

# 负刚度非线性黏滞阻尼器对斜拉索振动控制研究

程志鹏<sup>1,2</sup>, 汪志昊<sup>1,2</sup>, 郜 辉<sup>1</sup>, 岳方方<sup>1</sup>

(1. 华北水利水电大学土木与交通学院, 河南 郑州 450045; 2. 桥梁结构安全技术国家工程实验室, 北京 100088)

**摘要:** 为提升传统被动线性黏滞阻尼器(LVD)对斜拉索的减振效果, 本文融合被动负刚度控制技术和非线性黏滞阻尼特征, 开展了负刚度非线性黏滞阻尼器(NSNVD)对斜拉索减振增效的研究。基于能量等效线性化方法获得了 NSNVD 的线性等效力学模型; 采用复模态分析获得了斜拉索张紧弦模型的附加模态阻尼比的近似解和迭代解, 并分别与考虑或忽略斜拉索垂度和抗弯刚度的数值仿真解进行对比, 验证了能量等效线性化方法对 NSNVD 斜拉索减振系统的适用性; 基于考虑斜拉索垂度和抗弯刚度的仿真解分别开展了 NSNVD 对斜拉索单模态减振效果参数分析和多模态减振效果优化研究, 获得了 NSNVD 负刚度系数和黏滞阻尼指数对斜拉索单模态和多模态减振效果的影响规律。研究表明: NSNVD 的被动负刚度效应显著提升了斜拉索单模态减振效果, 负刚度效应和非线性黏滞阻尼特征均有助于提升斜拉索多模态减振效果; 与非线性黏滞阻尼器(NVD)和负刚度线性黏滞阻尼器(NSLVD)相比, NSNVD 对斜拉索具有更好的减振效果。

**关键词:** 斜拉索; 被动负刚度; 非线性黏滞阻尼器; 多模态振动控制; 模态阻尼比

**中图分类号:** U448.27 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2022)03-0652-11

**DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2022.03.015

## 引 言

附加被动线性黏滞阻尼器(LVD)作为一种最常用的斜拉索减振措施, 经过国内外学者的广泛研究, 已形成了较为完善的成套理论与技术体系。Pacheco 等<sup>[1]</sup>采用 Galerkin 方法获得了斜拉索张紧弦模型的 LVD 减振通用设计曲线; Krenk<sup>[2]</sup>进一步给出了 LVD 的通用设计曲线近似解析表达式; 段元锋等<sup>[3]</sup>考虑了斜拉索垂度、抗弯刚度及阻尼器支撑刚度、内刚度等影响, 建立了 LVD 拉索减振的工程实用设计方法。但 LVD 仅能实现斜拉索单模态最优控制, 且减振效果受到安装高度的制约, 为斜拉索提供的附加模态阻尼比有限, 尤其是非目标优化模态。

随着斜拉桥跨度的逐渐增大, 作为其主要承重构件的斜拉索长细比进一步增大, 极易在外界环境激励下产生各种过量振动<sup>[4-6]</sup>, 且超长斜拉索风致振动通常表现为多模态振动特征<sup>[7-8]</sup>。因此, 有效的斜拉索多模态减振技术对保障大跨度斜拉桥安全运营至关重要<sup>[9]</sup>。研究表明<sup>[10-13]</sup>: 与 LVD 相比, 非线性黏滞阻尼器(NVD)对斜拉索多模态减振优势明显。另一方面, 基于 MR 阻尼器的半主动控制技术以其优良的智能控制特性, 逐渐发展成为提升斜拉索减

振效果的重要手段<sup>[14-15]</sup>, 且已成功应用于洞庭湖大桥<sup>[16]</sup>和滨州黄河大桥<sup>[17]</sup>等实际工程。研究表明: MR 阻尼器半主动控制效果提升主要归功于其负刚度特性实现了阻尼器耗能增效。

受半主动控制负刚度特性实现斜拉索减振增效的启发, 基于负刚度控制原理的被动负刚度阻尼器对斜拉索振动控制研究得到发展。Zhou 等<sup>[18]</sup>基于预压弹簧式被动负刚度黏滞阻尼器开展了斜拉索减振理论和试验研究; Shi 等<sup>[19]</sup>基于磁致式被动负刚度阻尼器开展了斜拉索减振试验研究。研究表明<sup>[20]</sup>: 并联负刚度单元的黏滞阻尼器可显著提升斜拉索减振效果, 且可在一定程度上改善传统被动阻尼器因安装位置过低而引起的嵌固效应, 主要不足在于当负刚度过大时可能会诱发减振系统的稳定性问题。此外, 基于惯质阻尼器的斜拉索减振研究表明<sup>[21-23]</sup>: 并联惯质单元的黏滞阻尼器呈现频率相关性负刚度特征, 也可有效提升斜拉索减振效果。

为进一步实现斜拉索减振增效, 本文融合被动负刚度控制技术和非线性黏滞阻尼特征开展了负刚度非线性黏滞阻尼器(NSNVD)对斜拉索的振动控制研究, 理论与仿真分析了 NSNVD 对斜拉索的单模态和多模态减振效果, 参数分析了 NSNVD 负刚度系数和黏滞阻尼速度指数对斜拉索单模态和

**收稿日期:** 2020-08-03; **修订日期:** 2020-11-09

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(51878274); 桥梁结构安全技术国家工程实验室开放课题资助项目(2020-GJK-FKT-9)。

多模态减振效果的影响规律,并对比分析了 NSNVD 与 LVD, NVD 以及负刚度线性黏滞阻尼器 (NSLVD)对斜拉索的减振效果。

## 1 斜拉索-NSNVD 系统复模态分析

### 1.1 NSNVD 线性等效力学模型

由负刚度单元和非线性黏滞阻尼单元并联而成的 NSNVD 如图 1 所示,其作用于斜拉索的横向力可表示为:

$$F_d(t) = k_d u(x_d, t) + c_d |\dot{u}(x_d, t)|^\alpha \text{sign}[\dot{u}(x_d, t)] \quad (1)$$

