

功率谱二次正交化法在随机地震动响应的应用

葛新广^{1,2}, 龚景海¹, 李创第^{1,3}, 王昌盛⁴

(1. 上海交通大学船舶海洋与建筑工程学院, 上海 200240; 2. 柳州工学院土木建筑学院, 广西 柳州 545616;
3. 广西科技大学土木建筑学院, 广西 柳州 545006; 4. 黄淮学院建筑工程学院, 河南 驻马店 463000)

摘要: 针对平稳激励下线性结构随机地震动响应方差和谱矩时频域法无解析解或时域法解析解复杂的问题, 提出了结构响应功率谱的二次正交化法, 并成功获得线性结构基于李鸿晶随机地震谱的系列响应(结构层位移和层间位移)的 0~2 阶谱矩和方差的简明封闭解。综合虚拟激励法和复模态方法, 提出了线性结构频率响应特征值函数的二次正交法, 即将频率响应特征值函数表示为振动复特征值和频域变量二次方和的线性组合; 以李鸿晶随机地震动谱为例, 基于留数定律获得该谱的二次正交式, 进而获得结构地震动系列响应功率谱的二次正交式; 获得了建筑结构随机地震动系列响应方差及 0~2 阶谱矩的统一简明封闭解。利用本文方法对一单自由度结构和一多自由度 TMD 耗能结构地震动响应进行分析, 并与虚拟激励法进行了对比研究, 结果表明本文所提方法为封闭解且可用于验证虚拟激励法谱矩分析时的精度。此外, 本文方法可适用于各种线性结构基于各类平稳随机地震谱的随机响应封闭解的分析。

关键词: 随机地震动; 简明封闭解; 0~2 阶谱矩; 响应功率谱二次正交法; 留数定律

中图分类号: O324; TU311.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2022)03-0616-09

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2022.03.011

引言

地震是人类生存面临的最主要威胁之一, 其威胁体现在强烈地震对工程结构的严重破坏以及导致的大量人员伤亡和财产损失上。为此, 人们对地震的研究由来已久。随着地震记录资料的不断积累和对地震发生规律研究的逐渐深入, 地震动的随机特性成为工程界的共识^[1-4]。自 Housner^[5]首次提出的白噪声激励模型以来, 各国学者陆续提出了用于模拟地震动随机性的模型, 如 Kanai-Tajimi 谱^[6-7]、Clough-Penzien 谱^[8]、胡聿贤谱^[9]、欧进萍谱^[10]、李鸿晶谱^[11]等。Kanai-Tajimi 谱是首次提出利用基于白噪声的滤波方程来表示复杂的随机地震动激励的模型, 而 Clough-Penzien 谱、胡聿贤谱、欧进萍谱、李鸿晶谱等又是 Kanai-Tajimi 谱的改进模型, 因此地震动随机模型越来越接近实际地震动, 但表达式越来越复杂。李鸿晶谱对 Kanai-Tajimi 谱中的基岩低频和高频范围同时进行修正, 提出了适用性更强的随机地震动模型, 但该模型表达式复杂, 滤波方程含有频域项, 传统方法分析结构地震动响应时结果均较

为复杂。目前, 鲜有关于李鸿晶谱的工程应用文献。

结构的随机振动分析方法分为时域法^[12-14]和频域法^[15-18]。在时域法中, 结构响应协方差与激励协方差存在二重积分的关系。因此, 时域法应用的前提是随机激励要有协方差表达式, 且表达式越简单越容易获得简明的响应解。李创第等^[19-20]基于复模态方法研究了结构基于 Kanai-Tajimi 谱或 Clough-Penzien 谱的地震动响应, 但仅获得方差且表达式比较复杂。在频域法中, 结构响应的功率谱与激励的功率谱存在简明的代数关系, 而所有的随机激励都是具有功率谱表达式的, 因此, 该方法应用较为广泛。矩阵直接谱法^[16]、虚拟激励法^[15,21]和传递函数法^[17-18]都是频域法中的典型方法。李春祥等^[22]利用传递函数法研究了 MTMD 结构基于 Kanai-Tajimi 谱或 Clough-Penzien 谱的地震动响应特征, 但结构地震动响应方差分析采用的方法为数值计算。频域法中结构响应的 0 阶谱矩等于其方差, 2 阶谱矩等于响应变化率的方差, 1 阶谱矩则是基于首超破坏和 Markov 过程假设进行可靠度分析的重要参数^[12,23-25]。然而, 无论哪种频域法在获得结构响应功率谱密度函数之后, 都需要数值求解获得结构响应

收稿日期: 2020-09-03; **修订日期:** 2020-12-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51468005); 广西科技大学创新团队支持计划项目(校发[2016]31号); 广西高校中青年教师基础能力提升项目(KY2016YB843); 河南省科技攻关项目(212102310976); 河南省高等学校重点科研项目计划支持(22B560008)。

的谱矩和方差,计算工作量会随着振动系统的增大而成倍增加。

本文的主要工作有:首先,利用留数原理,给出了李鸿晶谱等效的二次正交式,利用复模态法将结构的二阶地震动方程解耦为一阶系统的线性组合;其次,利用一阶系统的虚拟激励法建立线性结构系列地震动响应(相对于地面位移及速度、层间相对位移及其变化率)的频响函数的二次正交式,进而获得结构系列响应功率谱的二次正交式;最后,基于谱矩的定义及随机振动理论,获得了结构地震动系列响应方差和0阶、1阶和2阶谱矩的简明封闭解。

1 线性结构地震动系列响应频域解的统一表达式

1.1 线性结构广义复模态变量的频域解

对于 n 层的多、高层线型结构,在地震随机激励下的动力方程:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = M\ddot{x}_g(t) \quad (1)$$

式中 M 、 C 和 K 分别为结构体系的质量、刚度和阻尼矩阵,元素均为常数; x 、 \dot{x} 和 \ddot{x} 分别为结构层相对于地面的位移、速度和加速度向量; I 为 $n \times 1$ 阶常矩阵,用来定位地震动激励; $\ddot{x}_g(t)$ 为地震动随机激励。

目前工程上常用的平稳地震动随机激励模型有 Kanai-Tajimi 谱^[6-7]、Clough-Penzien 谱^[8]、胡聿贤谱^[9]、欧进萍谱^[10]、李鸿晶谱^[11]等,它们的功率谱均以有理式的形式表示。其中,李鸿晶谱是一种同时考虑基岩扰动低频和低频,较为准确的随机地震动激励谱,其表达式为^[11]:

$$S_{\ddot{x}_g}(\omega) = \frac{(\omega/\omega_l)^4}{\left[1 - (\omega/\omega_h)^2\right]^4 + (\omega/\omega_l)^4} \cdot \frac{\omega_g^4 + 4\xi_g^2\omega_g^2\omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_g^2\omega_g^2\omega^2} S_0 \quad (2)$$

