. *振动与冲击*, 2013, 32(8): 120-127.
Wu Wenbing, Wang Kuihua, Dou Bin. Vertical dynamic response of a viscoelastic tapered pile embedded in layered foundation[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2013, 32(8): 120-127.
- [13] Ghazavi M. Analysis of kinematic seismic response of tapered piles[J]. *Geotechnical and Geological Engineering*, 2007, 25(1): 37-44.
- [14] Dehghanpoor A, Ghazavi M. Response of tapered piles under lateral harmonic vibrations[J]. *International Journal of GEOMATE*, 2012, 2(2): 261-265.
- [15] 杨紫健, 吴文兵, 陆洪智, 等. 黏弹性地基中楔形桩水平振动特性研究[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2021, 53(11): 74-83.
Yang Zijian, Wu Wenbing, Lu Hongzhi, et al. Horizontal vibration characteristics of tapered pile embedded in viscoelastic foundation[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2021, 53(11): 74-83.
- [16] Biot M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1956, 28(2): 168-178.
- [17] Hu A F, Fu P, Xia C Q, et al. Lateral dynamic response of a partially embedded pile subjected to combined loads in saturated soil[J]. *Marine Georesources and Geotechnology*, 2017, 35(6): 778-798.
- [18] 孟坤, 崔春义, 许成顺, 等. 饱和层状土中浮承桩纵向动力阻抗的虚土桩模型[J]. *振动工程学报*, 2020, 33(2): 372-382.
MENG Kun, CUI Chunyi, XU Chengshun, et al. Virtual soil pile model for vertical dynamic impedance of a floating pile in saturated soil layers[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2020, 33(2): 372-382.
- [19] 范小雪, 李原, 吴文兵, 等. 饱和土中大直径缺陷桩水平振动响应研究[J]. *岩石力学与工程学报*, 2020, 39(2): 413-423.
Fan Xiaoxue, Li Yuan, Wu Wenbing, et al. Horizontal vibration response of defective large-diameter piles embedded in saturated soils[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2020, 39(2): 413-423.
- [20] Novak M, Sheta M. Approximate approach to contact problems of pile[C]. *Proceedings of the Geotechnical Engineering Division, ASCE National Convention, Florida*, 1980: 53-79.
- [21] Veletsos A S, Dotson K W. Horizontal impedances for radially inhomogeneous viscoelastic soil layers [J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 1988, 16(7): 947-966.
- [22] Naggar M H EI. Horizontal and rotational impedances for radially inhomogeneous soil media [J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2011, 34(3): 408-420.
- [23] Wang K H, Yang D Y, Zhang Z Q, et al. A new approach for vertical impedance in radially inhomogeneous soil layer [J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2012, 36(6): 697-707.
- [24] Hu A F, Fu P, Xia C Q, et al. Horizontal impedances of saturated soil layer with radially inhomogeneous boundary zone[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2018, 111: 184-192.
- [25] Wu W B, Jiang G S, Lü S H, et al. Torsional dynamic impedance of a tapered pile considering its construction disturbance effect[J]. *Marine Georesources & Geotech-*

nology, 2016, 34(4): 321-330.

[26] 高柳, 王奎华, 李振亚, 等. 考虑桩周土竖向作用和施工扰动效应时大直径楔形桩的纵向振动特性[J]. 振动与冲击, 2018, 37(2): 30-37.

Gao Liu, Wang Kuihua, Li Zhenya, et al. Vertical vibration characteristics of a large diameter tapered pile considering vertical action of surrounding soil and construction disturbed effect[J]. Journal of Shock and Vibration, 2018, 37(2): 30-37.

[27] 王珏, 高玉峰. 分数导数描述的层状饱和土中考虑扰动效应的直桩垂直阻抗[J]. 振动与冲击, 2020, 39(4): 185-192.

Wang Jue, Gao Yufeng. Vertical impedance of a straight pile embedded in disturbed layered saturated soil described by fraction viscoelastic model[J]. Journal of Vibration and Shock, 2020, 39(4): 185-192.

[28] Wang Jue, Zhou Ding, Zhang Yuquan, et al. Vertical impedance of a tapered pile in inhomogeneous saturated soil described by fractional viscoelastic model[J]. Applied Mathematical Modelling, 2019, 75: 88-100.