式中  $u(x_d, t)$  和  $\dot{u}(x_d, t)$  分别表示斜拉索  $x_d$  位置处、 $t$  时刻的位移和速度;  $k_d, c_d$  和  $\alpha$  分别表示 NSNVD 的负刚度系数、黏滞阻尼系数和黏滞阻尼指数;  $\text{sign}(\bullet)$  表示符号函数。

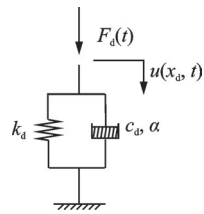


图 1 NSNVD 力学模型

Fig. 1 Mechanical model of NSNVD

值得说明的是,当  $\alpha=1.0$  时, NSNVD 退化为负刚度线性黏滞阻尼器 (NSLVD); 当  $k=0$  时, NSNVD 退化为非线性黏滞阻尼器 (NVD); 当  $\alpha=1.0$  且  $k=0$  时, NSNVD 退化为线性黏滞阻尼器 (LVD)。

采用能量等效线性化方法<sup>[11]</sup>, 式(1)可进一步表示为:

$$F_d(t) = k_d u(x_d, t) + c_{eq} \dot{u}(x_d, t) \quad (2)$$

式中  $c_{eq}$  表示 NSNVD 的等效线性阻尼系数, 其计算式为<sup>[11]</sup>:

$$c_{eq} = \frac{\int c_d \dot{u}(x_d, t) du(x_d, t)}{\int \dot{u}^2(x_d, t) dt} = \frac{\int c_d \dot{u}^2(x_d, t) dt}{\int \dot{u}^2(x_d, t) dt} \quad (3)$$

NSNVD 在振幅和频率分别为  $U_d$  和  $\omega$  的位移  $u_d = U_d e^{i\omega t}$  激励下的出力幅值可表示为:

$$\tilde{F} = k_d U_d + i g(\alpha) c_d \omega^\alpha U_d^\alpha \quad (4)$$

式中 系数函数  $g(\alpha)$  的表达式为<sup>[11]</sup>:

$$g(\alpha) = \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\alpha + 1\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\right)} \quad (5)$$

式中  $\Gamma(\bullet)$  表示伽马函数。

由式(2)和(4)可知, NSNVD 的等效阻尼系数

可由下式计算:

$$c_{eq} = g(\alpha) c_d \omega^{\alpha-1} U_d^{\alpha-1} \quad (6)$$

### 1.2 系统特征方程

斜拉索-NSNVD 系统分析模型如图 2 所示。  $l, T$  与  $m$  分别表示斜拉索的长度、索力与单位长度质量,  $x$  和  $x'$  分别表示从斜拉索左端和右端开始并分别指向另一端的坐标轴,  $x_d$  表示阻尼器安装位置距斜拉索左侧锚固端的距离,  $x'_d = l - x_d$  表示阻尼器安装位置距斜拉索右侧锚固端的距离。忽略斜拉索垂度、抗弯刚度的影响, 斜拉索-NSNVD 系统的自由振动微分方程可表示为<sup>[11]</sup>:

$$T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_d(t) \delta(x - x_d) \quad (7)$$

式中  $u(x, t)$  表示斜拉索  $x$  位置处、 $t$  时刻的横向位移;  $F_d(t)$  表示 NSNVD 作用于斜拉索的横向力;  $\delta(\bullet)$  表示 Dirac-Delta 函数。

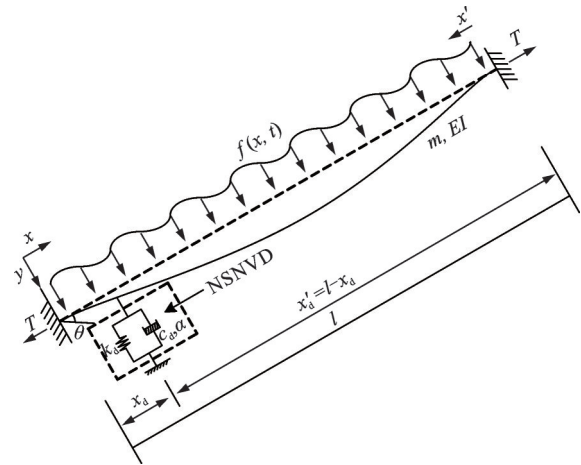


图 2 斜拉索-NSNVD 系统分析模型

Fig. 2 Analysis model of the cable-NSNVD system

方程(7)应满足斜拉索边界条件:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (8)$$

且斜拉索在阻尼器安装位置处满足力的平衡条件<sup>[11]</sup>:

$$T \left( \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_d+} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_d-} \right) = f(t) \quad (9)$$

设斜拉索自由振动时的横向位移和 NSNVD 作用于斜拉索的横向力可分别表示为:

$$\begin{cases} u(x, t) = \text{Re}(U(x) \cdot e^{i\omega t}) \\ F_d(t) = \text{Re}(\tilde{F}_d \cdot e^{i\omega t}) \end{cases} \quad (10)$$

式中  $U(x)$  和  $\tilde{F}_d$  分别表示斜拉索的振型坐标和阻尼器作用于斜拉索的横向力幅值;  $\omega$  为斜拉索-阻尼器系统的复特征频率。

将式(10)代入方程(7)得:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \beta^2 U = 0, \begin{cases} 0 < x < x_d \\ 0 < x' < x'_d \end{cases} \quad (11)$$

式中  $\beta = \omega \sqrt{\frac{m}{T}}$  表示拉索-阻尼器系统的复波数。

方程(11)的解可表示为:

$$U(x) = \begin{cases} U_d \frac{\sin(\beta x)}{\sin(\beta x_d)}, & 0 \leq x \leq x_d \\ U_d \frac{\sin(\beta x')}{\sin(\beta x'_d)}, & 0 \leq x' \leq x'_d \end{cases} \quad (12)$$

将式(4)和(12)代入式(9),斜拉索-NSNVD系统的特征方程可表示为:

$$\tan(\beta l) = \frac{\sin^2(\beta x_d)(k_d + i\omega c_{eq})}{T\beta + \cos(\beta x_d)\sin(\beta x_d)(k_d + i\omega c_{eq})} \quad (13)$$