式中 ω_l 和 ω_h 分别为控制基岩扰动低频和高频成分的参数; ω_g 和 ξ_g 分别为场地基岩上土层的特征频率和阻尼比; S_0 为基岩扰动白噪声的强度。

由式(2)可知,该表达式极其复杂,且该功率谱的滤波方程为非线性的,用时域法无法求解。若采用频域法,结构地震动响应的谱矩为含有式(2)的积分,只能用数值积分,故存在计算效率和精度的问题。为了获得结构地震动响应的简明封闭解,本文基于留数定律^[26]提出了李鸿晶谱的等效二次正交式:

$$S_{\ddot{x}_g}(\omega) = S_0 \sum_{i=1}^4 \sum_{m=1}^2 \left(\frac{d_{l,i}}{\omega^2 + \omega_{l,i}^2} \frac{d_{g,m}}{\omega^2 + \omega_{g,m}^2} \right) \quad (3)$$

式中

$$\omega_{l,1}^2 = -\frac{(2\omega_l\alpha - i) + \sqrt{\Delta_1}}{2\alpha^2}, \omega_{l,2}^2 = -\frac{(2\omega_l\alpha - i) - \sqrt{\Delta_1}}{2\alpha^2},$$

$$\omega_{l,3}^2 = -\frac{(2\omega_l\alpha + i) + \sqrt{\Delta_2}}{2\alpha^2}, \omega_{l,4}^2 = -\frac{(2\omega_l\alpha + i) - \sqrt{\Delta_2}}{2\alpha^2}$$

$$d_{l,j} = \frac{\omega_{l,j}^4}{(\omega_{l,j}^2 - \omega_{l,p}^2)(\omega_{l,j}^2 - \omega_{l,k}^2)(\omega_{l,j}^2 - \omega_{l,i}^2)\alpha^4}, (j, p, k, i = 1, 2, 3, 4 \text{ 且 } j \neq p \neq k \neq m), \Delta_1 = -1 - 4\omega_l\alpha i, \Delta_2 = -1 + 4\omega_l\alpha i, \text{ 其中, } \alpha = \omega_l/\omega_h^2;$$

$$\omega_{g,1}^2 = (1 - 2\xi_g^2)\omega_g^2 - 2\omega_g^2\xi_g\sqrt{(\xi_g^2 - 1)},$$

$$\omega_{g,2}^2 = (1 - 2\xi_g^2)\omega_g^2 + 2\omega_g^2\xi_g\sqrt{(\xi_g^2 - 1)},$$

$$d_{g,k} = \frac{\omega_g^4 - 4\xi_g^2\omega_g^2\omega_{g,j}^2}{\omega_{g,k}^2 - \omega_{g,j}^2}, j \neq k.$$

基于随机激励下的结构动力响应主要是时域法和频域法,时域法应用的前提是激励要有协方差,而被工程界认可的地震动激励模型都是以功率谱形式提出,时域法应用时所得解均比较复杂;频域法应用时易于获得结构动力响应的功率谱,但响应的方差和谱矩的计算为数值法。为此,本文提出了结构频响函数的二次正交法。为获得结构频响函数的二次正交形式,引入状态变量:

$$y = \{x \quad \dot{x}\}^T \quad (4)$$

则式(1)改写为:

$$M_0\dot{y} + K_0y = A\ddot{x}_g \quad (5)$$

式中

$$M_0 = \begin{bmatrix} C & M \\ C & o_2 \end{bmatrix}, K_0 = \begin{bmatrix} K & o_2 \\ o_2 & -C \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} I \\ o_1 \end{bmatrix}.$$

式中 o_1 为元素为0的 $n \times 1$ 阶向量; o_2 为元素为0的 $n \times n$ 阶方阵。

由复模态法理论^[12,20],式(5)存在右、左特性向量矩阵 U 、 V 和特征值矩阵 P ,并满足:

$$P = \frac{V^T K_0 U}{V^T M_0 U} \quad (6)$$

式中 特征值矩阵 P 为对角阵; U 和 V 分别为式(5)的右、左特性向量矩阵。

引入复模态变量:

$$y = UZ \quad (7)$$

式中 Z 为广义变量。

把式(5)代入式(6)并利用复模态理论^[12,20],式(5)变为:

$$\dot{Z} + PZ = \gamma\ddot{x}_g \quad (8)$$

式中 γ 为复模态振型强度系数向量,其表示为:

$$\gamma = \frac{V^T A}{V^T M_0 U} \quad (9)$$

式(8)的分量形式为:

$$\dot{z}_j + p_j z_j = \gamma_j \ddot{x}_g \quad (j = 1, 2, \dots, 2n) \quad (10)$$

式中 z_j, γ_j 和 p_j 分别为 Z, γ 和 P 的分量。

由虚拟激励法^[15,21],式(10)的频域解为:

$$\bar{z}_j(\omega) = \frac{\gamma_j}{p_j + i\omega} \sqrt{S_{\ddot{x}_g}(\omega)} e^{i\omega t} \quad (11)$$

式中 $i = \sqrt{-1}$, $S_{\ddot{x}_g}(\omega)$ 为地震加速度 $\ddot{x}_g(t)$ 的功率谱密度函数。

1.2 结构地震动系列响应频域解的统一表达式

结构层相对于地面的地震动位移和层间地震动变形是工程结构抗震设计的关键参数;而结构层相对于地面的地震动位移变化率方差和层间地震动位移变化率方差是结构抗震动力可靠度分析的基础。本文研究了上述地震动系列响应的统一解表达式。

由式(4)及(7),结构体系的位移频域解 $\bar{x}_j(\omega)$ 和速度频域解 $\bar{\dot{x}}_j(\omega)$:

$$\bar{x}_j(\omega) = \sum_{k=1}^{2n} u_{j,k} \bar{z}_k(\omega) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (12a)$$

$$\bar{\dot{x}}_j(\omega) = \sum_{k=1}^{2n} u_{j+n,k} \bar{z}_k(\omega) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (12b)$$