Lateral vibration impedance of tapered pile embedded in saturated soil with radial disturbance

WANG Jue^{1,2}, XIANG Ying¹, LI Zhen-ya², WANG Jia-dong³, ZHOU Ding⁴

(1.College of Mechanical & Electrical Engineering, Hohai University, Changzhou 213022, China;
 2.Key Laboratory of Ministry of Education for Geomechanics and Embankment Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China;
 3.Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China;
 4.College of Civil Engineering, Nanjing Tech University, Nanjing 211816, China)

Abstract: The lateral impedance of a tapered pile embedded in saturated soil medium is theoretically investigated with the consideration of soil disturbances in radial direction. To process the variation of pile radius and the disturbance of soil, the soil-pile system is discretized into axial thin layers and the soil layers are further discretized into radial annular layers. A lateral complex transfer model is developed to determine the reaction of the radially disturbed saturated soil layer to the pile segment based on the Biot's theory and plane-strain assumption. The differential equation for the transverse vibration of pile segment in each soil layer is established based on the Timoshenko beam theory. The semi-analytical solution of the lateral impedance at the head of the tapered pile is derived by the transfer matrix method. Parametric analyses are performed to investigate the influence of the soil and pile properties on the lateral impedance. The results are concluded as follows: Increasing tapered angle can increase the impedance of tapered pile under the low excitation frequency. The impedance of the pile with a larger taped angle shows a stronger frequency-dependence with the increase of frequency. The weakening of soil around the pile reduces the lateral impedance of the tapered pile under low frequency. Weakening effect increases the resonance amplitude of the impedance with the increase of frequency. The soil medium with high permeability such as sandy and gravelly saturated soil has noticeable influence on the lateral impedance. It is necessary to consider the rotational inertia and shear deformation for tapered piles with small slenderness ratio and high excitation frequency.

Key words: soil-pile interaction; tapered pile; saturated soil; horizontal impedance; soil disturbance

作者简介: 王 珏(1988—),女,博士,副教授。电话:(0519)85106048; E-mail: juewang@hhu.edu.cn。

附录 A: 饱和土径向传递矩阵

扰动域($r \leq r_N$)内第 j 圈层($j=1, 2, \dots, N$)的土体传递矩阵表达式为:

$$T_{sj}(r, \omega) = \begin{bmatrix} [I_1(\eta_1 r)]' & [K_1(\eta_1 r)]' & [I_1(\eta_2 r)]' & [K_1(\eta_2 r)]' & \frac{1}{r} I_1(\eta_3 r) & \frac{1}{r} K_1(\eta_3 r) \\ -\frac{1}{r} I_1(\eta_1 r) & -\frac{1}{r} K_1(\eta_1 r) & -\frac{1}{r} I_1(\eta_2 r) & -\frac{1}{r} K_1(\eta_2 r) & -[I_1(\eta_3 r)]' & -[K_1(\eta_3 r)]' \\ a[I_1(\eta_1 r)]' & b[K_1(\eta_1 r)]' & c[I_1(\eta_2 r)]' & d[K_1(\eta_2 r)]' & \frac{e}{r} I_1(\eta_3 r) & \frac{f}{r} K_1(\eta_3 r) \\ -\frac{a}{r} I_1(\eta_1 r) & -\frac{b}{r} K_1(\eta_1 r) & -\frac{c}{r} I_1(\eta_2 r) & -\frac{d}{r} K_1(\eta_2 r) & -e[I_1(\eta_3 r)]' & -f[K_1(\eta_3 r)]' \\ ts_{51}(r) & ts_{52}(r) & ts_{53}(r) & ts_{54}(r) & ts_{55}(r) & ts_{56}(r) \\ ts_{61}(r) & ts_{62}(r) & ts_{63}(r) & ts_{64}(r) & ts_{65}(r) & ts_{66}(r) \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (A-1)$$

上述矩阵中的第5和6行元素表达式如下:

$$\begin{aligned}
 t_{s_{51}}(r) &= (\lambda_c + 2\mu + a\alpha M_s) [I_1(\eta_1 r)]'' + \frac{\lambda_c + a\alpha M_s}{r} [I_1(\eta_1 r)]' - \frac{\lambda_c + a\alpha M_s}{r^2} [I_1(\eta_1 r)], \\
 t_{s_{52}}(r) &= (\lambda_c + 2\mu + b\alpha M_s) [K_1(\eta_1 r)]'' + \frac{\lambda_c + b\alpha M_s}{r} [K_1(\eta_1 r)]' - \frac{\lambda_c + b\alpha M_s}{r^2} [K_1(\eta_1 r)], \\
 t_{s_{53}}(r) &= (\lambda_c + 2\mu + c\alpha M_s) [I_1(\eta_2 r)]'' + \frac{\lambda_c + c\alpha M_s}{r} [I_1(\eta_2 r)]' - \frac{\lambda_c + c\alpha M_s}{r^2} [I_1(\eta_2 r)], \\
 t_{s_{54}}(r) &= (\lambda_c + 2\mu + d\alpha M_s) [K_1(\eta_2 r)]'' + \frac{\lambda_c + d\alpha M_s}{r} [K_1(\eta_2 r)]' - \frac{\lambda_c + d\alpha M_s}{r^2} [K_1(\eta_2 r)], \\
 t_{s_{55}}(r) &= \frac{2\mu}{r} [I_1(\eta_3 r)]' - \frac{2\mu}{r^2} [I_1(\eta_3 r)], t_{s_{56}}(r) = \frac{2\mu}{r} [K_1(\eta_3 r)]' - \frac{2\mu}{r^2} [K_1(\eta_3 r)], \\
 t_{s_{61}}(r) &= -\frac{2\mu}{r} [I_1(\eta_1 r)]' + \frac{2\mu}{r^2} [I_1(\eta_1 r)], t_{s_{62}}(r) = -\frac{2\mu}{r} [K_1(\eta_1 r)]' + \frac{2\mu}{r^2} [K_1(\eta_1 r)], \\
 t_{s_{63}}(r) &= -\frac{2\mu}{r} [I_1(\eta_2 r)]' + \frac{2\mu}{r^2} [I_1(\eta_2 r)], t_{s_{64}}(r) = -\frac{2\mu}{r} [K_1(\eta_2 r)]' + \frac{2\mu}{r^2} [K_1(\eta_2 r)], \\
 t_{s_{65}}(r) &= -\mu [I_1(\eta_3 r)]'' + \frac{\mu}{r} [I_1(\eta_3 r)]' - \frac{\mu}{r^2} [I_1(\eta_3 r)], \\
 t_{s_{66}}(r) &= -\mu [K_1(\eta_3 r)]'' + \frac{\mu}{r} [K_1(\eta_3 r)]' - \frac{\mu}{r^2} [K_1(\eta_3 r)].
 \end{aligned}$$

式中 $K_1(\cdot)$ 和 $I_1(\cdot)$ 分别为第一类和第二类一阶虚宗量贝塞尔函数; $[\]'$ 和 $[\]''$ 分别为对径向 r 的一阶和二阶

求导运算符号。相关系数满足: $a = b = -\frac{(\lambda_c + 2\mu)\eta_1^2 + \rho\omega^2}{\rho_f\omega^2 + \alpha M_s \eta_1^2}$, $c = d = -\frac{(\lambda_c + 2\mu)\eta_2^2 + \rho\omega^2}{\rho_f\omega^2 + \alpha M_s \eta_2^2}$, $e = f =$

$$\frac{\rho_i\omega}{ib_c - m\omega}.$$

第 $N+1$ 圈层的非扰动域 ($r \geq r_N$) 内的土体传递矩阵表达式为:

$$T_{s(N+1)}(r) = \begin{bmatrix} [K_1(\eta_1 r)]' \\ -\frac{1}{r} [K_1(\eta_1 r)] \\ b [K_1(\eta_1 r)]' \\ -\frac{b}{r} [K_1(\eta_1 r)] \\ (\lambda_c + 2\mu + b\alpha M) [K_1(\eta_1 r)]'' + \frac{\lambda_c + b\alpha M}{r} [K_1(\eta_1 r)]' - \frac{\lambda_c + b\alpha M}{r^2} [K_1(\eta_1 r)] \\ -\frac{2\mu}{r} [K_1(\eta_1 r)]' + \frac{2\mu}{r^2} [K_1(\eta_1 r)] \\ [K_1(\eta_2 r)]' \\ -\frac{1}{r} [K_1(\eta_2 r)] \\ d [K_1(\eta_2 r)]' \\ -\frac{d}{r} [K_1(\eta_2 r)] \\ (\lambda_c + 2\mu + d\alpha M) [K_1(\eta_2 r)]'' + \frac{\lambda_c + d\alpha M}{r} [K_1(\eta_2 r)]' - \frac{\lambda_c + d\alpha M}{r^2} [K_1(\eta_2 r)] \\ -\frac{2\mu}{r} [K_1(\eta_2 r)]' + \frac{2\mu}{r^2} [K_1(\eta_2 r)] \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{r}[K_1(\eta_3 r)] \\ & -[K_1(\eta_3 r)]' \\ & \frac{f}{r}[K_1(\eta_3 r)] \\ & -f[K_1(\eta_3 r)]' \\ & \frac{2\mu}{r}[K_1(\eta_3 r)]' - \frac{2\mu}{r^2}[K_1(\eta_3 r)] \\ & -\mu[K_1(\eta_3 r)]'' + \frac{\mu}{r}[K_1(\eta_3 r)]' - \frac{\mu}{r^2}[K_1(\eta_3 r)] \end{aligned} \right\}_{6 \times 3} \tag{A-2}$$