式(13)特征方程的复波数解记为  $\beta_n$  ( $n$  为模式阶次,即  $n=1,2,\dots$ ),与之对应的复特征频率记为  $\omega_n$ ,斜拉索的附加模态阻尼比  $\zeta_n$  与复特征频率  $\omega_n$  之间的关系为<sup>[11]</sup>:

$$\omega_n = |\omega_n| (\sqrt{1 - \zeta_n^2} + i\zeta_n) \quad (14)$$

由式(14)可知,斜拉索附加模态阻尼比可由下式计算:

$$\zeta_n = \frac{\text{Im}[\omega_n]}{|\omega_n|} = \frac{\text{Im}[\beta_n]}{|\beta_n|} \cong \frac{\text{Im}[\Delta\beta_n]}{|\beta_n^0|} \quad (15)$$

式中 无阻尼波数  $\beta_n^0 = n\pi/l$ ,  $\Delta\beta_n = \beta_n - \beta_n^0$ 。

### 1.3 斜拉索附加模态阻尼比的近似解

假定 NSNVD 的安装位置远小于斜拉索长度,且 NSNVD 仅会引起斜拉索自振频率的微小摄动<sup>[11]</sup>,即:

$$x_d \ll l, \Delta\beta_n = \beta_n - \beta_n^0 \ll \beta_n^0 \quad (16)$$

根据上述假定,可以得到下列近似式:

$$\begin{aligned} \tan(\beta_n l) &\cong \Delta\beta_n l, \\ \sin(\beta_n x_d) &\cong \beta_n^0 x_d, \\ \cos(\beta_n x_d) &\cong 1 \end{aligned} \quad (17)$$

将式(17)代入式(13)可得:

$$\frac{\Delta\beta_n}{\beta_n^0} = \frac{\beta_n - \beta_n^0}{\beta_n^0} = \frac{(k_d + i\omega c_{eq})x_d}{T + (k_d + i\omega c_{eq})x_d} \quad (18)$$

式中  $\Delta\beta_n^\infty$  表示等效阻尼系数  $c_{eq}$  从 0 趋近于无穷大时对应的波数变化,可表示为:

$$\Delta\beta_n^\infty = \frac{x_d}{l} \beta_n^0 \quad (19)$$

联立式(15)和式(18),斜拉索第  $n$  阶附加模态阻尼比的近似解可表示为:

$$\zeta_n = \frac{x_d \omega_n c_{eq} / T}{(1 + x_d k_d / T)^2 + (x_d \omega_n c_{eq} / T)^2} \frac{x_d}{l} \quad (20)$$

综合式(6)和(20)可知,斜拉索附加模态阻尼比不仅与 NSNVD 的负刚度系数与黏滞阻尼系数密切相关,还体现出明显的位移相关性特征。

### 1.4 斜拉索附加模态阻尼比的迭代解

方程(13)可采用固定点迭代法进行求解,迭代方程可由下式表示:

$$\beta_n^{j+1} = n\pi + \arctan \Omega \quad (21)$$

其中,

$$\Omega = \frac{\sin^2(\beta_n^j x_d)(k_d + i\omega_n^j c_{eq})}{T\beta_n^j + \cos(\beta_n^j x_d)\sin(\beta_n^j x_d)(k_d + i\omega_n^j c_{eq})} \quad (22)$$

式中  $j$  表示迭代次数,且  $j=1,2,\dots$ 。

迭代初值取无阻尼波数  $\beta_n^0$ ,将迭代方程求解得到的复波数  $\beta_n$  值代入式(15),即可获得斜拉索第  $n$  阶附加模态阻尼比的迭代解。

## 2 NSNVD 对斜拉索减振数值仿真分析方法

### 2.1 系统状态空间方程

根据图 2 所示的斜拉索-NSNVD 系统分析模型,系统运动微分方程可表示为<sup>[9]</sup>:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\lambda^2 T}{l^3} \int_0^l u(x,t) dx + \\ c \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) - F_d \delta(x - x_d) \end{aligned} \quad (23)$$

式中 斜拉索的抗弯刚度、垂度参数和单位长度阻尼分别记为  $EI$ ,  $\lambda^2$  和  $c$ ;  $f(x,t)$  表示施加于斜拉索的分布荷载。

斜拉索两端的边界条件:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0 \quad (24)$$

采用有限差分法,选取  $N$  个内节点将斜拉索均匀划分为  $N+1$  个单元,斜拉索-NSNVD 系统的振动微分方程的矩阵形式可表示为:

$$M\ddot{\mathbf{u}} + C\dot{\mathbf{u}} + K\mathbf{u} = \mathbf{f} - \boldsymbol{\gamma}F_d \quad (25)$$

式中  $M$ ,  $C$  和  $K$  分别表示斜拉索-NSNVD 系统的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵;  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{f}$  分别表示斜拉索的位移向量和外荷载向量;  $\boldsymbol{\gamma}$  表示阻尼器作用位置向量。根据文献[24],上述矩阵或向量可分别表示为:

$$\begin{aligned} M &= ma\mathbf{I}_N, \quad C = c\mathbf{I}_N, \\ K &= \frac{\lambda^2 Ta}{l^3} \mathbf{B}_{N \times N} + \frac{T}{a^2} \boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{\chi}_{N \times N}, \\ \mathbf{u} &= [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad \cdots \quad u_N]^T, \\ \mathbf{f} &= [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad \cdots \quad f_N]^T, \\ \boldsymbol{\gamma} &= [\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3 \quad \cdots \quad \gamma_N]^T \end{aligned} \quad (26)$$

式中  $a = l/(N+1)$  表示斜拉索单元长度;  $\mathbf{I}_N$  为  $N$  阶单位矩阵;  $\mathbf{B}_{N \times N}$  中每个元素都等于 1;  $\boldsymbol{\epsilon} = EIT^{-1}l^{-2}$

表示斜拉索的抗弯刚度参数:

$$\chi_{N \times N} = \begin{bmatrix} Q & U & W & & 0 \\ & S & U & W & \\ & & S & U & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & W \\ \text{sym} & & & & S & U \\ & & & & & Q \end{bmatrix} \quad (27)$$