式中 $u_{j,k}$ 为右特征向量矩阵 U 的第 j 行第 k 列元素。

同理,结构的层间位移 $\Delta \bar{x}_j(\omega)$ 及层间位移变化率 $\Delta \bar{\dot{x}}_j(\omega)$ 的频域解:

$$\Delta \bar{x}_j(\omega) = \bar{x}_j(\omega) - \bar{x}_{j-1}(\omega) = \sum_{k=1}^{2n} (u_{j+1,k} - u_{j,k}) \bar{z}_k(\omega) \quad (13a)$$

$$\Delta \bar{\dot{x}}_j(\omega) = \bar{\dot{x}}_j(\omega) - \bar{\dot{x}}_{j-1}(\omega) = \sum_{k=1}^{2n} (u_{j+1+n,k} - u_{j+n,k}) \bar{z}_k(\omega) \quad (13b)$$

$$\Delta \bar{x}_1(\omega) = \bar{x}_1(\omega); \Delta \bar{\dot{x}}_1(\omega) = \bar{\dot{x}}_1(\omega) \quad (13c)$$

至此,结构各层位移及其变化率,层间变形及其变化率频域解可统一表示为:

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^{2n} \kappa_k \bar{z}_k(\omega) \quad (14)$$

式中 $X(t)$ 表示地震动响应。 κ_k 表示响应量对应的模态系数,对于结构第 j 层位移, $\kappa_k = u_{j,k}$; 对于结构第 j 层速度 $\kappa_k = u_{j+n,k}$; 对于结构第 $j(j > 1)$ 层层间位移, $\kappa_k = u_{j,k} - u_{j-1,k}$; 对于结构第 $j(j > 1)$ 层层间位移变化率, $\kappa_k = u_{j+1+n,k} - u_{j+n,k}$ 。

2 结构响应功率谱的二次正交化

2.1 结构频率响应特征值函数的二次正交化

由虚拟激励法及式(14),结构响应 X 的功率

谱为^[15,21]:

$$S_X(\omega) = \sum_{k=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} \kappa_k \kappa_j \bar{z}_k(\omega) \bar{z}_j^*(\omega) \quad (15)$$

式中 $\bar{z}_j^*(\omega)$ 为 $\bar{z}_j(\omega)$ 的复共轭项。

把式(11)代入式(15):

$$S_X(\omega) = \sum_{k=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} \kappa_k \frac{\gamma_k}{p_k + i\omega} \sqrt{S_{\ddot{x}_g}(\omega)} e^{i\omega t} \cdot \kappa_j \frac{\gamma_j}{p_j - i\omega} \sqrt{S_{\ddot{x}_g}(\omega)} e^{-i\omega t} \quad (16)$$

对式(16)进行简化:

$$S_X(\omega) = S_{\ddot{x}_g}(\omega) G_X(\omega) \quad (17)$$

式中

$$G_X(\omega) = \sum_{k=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} \eta_k \eta_j \frac{1}{p_k + i\omega} \frac{1}{p_j - i\omega} \quad (18)$$

式中 $\eta_k = \kappa_k \gamma_k$ 。

由式(18)可知, $G_X(\omega)$ 与地震动激励无关,而仅与结构的振动特征值和要分析的具体响应量有关,它相当于传递函数法中的频响函数模值的平方,为区别于传统方法,称之为结构频率响应特征值函数。对 $G_X(\omega)$ 做如下等价变化:

$$G_X(\omega) = \sum_{j=1}^{2n} \eta_j^2 \frac{1}{p_j + i\omega} \frac{1}{p_j - i\omega} \omega + \sum_{k=1}^{2n-1} \sum_{j=k+1}^{2n} \eta_k \cdot \eta_j \left(\frac{1}{p_k + i\omega} \frac{1}{p_j - i\omega} + \frac{1}{p_j + i\omega} \frac{1}{p_k - i\omega} \right) \quad (19)$$

式(19)进一步简化(简化过程见附录1)为:

$$G_X(\omega) = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\eta_j^2}{p_j^2 + \omega^2} + 2 \sum_{k=1}^{2n-1} \sum_{j=k+1}^{2n} \frac{\eta_k \eta_j}{p_k + p_j} \left(\frac{p_j}{p_j^2 + \omega^2} + \frac{p_k}{p_k^2 + \omega^2} \right) \quad (20)$$

从式(20)可知,结构频率响应特征值函数 $G_X(\omega)$ 表示成结构体系的振动复特征值 p_i 的平方与频域变量 ω 平方和的倒数的线性组合,即结构的频响函数 $H_X(\omega)$ 的二次正交化。结构频率响应特征值函数的二次正交式,表达式简洁明了,为后文获得结构响应 0~2 阶谱矩的简明封闭解奠定基础。

2.2 响应功率谱密度函数的二次正交化

由式(3),(17)及(20),则结构地震动响应的功率谱可表示为(具体过程见附录2):

$$S_X(\omega) = S_0 \sum_{j=1}^{2n} \eta_j^2 A_j(\omega) + 2S_0 \sum_{j=1}^{2n-1} \sum_{k=j+1}^{2n} \frac{\eta_k \eta_j}{p_k + p_j} [p_j A_j(\omega) + p_k A_k(\omega)] \quad (21)$$

式中

$$A_j(\omega) = \sum_{m=1}^2 \sum_{i=1}^4 d_{l,i} d_{g,m} \frac{1}{\omega^2 + \omega_{l,i}^2} \cdot \frac{1}{\omega^2 + \omega_{g,m}^2} \frac{1}{p_j^2 + \omega^2} \quad (22)$$

由式(21)及(22)可知,结构地震动响应功率谱密度函数转化为地震卓越频率与结构频响函数的简明关系,为后文结构响应方差和0~2谱矩的分析奠定了基础。

3 响应0~2阶谱矩及方差的封闭解

由谱矩定义^[12],地震动响应的 q 阶谱矩 $\alpha_{X,q}$:

$$\alpha_{X,q} = 2 \int_0^\infty \omega^q S_X(\omega) d\omega, \quad q = 0, 1, 2 \quad (23)$$

3.1 响应的0阶谱矩及1阶谱矩简明封闭解

把式(21)代入式(23),则结构响应的谱矩为:

$$\alpha_{X,q} = 2S_0 \left[\sum_{j=1}^{2n} \eta_j^2 T_j^q + 2 \sum_{j=1}^{2n-1} \sum_{k=j+1}^{2n} \frac{\eta_k \eta_j}{p_k + p_j} (p_j T_j^q + p_k T_k^q) \right] \quad (24)$$