附录 B: 桩身轴向传递矩阵

楔形桩桩身轴向 $T_{pi}(z) = \{T_{pi}^{(1)}(z) \ T_{pi}^{(2)}(z) \ T_{pi}^{(3)}(z) \ T_{pi}^{(4)}(z)\}^T$ 的具体表达式为:

$$T_{pi}^{(1)}(z) = \left\{ \cosh\left(\frac{\alpha_i}{h_i} z\right) \ \sinh\left(\frac{\alpha_i}{h_i} z\right) \ \cos\left(\frac{\beta_i}{h_i} z\right) \ \sin\left(\frac{\beta_i}{h_i} z\right) \right\},$$

$$T_{pi}^{(2)}(z) = \left\{ \begin{aligned} & \left[\Phi_i \frac{\alpha_i}{h_i} + r_i \left(\frac{\alpha_i}{h_i}\right)^3 \right] \sinh\left(\frac{\alpha_i}{h_i} z\right) \\ & \left[\Phi_i \frac{\alpha_i}{h_i} + r_i \left(\frac{\alpha_i}{h_i}\right)^3 \right] \cosh\left(\frac{\alpha_i}{h_i} z\right) \\ & - \left[\Phi_i \frac{\beta_i}{h_i} + r_i \left(\frac{\beta_i}{h_i}\right)^3 \right] \sin\left(\frac{\beta_i}{h_i} z\right) \\ & \left[\Phi_i \frac{\beta_i}{h_i} - r_i \left(\frac{\beta_i}{h_i}\right)^3 \right] \cos\left(\frac{\beta_i}{h_i} z\right) \end{aligned} \right\}^T, \quad T_{pi}^{(3)}(z) = \left\{ \begin{aligned} & \left[\Psi_i \frac{\alpha_i}{h_i} + r_i W_{pi} \left(\frac{\alpha_i}{h_i}\right)^3 \right] \sinh\left(\frac{\alpha_i}{h_i} z\right) \\ & \left[\Psi_i \frac{\alpha_i}{h_i} + r_i W_{pi} \left(\frac{\alpha_i}{h_i}\right)^3 \right] \cosh\left(\frac{\alpha_i}{h_i} z\right) \\ & - \left[\Psi_i \frac{\beta_i}{h_i} - r_i W_{pi} \left(\frac{\beta_i}{h_i}\right)^3 \right] \sin\left(\frac{\beta_i}{h_i} z\right) \\ & \left[\Psi_i \frac{\beta_i}{h_i} - r_i W_{pi} \left(\frac{\beta_i}{h_i}\right)^3 \right] \cos\left(\frac{\beta_i}{h_i} z\right) \end{aligned} \right\}^T,$$

$$T_{pi}^{(4)}(z) = \left\{ \begin{aligned} & -E_{pi} I_{pi} \left[\Phi_i \left(\frac{\alpha_i}{h_i}\right)^2 + r_i \left(\frac{\alpha_i}{h_i}\right)^4 \right] \cosh\left(\frac{\alpha_i}{h_i} z\right) \\ & -E_{pi} I_{pi} \left[\Phi_i \left(\frac{\alpha_i}{h_i}\right)^2 + r_i \left(\frac{\alpha_i}{h_i}\right)^4 \right] \sinh\left(\frac{\alpha_i}{h_i} z\right) \\ & E_{pi} I_{pi} \left[\Phi_i \left(\frac{\beta_i}{h_i}\right)^2 - r_i \left(\frac{\beta_i}{h_i}\right)^4 \right] \cos\left(\frac{\beta_i}{h_i} z\right) \\ & E_{pi} I_{pi} \left[\Phi_i \left(\frac{\beta_i}{h_i}\right)^2 - r_i \left(\frac{\beta_i}{h_i}\right)^4 \right] \sin\left(\frac{\beta_i}{h_i} z\right) \end{aligned} \right\}^T \tag{B-1}$$

式中 $\Phi_i = \frac{R_i E_{pi} I_{pi}}{W_{pi}(W_{pi} - J_{pi})} + \frac{W_{pi}}{(W_{pi} - J_{pi})}$, $r_i = \frac{E_{pi} I_{pi}}{(W_{pi} - J_{pi})}$, $\Psi_i = \frac{R_i E_{pi} I_{pi} + W_{pi} J_{pi}}{W_{pi} - J_{pi}}$ 。