其中,

$$\begin{aligned} Q &= 7N^2 + 2/\epsilon, \quad S = 6N^2 + 2/\epsilon, \\ U &= -4N^2 - 1/\epsilon, \quad W = N^2 \end{aligned} \quad (28)$$

式中  $u_i$  和  $f_i$  分别表示斜拉索第  $i$  个节点的位移和外荷载;  $\gamma_i$  由 NSNVD 的安装位置决定, 若 NSNVD 安装在斜拉索第  $\varphi$  个节点:

$$\gamma_i = \begin{cases} 0, & i \neq \varphi \\ 1, & i = \varphi \end{cases} \quad (29)$$

式(25)状态空间方程形式可表示为:

$$\dot{z} = Az + BF_d(t) + Hf \quad (30)$$

其中,

$$\begin{aligned} z &= \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}\gamma \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

当输出向量分别为斜拉索的位移、速度与加速度  $y = [u^T \quad \dot{u}^T \quad \ddot{u}^T]^T$  时, 斜拉索-NSNVD 系统的状态输出方程可以表示为:

$$y = Hz + DF_d(t) + Gf \quad (32)$$

其中,

$$\begin{aligned} y &= \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \\ \ddot{u} \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} I_N & 0_{N \times N} \\ 0_{N \times N} & I_N \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}, \\ D &= \begin{bmatrix} 0_{N \times 1} \\ 0_{N \times 1} \\ M^{-1}\gamma \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0_{N \times 1} \\ 0_{N \times 1} \\ M^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (33)$$

## 2.2 数值仿真方法

以表1某实桥斜拉索为例, 开展 NSNVD 对斜拉索减振效果的数值仿真分析。斜拉索被离散为 200 个相同单元, NSNVD 安装在距离斜拉索下锚固端的 2% 斜拉索长度位置。仿真分析基于 MATLAB/Simulink 工具箱, 采用变步长的四阶龙格-库塔算法进行数值仿真计算。仿真计算时首先进行斜拉索目标模态的稳态激励, 然后去除外激励, 使斜拉索做自由衰减振动。斜拉索激励荷载取为<sup>[12]</sup>:

$$f(x, t) = 5 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin(\omega_n t) H(t_i - t) \quad (34)$$

式中  $n$  表示斜拉索-阻尼器系统的模态阶次;  $\omega_n$  表

示斜拉索-阻尼器系统的第  $n$  阶模态振动圆频率;  $t_i$  表示激励持续时间;  $H(t_i - t)$  表示单位阶跃函数。

表1 某斜拉索参数

Tab. 1 Parameters of a stay cable

| 参数                           | 数值                  |
|------------------------------|---------------------|
| 索长 $l/m$                     | 306.7               |
| 单位长度质量 $m/(kg \cdot m^{-1})$ | 98.6                |
| 抗弯刚度 $EI/(N \cdot m^2)$      | $5.525 \times 10^6$ |
| 轴向刚度 $EA/N$                  | $2.429 \times 10^9$ |
| 倾角 $\theta/(\circ)$          | 30.5                |
| 垂度参数 $\lambda^2$             | 0.9365              |
| 索力 $T/kN$                    | 5529.6              |

鉴于非线性阻尼器斜拉索减振系统的附加模态阻尼比与斜拉索振幅相关, 特定义如下:

$$\zeta_n = \frac{1}{2\pi\tau} \ln\left(\frac{A_n}{A_{n+\tau}}\right) \quad (35)$$

式中 自由衰减初始周期位移振幅峰值  $A_n=0.08$  m, 终止周期位移振幅峰值  $A_{n+\tau}=0.02$  m。

## 3 斜拉索单模态减振效果

### 3.1 附加模态阻尼比近似解、迭代解和仿真解对比

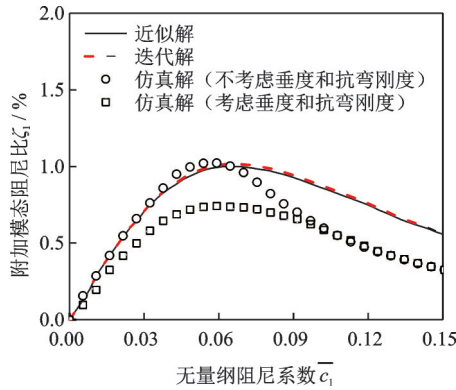
为了便于对比分析 NSNVD 提供的斜拉索各阶最大附加模态阻尼比及对应的阻尼器最优参数, 引入下列无量纲参数:

$$\bar{k} = -k_d x_d / T, \quad \bar{c}_n = c_d x_d \omega_n / T \quad (36)$$

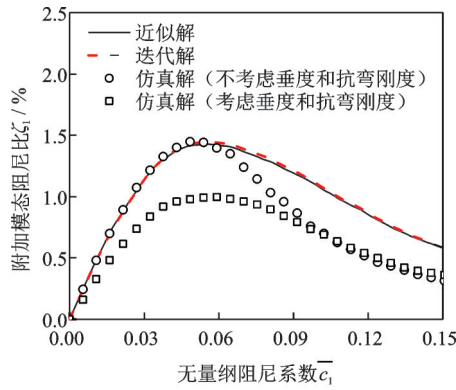
式中  $\bar{k}$  表示 NSNVD 无量纲负刚度系数,  $\bar{c}_n$  表示斜拉索第  $n$  阶模态 NSNVD 无量纲阻尼系数。

由于斜拉索-NSNVD 系统复模态分析求得的斜拉索附加模态阻尼比的近似解和迭代解与阻尼器安装位置处的斜拉索振幅密切相关, 为便于对比分析斜拉索附加模态阻尼比的近似解、迭代解和仿真解, 统一取仿真解识别对应的斜拉索自由衰减区段初始周期和终止周期的位移振幅峰值的平均值作为计算近似解和迭代解时的阻尼器安装位置处的斜拉索振幅。图3和4分别对比了斜拉索前2阶附加模态阻尼比随 NSNVD ( $\alpha=0.5$ ) 阻尼系数的变化关系, 可见:

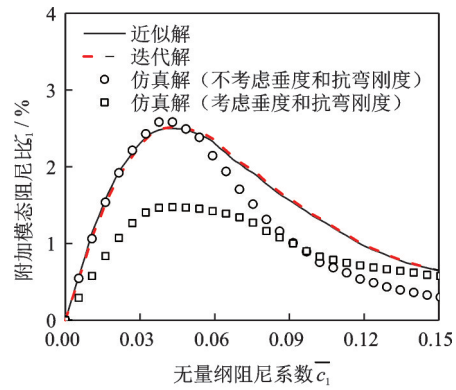
(1) 当无量纲负刚度系数  $\bar{k}=0$ ,  $\bar{k}=0.3$  和  $\bar{k}=0.6$  时, 斜拉索前2阶附加模态阻尼比的近似解、迭代解和不考虑斜拉索垂度和抗弯刚度时的仿真解前期吻合较好, 但超过峰值之后吻合程度变差; 当无量纲负刚度系数  $\bar{k}=0.9$  时, 近似解将过高估计斜拉索的附加模态阻尼比, 并低估 NSNVD 的最优阻尼系数, 而迭代解和仿真解则吻合较好; 这主要是由于负



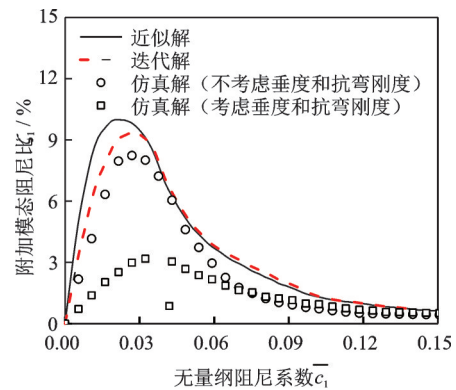
(a)  $\bar{k} = 0$



(b)  $\bar{k} = 0.3$



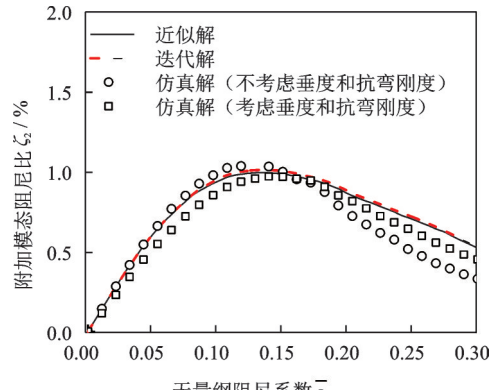
(c)  $\bar{k} = 0.6$



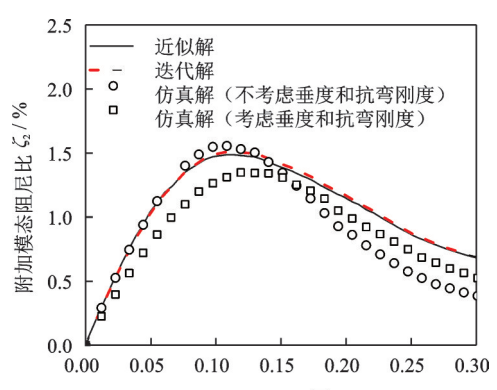
(d)  $\bar{k} = 0.9$

图3 斜拉索第1阶附加模态阻尼比随NSNVD( $\alpha=0.5$ )无量纲阻尼系数的变化关系

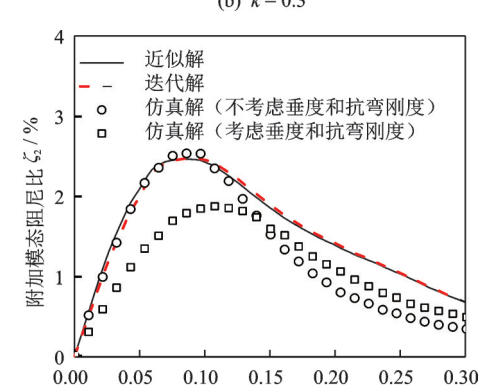
Fig. 3 Variations of the first supplemental modal damping ratio of the cable with the dimensionless damping coefficient of the NSNVD ( $\alpha=0.5$ )



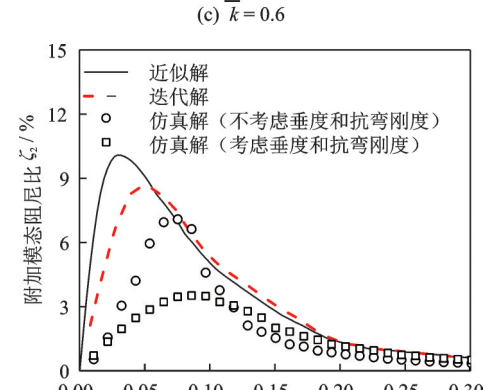
(a)  $\bar{k} = 0$



(b)  $\bar{k} = 0.3$



(c)  $\bar{k} = 0.6$



(d)  $\bar{k} = 0.9$

图4 斜拉索第2阶附加模态阻尼比随NSNVD( $\alpha=0.5$ )无量纲阻尼系数的变化关系

Fig. 4 Variations of the second supplemental modal damping ratio of the cable with the dimensionless damping coefficient of NSNVD ( $\alpha=0.5$ )

刚度过大将引起斜拉索-NSNVD系统的复波数与无阻尼时的复波数偏差较大,近似解基本假定已不再适用。

(2)若考虑斜拉索垂度和抗弯刚度的影响,NSNVD为斜拉索前2阶附加模态阻尼比显著降低。

鉴于阻尼器对斜拉索减振效果受斜拉索垂度和抗弯刚度的影响<sup>[25]</sup>,且考虑斜拉索垂度和抗弯刚度更符合实际,本文后续开展NSNVD对斜拉索单模态减振效果参数分析和多模态减振效果优化研究均依据考虑斜拉索垂度和抗弯刚度时的仿真解。

### 3.2 NSNVD 参数分析

图 5 和 6 进一步对比分析了 NSNVD 无量纲负刚度系数和黏滞阻尼指数对斜拉索前 2 阶最大附加模态阻尼比和相应最优无量纲阻尼系数的影响规律。由图可知:

(1)对应相同黏滞阻尼指数且 NSNVD 无量纲负刚度系数小于 1 时,斜拉索前 2 阶最大附加模态阻尼比随 NSNVD 无量纲负刚度系数的增大而提高,

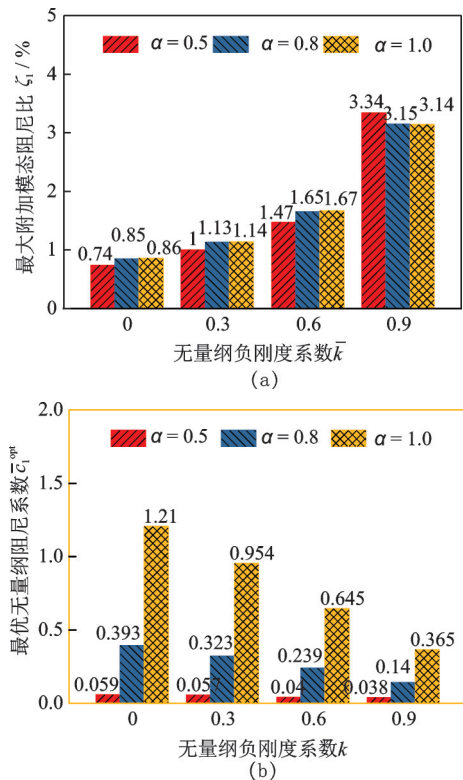


图 5 NSNVD 无量纲负刚度系数和黏滞阻尼指数对斜拉索第 1 阶最大附加模态阻尼比和对应最优无量纲阻尼系数的影响规律

Fig. 5 The influence of the dimensionless negative stiffness coefficient and viscous damping exponent of the NSNVD on the first maximum supplemental modal damping ratio of the cable and corresponding optimal dimensionless damping coefficient

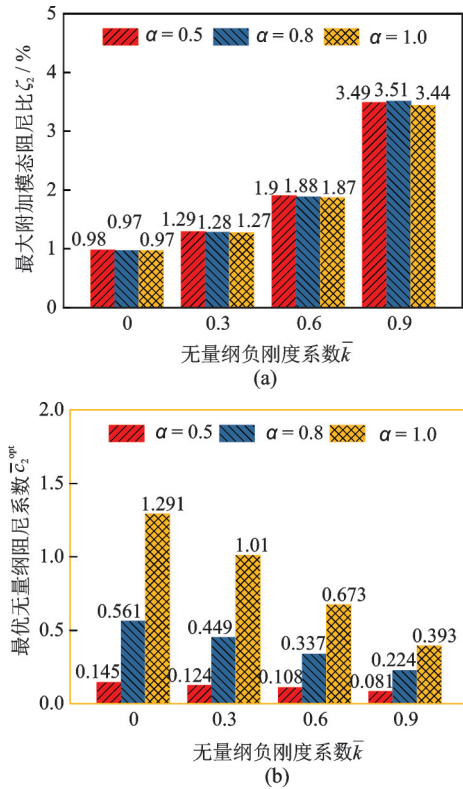


图 6 NSNVD 无量纲负刚度系数和黏滞阻尼指数对斜拉索第 2 阶最大附加模态阻尼比和对应最优无量纲阻尼系数的影响规律

Fig. 6 The influence of the dimensionless negative stiffness coefficient and viscous damping exponent of the NSNVD on the second maximum supplemental modal damping ratio of the cable and corresponding optimal dimensionless damping coefficient

而斜拉索最大附加模态阻尼比对应的 NSNVD 最优无量纲阻尼系数则随 NSNVD 无量纲负刚度系数的增大而降低。

(2)对应相同的无量纲负刚度系数,斜拉索前 2 阶最大附加模态阻尼比受 NSNVD 黏滞阻尼指数的变化影响较小,但斜拉索前 2 阶最大附加模态阻尼比对应的 NSNVD 最优无量纲阻尼系数随 NSNVD 黏滞阻尼指数的减小而显著下降。

## 4 斜拉索多模态减振效果

### 4.1 多模态优化方法

图 7 给出了斜拉索前 4 阶附加模态阻尼比随 NSNVD( $\alpha=0.5$ )无量纲阻尼系数的变化关系。由图可知:斜拉索各阶模态对应的 NSNVD 最优无量纲阻尼系数随无量纲负刚度系数的增大而降低,且斜拉索第 1 阶模态由于垂度降低效应其最大附加模态阻尼比要明显小于高阶模态。此外,结合图 5 和 6 可知,与 NSLVD 相比,NSNVD( $\alpha=0.5$ )大幅度降

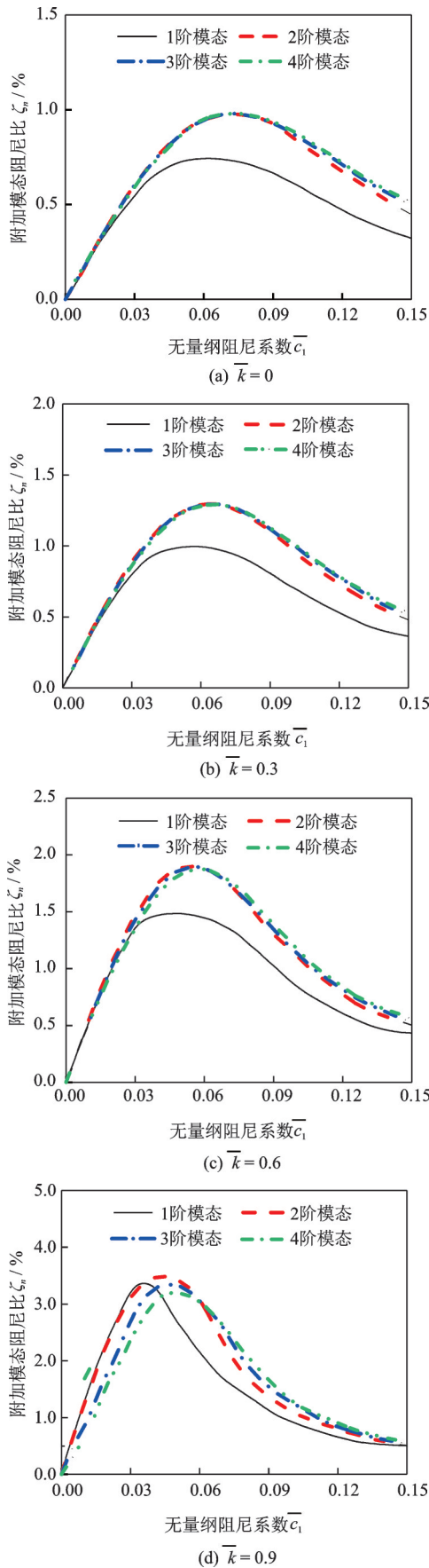


图7 斜拉索前4阶附加模态阻尼比随NSNVD( $\alpha=0.5$ )无量纲阻尼系数的变化关系

Fig. 7 Variations of the first four supplemental model damping ratio of the cable with the dimensionless damping coefficient of the NSNVD ( $\alpha=0.5$ )