式中

$$T_j^q = \int_0^\infty \omega^q A_j(\omega) d\omega \quad (25)$$

把 $q=0$ 及 $q=1$ 分别代入式(25)中,可获得 T_j^0 和 T_j^1 的值(具体见附录3):

$$T_j^0 = \sum_{m=1}^2 \sum_{i=1}^4 d_{l,i} d_{g,m} \frac{\pi}{2(\omega_{l,i}^2 - \omega_{g,m}^2)} \left[\frac{1}{\omega_{g,m}^2 - p_j^2} \cdot \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{\omega_{g,m}} \right) - \frac{1}{\omega_{l,i}^2 - p_j^2} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{\omega_{l,i}} \right) \right] \quad (26a)$$

$$T_j^1 = \sum_{m=1}^2 \sum_{i=1}^4 \frac{d_{l,i} d_{g,m}}{2(\omega_{g,m}^2 - \omega_{l,i}^2)} \left[\frac{1}{\omega_{l,i}^2 - p_j^2} \cdot (\ln \omega_{l,i}^2 - \ln p_j^2) - \frac{1}{\omega_{g,m}^2 - p_j^2} (\ln \omega_{g,m}^2 - \ln p_j^2) \right] \quad (26b)$$

由式(24)和(26a)可获得结构响应的0阶谱矩;由式(24)和(26b)可获得结构响应的1阶谱矩。

3.2 地震动响应的2阶谱矩封闭解

由随机振动理论^[12],平稳地震动响应变化率的0阶谱矩等于其平稳响应的2阶谱矩。因此,结构响应的2阶谱矩可由对于响应量的变化率的0阶谱矩表示:

$$\alpha_{X,2} = \alpha_{\dot{X},0} \quad (27)$$

式中 $\dot{X} = \frac{dX}{dt}$ 。

由式(24)和(27)可知,结构响应的2阶谱矩均具有封闭解,且表达式简洁明了。

3.3 地震动响应的方差的封闭解

由随机振动理论^[12],结构响应方差等于其0阶谱矩,结构响应变化率的方差等于其2阶谱矩:

$$\sigma_X^2 = \alpha_{X,0}; \quad \sigma_{\dot{X}}^2 = \alpha_{X,2} \quad (28)$$

由式(24),(27)和(28)可知,本文获得了结构位移响应及其变化率的方差。

4 数值算例

4.1 算例1

单自由度质量为1,结构的自振圆频率 $\omega_0=5$ rad/s,结构的阻尼比 $\xi_0=0.05$ 。李鸿晶功率谱参数为文献[11]中表3的广元石井观测站拟合值: $S_0=1.147 \text{ cm}^2/\text{s}^3$, $\xi_k=0.5$, $\omega_g=9.414$ rad/s, $\omega_l=3.404$ rad/s, $\omega_h=8.955$ rad/s。

传统方法的质点位移响应功率谱 $S_x(\omega)$ 和速度响应功率谱 $S_{\dot{x}}(\omega)$ 分别为:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_0^2 \omega_0^2 \omega^2} S_{\dot{x}}(\omega) \quad (29a)$$

$$S_{\dot{x}}(\omega) = \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_0^2 \omega_0^2 \omega^2} S_{\ddot{x}}(\omega) \quad (29b)$$

本文方法获得的质点位移、速度响应功率谱密度函数为式(21),式中 p_j 依据式(6)按照复模态方法获得, κ_j 依据式(14)获得。其中,式(5)的参数如下:

$$M_0 = \begin{bmatrix} 2\xi_0 \omega_0 & 1 \\ 2\xi_0 \omega_0 & 0 \end{bmatrix}, K_0 = \begin{bmatrix} \omega_0^2 & 0 \\ 0 & -2\xi_0 \omega_0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}。$$

图1和2分别为传统方法和本文方法的位移响应功率谱和速度响应功率谱的对比图(图上横坐标间距为0.25 rad/s)。从图中可知,本文方法与传统虚拟激励法完全一致,说明本文所获得的李鸿晶谱等效形式、结构频率响应特征值函数二次正交式和结构响应功率谱的二次正交式的正确性。

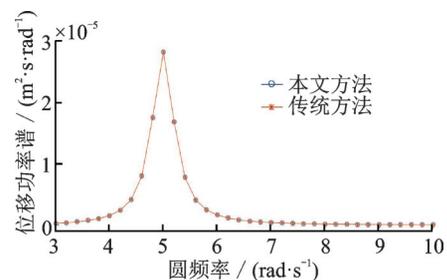


图1 位移功率谱对比图

Fig. 1 Comparison diagram of PSDF of displacement

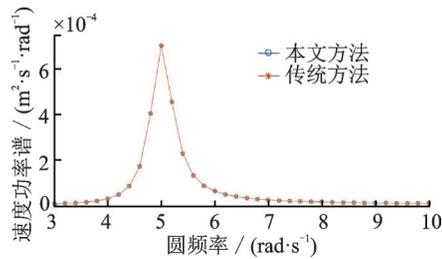


图2 速度功率谱对比图

Fig. 2 Comparison diagram of PSDF of velocity

4.2 算例2

对10层钢筋混凝土一榀框架进行地震动响应分析,结构参数为:柱子截面取 $600 \times 600 \text{ mm}^2$,材料弹性模量 E 为 $3.0 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$,框架跨度为6 m,各层层高为4.2 m,结构阻尼比为0.05,考虑结构自重及荷载等效质量为45 t/层;按刚性楼板假定,结构层间抗侧刚度 $k=24EI/h^3$,式中, I 为柱截面的惯性矩, h 为层高;结构的基本频率为7.08 rad/s。顶层设置TMD阻尼器,质量为12.4 t,抗侧刚度为 $6.5 \times 10^5 \text{ N/m}$,阻尼比0.15,TMD的自振频率为7.24 rad/s。李鸿晶功率谱参数与算例1相同。

顶层设置TMD的建筑结构可看作在顶层增加一层的结构,采用与传统结构形式一致的运动方程,只是结构部分的阻尼采用瑞利阻尼。

4.2.1 本文方法的正确性验证

为验证本文所获得的结构地震动系列响应0~2阶谱矩及加速度方差的正确性,与虚拟激励法进行对比分析。由于虚拟激励法(PEM)分析结构响应谱矩和方差时受积分步长和积分区间的影响较大,积分区间上限暂定200 rad/s,积分步长取3种,具体如图3~8所示。由图可知,随着积分步长的减少,虚拟激励法所得谱矩与本文方法越来越接近,说明本文方法的正确性。同时说明,虚拟激励法在分析随机响应谱矩时积分步长的选择对于分析精度至关重要。

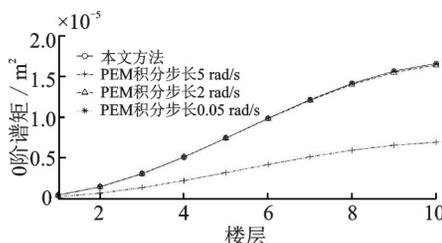


图3 位移0阶谱矩对比图

Fig. 3 Comparison diagram of 0-order spectral moment of displacement

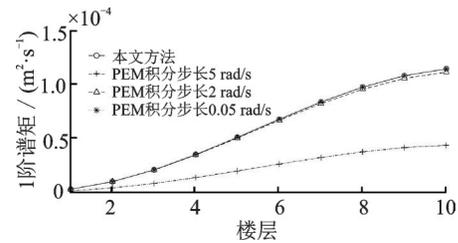


图4 位移1阶谱矩对比图

Fig. 4 Comparison diagram of 1st order spectral moment of displacement

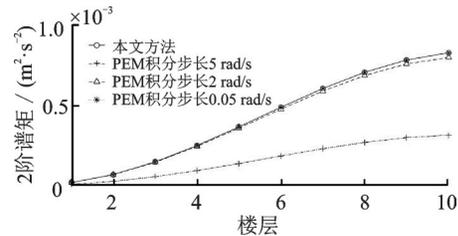


图5 位移2阶谱矩对比图

Fig. 5 Comparison diagram of 2nd order spectral moment of displacement

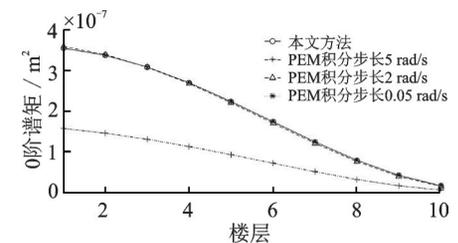


图6 层间位移0阶谱矩对比图

Fig. 6 Comparison diagram 0-order spectral moment of interlayer displacement

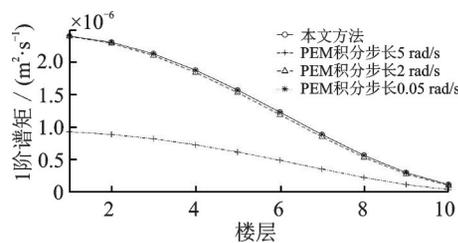


图7 层间位移1阶谱矩对比图

Fig. 7 Comparison diagram of 1st order spectral moment of interlayer displacement

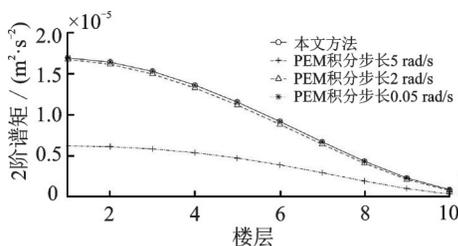


图8 层间位移2阶谱矩对比图

Fig. 8 Comparison diagram of 2nd order spectral moment of interlayer displacement

4.2.2 虚拟激励法(PEM)积分区间对其精度的影响分析

由“4.2.1节”可知,本文方法所获得谱矩为封闭解,且可用来验证虚拟激励法的精度。而目前文献对于虚拟激励法的积分区间没有明确的规定,为此,本文对其合理的积分区间进行了研究。“4.2.1节”研究表明积分步长取 0.05 rad/s 时虚拟激励法基本与本文方法重合,为此,取积分区间上限分别为 7.5, 15 和 30 rad/s,取积分步长 0.05 rad/s 进行分析,如图 9~14 所示。

由图 9~14 可知,积分区间 $[0, 7.5]$ rad/s 的虚拟激励法的误差较大;当积分区间为 $[0, 15]$ rad/s 时,位移和层间位移的 0 阶和 1 阶谱矩接近精确解(本文方法),而对应的二阶谱矩误差存在一定的偏差;当积分区间为 $[0, 30]$ rad/s 时,响应的 0~2 阶谱矩均与本文方法重合。因此,对于虚拟激励法在分析谱矩时,需要试算积分区间才能保证计算精度。因此,本文方法可用于校核虚拟激励法的分析精度。

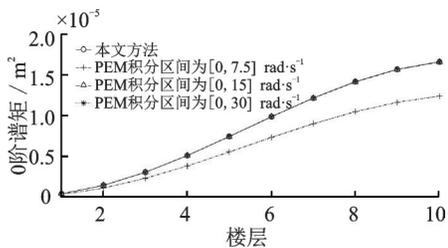


图 9 PEM 分析位移 0 阶谱矩与积分区间关系

Fig. 9 Relationship between 0-order spectral moment of displacement and integrating range analyzed by PEM

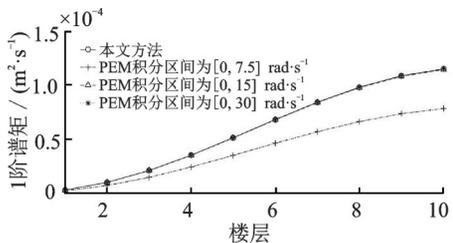


图 10 PEM 分析位移 1 阶谱矩与积分区间关系

Fig. 10 Relationship between 1st order spectral moment of displacement and integrating range analyzed by PEM

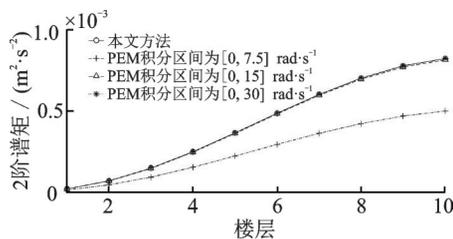


图 11 PEM 分析位移 2 阶谱矩与积分区间关系

Fig. 11 Relationship between 2nd order spectral moment of displacement and integrating range analyzed by PEM

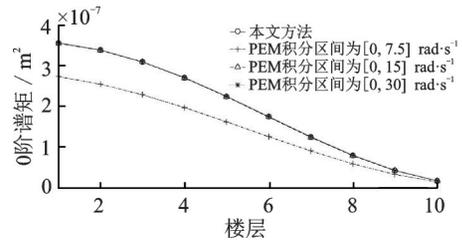


图 12 PEM 分析层间位移 0 阶谱矩与积分区间关系

Fig. 12 Relationship between 0-order spectral moment of interlayer displacement and integrating range analyzed by PEM

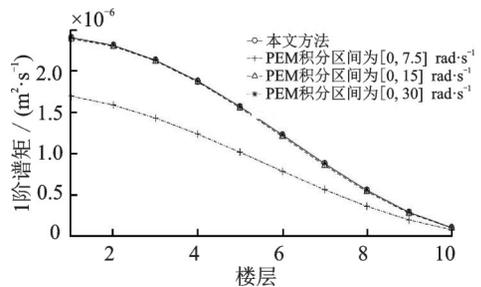


图 13 PEM 分析层间位移 1 阶谱矩与积分区间关系

Fig. 13 Relationship between 1st order spectral moment of interlayer displacement and integrating range analyzed by PEM