低了斜拉索各阶模态的最优无量纲阻尼系数,且显著缩小了各阶模态最优无量纲阻尼系数之间的差异。

为精准评估NSNVD对斜拉索的多模态减振效果,本文采用文献[25]提出的基于斜拉索各阶模态阻尼比均值和标准差的斜拉索多模态减振参数优化方法。即:当斜拉索各阶附加模态阻尼比的均值和标准差的差值最大时,斜拉索多模态减振效果达到最优。斜拉索附加模态阻尼比的均值、标准差以及二者的差值最大值的计算式分别为:

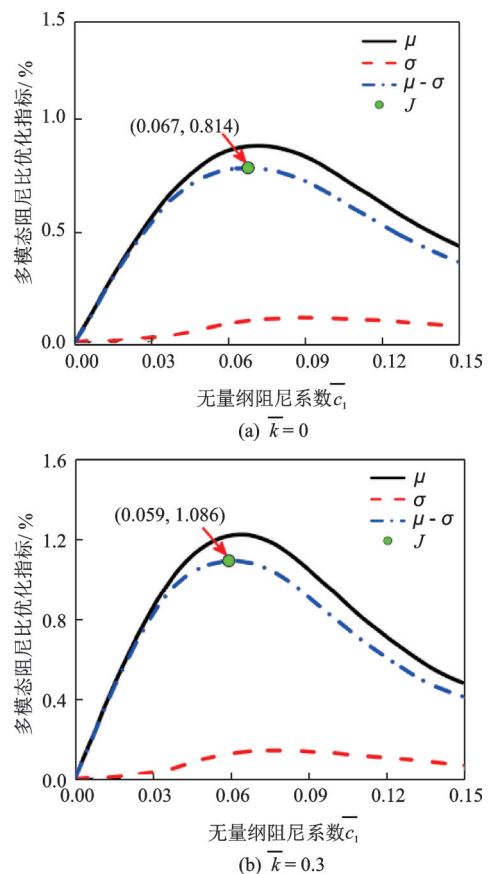
$$\mu(\bar{c}_1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \zeta_i(\bar{c}_1) \quad (37)$$

$$\sigma(\bar{c}_1) = \sqrt{\sum_{i=1}^n [\zeta_i(\bar{c}_1) - \mu(\bar{c}_1)]^2 / n} \quad (38)$$

$$J = \max(\mu(\bar{c}_1) - \sigma(\bar{c}_1)) \quad (39)$$

式中  $n$  为考虑的斜拉索控制模态阶次。

图8为考虑斜拉索前4阶模态控制相应优化指标随NSNVD( $\alpha=0.5$ )无量纲阻尼系数的变化关系。由图可知:斜拉索前4阶附加模态阻尼比的均值、标准差以及均值与标准差二者的差值均随NSNVD( $\alpha=0.5$ )无量纲阻尼系数的增大,先逐渐增大到最大值后再减小,即斜拉索前4阶附加模态阻尼比的均值和标准差二者的差值存在最大值,此时斜拉索多模态减振效果达到最优。



(b)  $\bar{k} = 0.3$

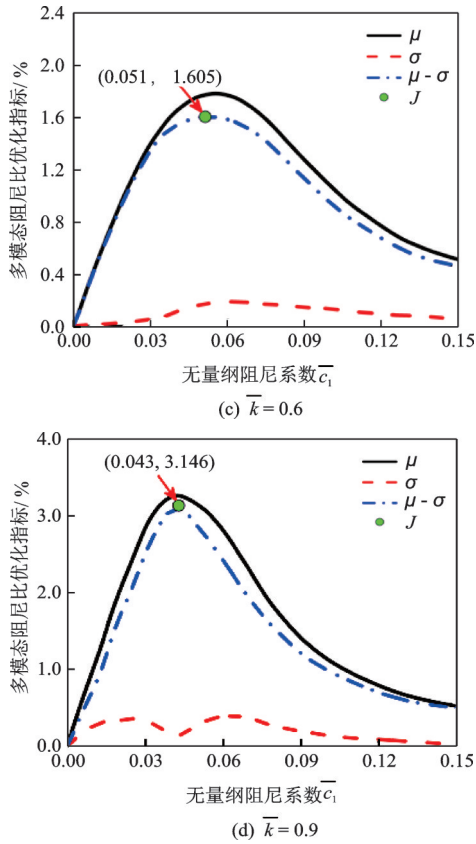


图 8 考虑斜拉索前 4 阶模态控制相应优化指标 NSNVD( $\alpha=0.5$ )无量纲阻尼系数的变化关系

Fig. 8 Variations of the multi-mode damping ratio optimization index considering the first four supplemental modal damping ratio of the cable with the dimensionless damping coefficient of the NSNVD ( $\alpha=0.5$ )