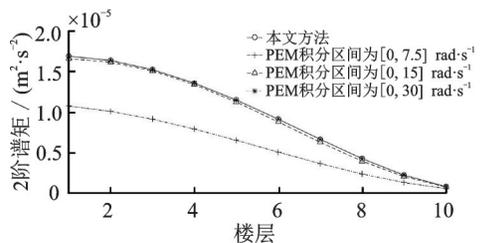


图 14 PEM 分析层间位移 2 阶谱矩与积分区间关系

Fig. 14 Relationship between 2nd order spectral moment of interlayer displacement and integrating range analyzed by PEM

5 结 论

针对既有方法分析平稳激励下线性结构随机地震动响应方差和 0~2 阶谱矩频域法无解析解或时域法解析解复杂的问题,本文提出了结构响应功率谱密度函数的二次正交化法,并成功获得线性结构基于李鸿晶地震动功率谱的 0~2 阶谱矩和方差的简明封闭解,主要结论如下:

(1) 利用复模态方法对线性结构地震动方程进行解耦,将结构的地震动化为一阶微分方程组的线性组合;利用一阶微分方程的虚拟激励法,获得了结构响应的频域解,并获得了结构层位移和速度,结构层相对位移及其变化率的统一形式的简明频域解;最后给出了结构频率响应特征值函数的二次正交式。

(2)基于留数定理给出了李鸿晶功率谱的二次正交式,本方法同样适用于其他平稳功率谱的二次正交化。

(3)在获得结构系列响应的频率响应特征值函数二次正交式和地震动激励二次正交式的基础上,进而获得了结构系列响应功率谱密度函数的二次正交式,为获得结构系列响应的0~2阶谱矩和方差的简明封闭解奠定基础。

(4)通过一单自由度和一多自由度TMD结构对比分析了本分方法和传统虚拟激励法,研究表明本文方法所获得系列响应功率谱密度函数和0~2阶谱矩的封闭解的正确性。本文方法可用来验证虚拟激励法积分步长和积分间距对于结构响应谱矩和方差的精度。

(5)由于本文获得了结构动力响应的0~2阶谱矩和方差的简明封闭解,可为结构动力可靠度分析提供新思路。

参考文献:

- [1] 欧进平,王光远. 结构随机振动[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
Ou Jinping, Wang Guangyuan. Random Vibration of Structures[M]. Beijing: Higher Education Press, 2003.
- [2] 胡聿贤. 地震工程学[M]. 2版. 北京: 地震出版社, 2006.
HU Yuxian. Seismic Engineering [M]. 2nd Edition. Beijing: Seismological Press, 2006.
- [3] Grigorin M, Soong T T. Random Vibration Mechanical and Structural Systems[M]. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1993.
- [4] 俞瑞芳, 曲国岩, 张冬锋. 空间相关多点非平稳地震动合成及其对大跨结构响应的影响[J]. 振动工程学报, 2020, 33(5): 1013-1023.
YU Ruifang, QU Guoyan, ZHANG Dongfeng. Simulation of spatially correlated multipoint non-stationary ground motion and its influence on the response of long-span structures [J]. Journal of Vibration Engineering, 2020, 33(5): 1013-1023.
- [5] Housner G W. Characteristics of strong motion earthquakes[J]. BSSA, 1947, 37(1): 19-31.
- [6] Kanai K. An empirical formula for the spectrum of strong earthquake motions[J]. Bulletin of Earthquake Research Institute, University of Tokyo, 1961, 39(1): 86-95.
- [7] Tajimi H. A statistical method of determining the maximum response of a building structure during an earthquake[C]. Proc. Second World Conf. on Earthq. Eng., Tokyo, 1960: 781-797.
- [8] Clough R W, Penzien J. Dynamics of Structures [M]. 2nd Edition. New York: McGraw Hill, 1993: 1-55.
- [9] 金家合, 胡聿贤, 周锡元. 关于“弹性体系在平稳和稳定化地面运动下的反应”一文中的探讨[R]. 北京: 科学出版社, 1965.
Jin Jiahe, Hu Yuxian, Zhou Xiyuan. Discussion on the "response of elastic systems to smooth and steady ground motion" [R]. Beijing: Science Press, 1965.
- [10] 欧进萍, 牛荻涛, 杜修力. 设计用随机地震动的模型及其参数确定[J]. 地震工程与工程振动, 1991, 11(3): 45-54.
Ou Jinping, Niu Ditao, Du Xiuli. Random earthquake ground motion model and its parameters determination used in aseismic design[J]. Seismic Engineering and Engineering Vibration, 1991, 11(3): 45-54.
- [11] 李鸿晶, 陈辰. 一种平稳地震地面运动的改进金井清谱模型[J]. 工程力学, 2014, 31(2): 158-163.
Li Hongjing, Chen Chen. A modified Kainai-Tajimi spectral model for the stationary earthquake induced ground motion process [J]. Engineering Mechanics, 2014, 31(2): 158-163.
- [12] 方同. 工程随机振动[M]. 北京: 国防工业出版社, 1995.
Fang Tong. Engineering Random Vibration [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1995.
- [13] 李创第, 李墩, 葛新广, 等. 一般线性粘弹性阻尼器耗能结构瞬态响应的非正交振型叠加精确解[J]. 工程力学, 2015, 32(11): 140-149.
Li Chuangdi, Li Tun, Ge Xinguang, et al. Exact non-orthogonal modal superposition solutions of transient response of MDOF dissipation structures with general linear viscoelastic dampers [J]. Engineering Mechanics, 2015, 32(11): 140-149.
- [14] 邹万杰, 马金凤, 李创第, 等. 一般粘弹性阻尼减震结构的随机响应分析[J]. 广西大学学报(自然科学版), 2018, 43(5): 1885-1894.
Zou Wanjie, Ma Jinfeng, Li Chuangdi, et al. Random response analysis of general viscoelastic damping structures [J]. Journal of Guangxi University (Natural Science Edition), 2018, 43(5): 1885-1894.
- [15] 林家浩, 张亚辉, 赵岩. 虚拟激励法在国内外工程界的应用回顾与展望[J]. 应用数学和力学, 2017, 38(1): 1-32.
Lin Jiahao, Zhang Yahui, Zhao Yan. The pseudo-excitation method and its industrial applications in China and abroad[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2017, 38(1): 1-32.
- [16] 郑兆昌. 随机振动矩阵直接谱分析法[C]. 第二十三届全国振动与噪声控制学术会议, 沈阳, 2010: 3-24.
Zheng Zhaochang. Direct spectral analysis of random vibration matrix [C]. The 23rd National Conference on Vibration and Noise Control, Shenyang, 2010: 3-24.
- [17] 邹万杰, 马媛, 李创第, 等. 带支撑 Maxwell 阻尼器多层隔震结构的随机地震响应分析[J]. 振动与冲击, 2017, 36(21): 213-219.
Zou Wanjie, Ma Yuan, Li Chuangdi, et al. Random seismic responses of multi-layer vibration isolation structures

- mounted with supporter Maxwell dampers[J]. Journal of Vibration and Shock, 2017, 36(21): 213-219.
- [18] 李创第,丁昊,葛新广.基于传递函数法的单自由粘弹性减震整体系统随机响应分析[J].广西科技大学学报,2017,28(3):16-25.
- Li Chuangdi, Ding Hao, Ge Xinguang. Random response analysis of SDOF systems with viscoelastic damping by using transfer functions method[J]. Journal of Guangxi University of Science and Technology, 2017, 28(3): 16-25.
- [19] 李创第,丁晓华,陈俊忠,等.基础隔震结构基于Clough-Penzien谱随机地震响应分析的复模态法[J].振动与冲击,2006,25(5):162-165.
- Li Chuangdi, Ding Xiaohua, Chen Junzhong, et al. Complex modal method for analysis of random earthquake response of structures with base isolation on the basis of Clough-Penzien spectrum[J]. Journal of Vibration and Shock, 2006, 25(5): 162-165.
- [20] 李创第,黄天立,李曦,等.基础隔震结构随机地震响应的复模态法[J].地震工程与工程振动,2002,22(6):122-128.
- Li Chuangdi, Huang Tianli, Li Tun, et al. Complex mode method for analysis of random earthquake response structures with base isolation[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2002, 22(6): 122-128.
- [21] 李慧,刘迪,杜永峰,等.基于虚拟激励法的框架-摇摆刚架结构体系的动力可靠度研究[J].振动与冲击,2013,32(23):170-174.
- Li Hui, Liu Di, Du Yongfeng, et al. Dynamic reliability of a RC frame with rocking of moment frames based on pseudo excitation method[J]. Journal of Vibration and Shock, 2013, 32(23): 170-174.
- [22] 李春祥,熊学玉.基于Kanai-Tajimi/Clough-Penzien模型时MTMD的动力特性[J].振动与冲击,2002,21(4):39-43.
- Li Chunxiang, Xiong Xueyu. Dynamic characteristics of MTMD based on Kanai-Tajimi/Clough-Penzien models[J]. Journal of Vibration and Shock, 2002, 21(4): 39-43.
- [23] Barbato Michele, Conte Joel P. Time-variant reliability analysis of linear elastic systems subjected to fully non-stationary stochastic excitations[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2015, 141(6): 04014173.
- [24] Crandall S H. First-crossing probabilities of the linear oscillator[J]. Journal of Sound and Vibration, 1970, 12(3): 285-299.
- [25] 曹宏,李桂青,李秋胜.结构动力可靠性理论及其应用[M].北京:地震出版社,1993:123-179.
- CAO Hong, Li Guiqing, Li Qiusheng. Structural Dynamic Reliability Theory and Its Application[M]. Beijing: Seismological Press, 1993: 123-179.
- [26] 周羚君,韩静,狄艳梅.复变函数与积分变换[M].上海:同济大学出版社,2017.
- Zhou Lingjun, Han Jing, Di Yanmei. Complex Function and Integral Transformation [M]. Shanghai: Tongji University Press, 2017.

Application of quadratic orthogonalization method of response power spectrum to random ground motion response

GE Xin-guang^{1,2}, GONG Jing-hai¹, LI Chuang-di^{1,3}, WANG Chang-sheng⁴

(1.School of Naval Architecture, Ocean & Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China;

2. College of Civil and Architectural Engineering, Liuzhou Institute of Technology, Liuzhou 545616, China;

3.School of Civil Engineering & Architecture, Guangxi University of Science and Technology, Liuzhou 545006, China;

4.School of Architectural Engineering, Huanghuai University, Zhumadian 463000, China)

Abstract: In order to solve the problem that the frequency domain method has no analytical solution or the time domain method has complex analytical solution for the variance and spectral moment response of linear structures under stationary excitation, the quadratic orthogonalization method of power spectral density function(RPSDF) of response is proposed innovatively, and the concise closed solution of 0~2 order spectral moment and square difference of linear structures are obtained successfully. A quadratic orthogonal method for the eigenvalue function of frequency response of linear structures is proposed by combining the pseudo excitation method and the complex mode method. The eigenvalue function of frequency response of the structure is expressed as a linear combination of the complex eigenvalues of the structure vibration and the quadratic sum of the frequency domain variables. The quadratic orthogonal form of the spectrum is obtained based on the residue law for Li Hongjing's random ground motion spectrum. The unified and concise closed form solutions of the variance and 0~2 spectral moment of the series response of building structures are obtained. The seismic responses of a single degree of freedom (SDOF) structure and a multi degrees of freedom (MDOF) energy dissipation structure with TMD are analyzed by using the proposed method. The results show that the proposed method is correct and efficient. In addition, this method can be applied to the analysis of closed solutions of random responses of linear structures based on all kinds of stationary random seismic spectra.

Key words: stochastic ground vibration; concise closed-form solution; 0~2 order spectral moments; quadratic orthogonalization of

PSDF of response; residue law

作者简介: 葛新广(1977-), 男, 博士, 讲师。E-mail: gxgzlr.2008@163.com。

通讯作者: 李创第(1964-), 男, 博士, 教授。E-mail: lichuangdi1964@163.com。

附录1 式(19)的简化过程

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_k + i\omega} \frac{1}{p_j - i\omega} + \frac{1}{p_j + i\omega} \frac{1}{p_k - i\omega} &= \frac{1}{p_k + p_j} \left(\frac{1}{p_k + i\omega} + \frac{1}{p_j - i\omega} \right) + \frac{1}{p_k + p_j} \left(\frac{1}{p_j + i\omega} + \frac{1}{p_k - i\omega} \right) = \\ \frac{1}{p_k + p_j} \left(\frac{1}{p_k + i\omega} + \frac{1}{p_k - i\omega} + \frac{1}{p_j - i\omega} + \frac{1}{p_j + i\omega} \right) &= \frac{1}{p_k + p_j} \left(\frac{2p_k}{p_k^2 + \omega^2} + \frac{2p_j}{p_j^2 + \omega^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A1-1})$$

附录2 式(21)的简化过程

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= S_0 \sum_{m=1}^2 \sum_{i=1}^4 \left(\frac{d_{l,i}}{\omega^2 + \omega_{l,i}^2} \frac{d_{g,m}}{\omega^2 + \omega_{g,m}^2} \right) \left[\sum_{j=1}^{2n} \frac{\eta_j^2}{p_j^2 + \omega^2} + 2 \sum_{k=1}^{2n-1} \sum_{j=k+1}^{2n} \frac{\eta_k \eta_j}{p_k + p_j} \left(\frac{p_j}{p_j^2 + \omega^2} + \frac{p_k}{p_k^2 + \omega^2} \right) \right] = \\ S_0 \sum_{m=1}^2 \sum_{i=1}^4 \left(\frac{d_{l,i}}{\omega^2 + \omega_{l,i}^2} \frac{d_{g,m}}{\omega^2 + \omega_{g,m}^2} \right) \sum_{j=1}^{2n} \frac{\eta_j^2}{p_j^2 + \omega^2} &+ S_0 \sum_{m=1}^2 \sum_{i=1}^4 \left(\frac{d_{l,i}}{\omega^2 + \omega_{l,i}^2} \frac{d_{g,m}}{\omega^2 + \omega_{g,m}^2} \right) \cdot \\ \sum_{k=1}^{2n-1} \sum_{j=k+1}^{2n} \frac{2\eta_k \eta_j}{p_k + p_j} \left(\frac{p_j}{p_j^2 + \omega^2} + \frac{p_k}{p_k^2 + \omega^2} \right) &= S_0 \sum_{j=1}^{2n} \sum_{m=1}^2 \sum_{i=1}^4 \frac{\eta_j^2}{p_j^2 + \omega^2} \left(\frac{d_{l,i}}{\omega^2 + \omega_{l,i}^2} \frac{d_{g,m}}{\omega^2 + \omega_{g,m}^2} \right) + \\ \sum_{j=1}^{2n} \sum_{m=1}^2 \sum_{i=1}^4 \frac{2\eta_k \eta_j}{p_k + p_j} \left(\frac{p_j}{p_j^2 + \omega^2} \frac{d_{l,i}}{\omega^2 + \omega_{l,i}^2} \frac{d_{g,m}}{\omega^2 + \omega_{g,m}^2} + \frac{p_k}{p_k^2 + \omega^2} \frac{d_{l,i}}{\omega^2 + \omega_{l,i}^2} \frac{d_{g,m}}{\omega^2 + \omega_{g,m}^2} \right) & \end{aligned} \quad (\text{A2-1})$$

所以

$$S_X(\omega) = S_0 \sum_{j=1}^{2n} \eta_j^2 A_j(\omega) + 2S_0 \sum_{j=1}^{2n-1} \sum_{k=j+1}^{2n} \frac{\eta_k \eta_j}{p_k + p_j} [p_j A_j(\omega) + p_k A_k(\omega)] \quad (\text{A2-2})$$

式中

$$A_j(\omega) = \sum_{m=1}^2 \sum_{i=1}^4 d_{l,i} d_{g,m} \frac{1}{\omega^2 + \omega_{l,i}^2} \frac{1}{\omega^2 + \omega_{g,m}^2} \frac{1}{p_j^2 + \omega^2} \quad (\text{A2-3})$$

附录3 T_j^0 和 T_j^1 的推导

$$\begin{aligned} T_j^0 &= \int_0^\infty \omega^q A_j(\omega) d\omega = \\ \sum_{m=1}^2 \sum_{i=1}^4 d_{l,i} d_{g,m} \int_0^\infty \frac{1}{\omega^2 + \omega_{l,i}^2} \frac{1}{\omega^2 + \omega_{g,m}^2} \frac{1}{p_j^2 + \omega^2} d\omega &= \\ \sum_{m=1}^2 \sum_{i=1}^4 d_{l,i} d_{g,m} \frac{1}{\omega_{g,m}^2 - \omega_{l,i}^2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\omega^2 + \omega_{l,i}^2} - \frac{1}{\omega^2 + \omega_{g,m}^2} \right) \frac{1}{p_j^2 + \omega^2} d\omega &= \\ \sum_{m=1}^2 \sum_{i=1}^4 d_{l,i} d_{g,m} \frac{1}{\omega_{g,m}^2 - \omega_{l,i}^2} \left[\int_0^\infty \frac{1}{\omega^2 + \omega_{l,i}^2} \frac{1}{p_j^2 + \omega^2} d\omega - \int_0^\infty \frac{1}{\omega^2 + \omega_{g,m}^2} \frac{1}{p_j^2 + \omega^2} d\omega \right] &= \\ \sum_{m=1}^2 \sum_{i=1}^4 d_{l,i} d_{g,m} \frac{\pi}{2(\omega_{g,m}^2 - \omega_{l,i}^2)} \left[\frac{1}{p_j^2 - \omega_{l,i}^2} \left(\frac{1}{\omega_{l,i}} - \frac{1}{p_j} \right) + \frac{1}{p_j^2 - \omega_{g,m}^2} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{\omega_{g,m}} \right) \right] & \end{aligned} \quad (\text{A3-1})$$

$$\begin{aligned} T_j^1 &= \int_0^\infty \omega A_j(\omega) d\omega = \sum_{m=1}^2 \sum_{i=1}^4 d_{l,i} d_{g,m} \int_0^\infty \frac{\omega}{\omega^2 + \omega_{l,i}^2} \frac{1}{\omega^2 + \omega_{g,m}^2} \frac{1}{p_j^2 + \omega^2} d\omega = \\ \sum_{m=1}^2 \sum_{i=1}^4 d_{l,i} d_{g,m} \frac{1}{\omega_{g,m}^2 - \omega_{l,i}^2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\omega^2 + \omega_{l,i}^2} - \frac{1}{\omega^2 + \omega_{g,m}^2} \right) \frac{\omega}{p_j^2 + \omega^2} d\omega &= \\ \sum_{m=1}^2 \sum_{i=1}^4 d_{l,i} d_{g,m} \frac{1}{\omega_{g,m}^2 - \omega_{l,i}^2} \left[\int_0^\infty \frac{1}{\omega^2 + \omega_{l,i}^2} \frac{\omega}{p_j^2 + \omega^2} d\omega - \int_0^\infty \frac{1}{\omega^2 + \omega_{g,m}^2} \frac{\omega}{p_j^2 + \omega^2} d\omega \right] &= \\ \sum_{m=1}^2 \sum_{i=1}^4 d_{l,i} d_{g,m} \frac{1}{2(\omega_{g,m}^2 - \omega_{l,i}^2)} \left[\frac{1}{\omega_{l,i}^2 - p_j^2} (\ln \omega_{l,i}^2 - \ln p_j^2) - \frac{1}{\omega_{g,m}^2 - p_j^2} (\ln \omega_{g,m}^2 - \ln p_j^2) \right] & \end{aligned} \quad (\text{A3-2})$$