4.2 NSNVD 参数分析

图 9 对比分析了 NSNVD 无量纲负刚度系数和黏滞阻尼指数对斜拉索前 4 阶附加模态阻尼比的均

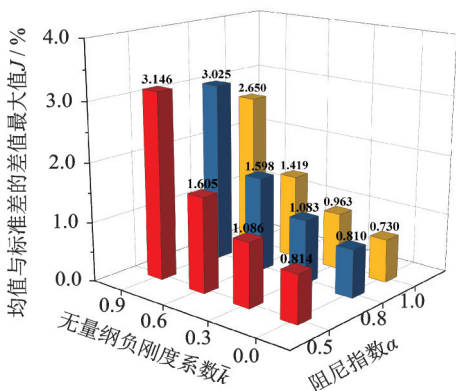


图 9 NSNVD 无量纲负刚度系数和黏滞阻尼指数对斜拉索前 4 阶附加模态阻尼比的均值与标准差二者的差值最大值的影响规律

Fig. 9 The influence of the dimensionless negative stiffness coefficient and viscous damping exponent of the NSNVD on the maximum difference between the mean and standard deviation of the first four supplemental modal damping ratios of the cable

值与标准差二者的差值最大值的影响规律。由图可知:对应相同黏滞阻尼指数且 NSNVD 无量纲负刚度系数小于 1 时,斜拉索前 4 阶附加模态阻尼比的均值与标准差二者的差值最大值随 NSNVD 无量纲负刚度系数的增大而提高,即 NSNVD 对斜拉索多模态减振效果随 NSNVD 无量纲负刚度系数的增大而提升;对应相同无量纲负刚度系数,斜拉索前 4 阶附加模态阻尼比的均值与标准差二者的差值最大值随 NSNVD 黏滞阻尼指数的减小而提高,即 NSNVD 对斜拉索多模态减振效果随 NSNVD 黏滞阻尼指数的减小而提升。

图 10 进一步对比分析了 NSNVD 无量纲负刚度系数和黏滞阻尼指数对斜拉索前 4 阶模态最优控制对应的 NSNVD 无量纲最优阻尼系数的影响规律。由图可知:对应相同黏滞阻尼指数且 NSNVD 无量纲负刚度系数小于 1 时,NSNVD 最优阻尼系数随 NSNVD 无量纲负刚度系数的增大而降低,即 NSNVD 实现斜拉索多模态减振效果(随 NSNVD 无量纲负刚度系数的增大而提升)的阻尼成本随 NSNVD 无量纲负刚度系数的增大而降低;对应相同无量纲负刚度系数,NSNVD 最优无量纲阻尼系数随 NSNVD 黏滞阻尼指数的减小而降低,即 NSNVD 实现斜拉索多模态减振效果(随 NSNVD 黏滞阻尼指数的减小而提升)的阻尼成本随 NSNVD 黏滞阻尼指数的减小而降低。

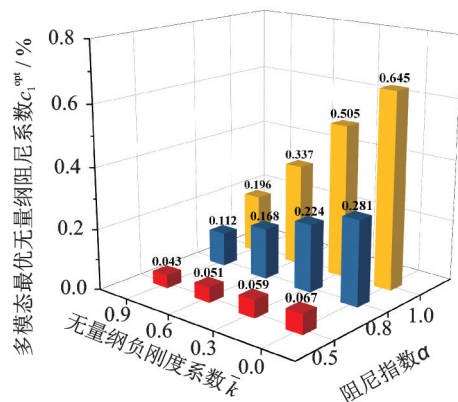


图 10 NSNVD 无量纲负刚度系数和黏滞阻尼指数对 NSNVD 多模态最优无量纲阻尼系数的影响规律

Fig. 10 The influence of the dimensionless negative stiffness coefficient and viscous damping exponent of the NSNVD on the optimal dimensionless multi-modal damping coefficient of the NSNVD

图 11(a)和(b)分别对比研究了斜拉索多模态优化后前 4 阶附加模态阻尼比随 NSNVD( $\alpha=0.8$ )无量纲负刚度系数与 NSNVD( $\bar{k}=0.6$ )黏滞阻尼指



数的变化关系。由图可知:斜拉索各阶附加模态阻尼比随 NSNVD( $\alpha=0.8$ )无量纲负刚度系数的增大而提高;斜拉索第 1 阶附加模态阻尼比随 NSNVD( $\bar{k}=0.6$ )黏滞阻尼系数的减小而有所下降,而其余各阶附加模态阻尼比均随 NSNVD( $\bar{k}=0.6$ )黏滞阻尼系数的减小而提高。可见: NSNVD 的被动负刚度效应和非线性黏滞阻尼特征均有助于提升斜拉索多模态减振效果,且基于斜拉索各阶模态阻尼比的均值和标准差的多模态减振参数优化方法同样适用于斜拉索-NSNVD 系统。

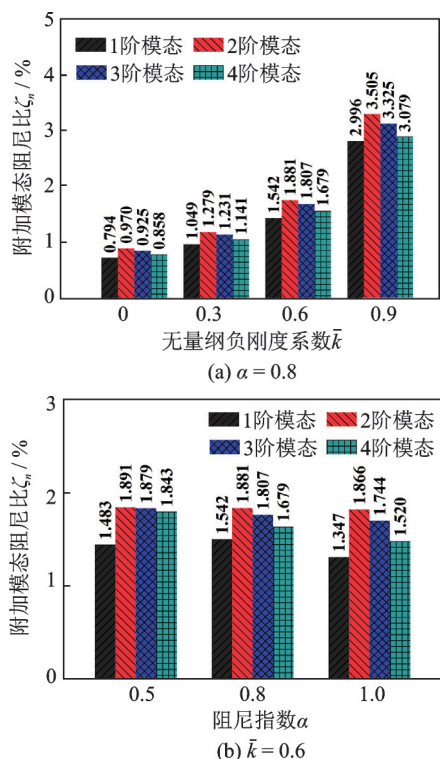


图 11 斜拉索多模态优化后的前 4 阶附加模态阻尼比

Fig. 11 The first four supplemental modal damping ratio of the cable after multi-mode optimization

## 5 结 论

(1) 能量等效线性化方法对 NSNVD 斜拉索减振系统基本适用,但当阻尼系数超过最优值时,相应结果存在一定偏差。

(2) 被动负刚度效应有助于提升 NSNVD 对斜拉索的单模态和多模态减振效果,且相应的 NSNVD 最优阻尼系数随其负刚度系数的增大而降低。

(3) 黏滞阻尼非线性特征有助于实现 NSNVD 对斜拉索的多模态减振增效,其可有效提高斜拉索各阶模态阻尼比的均值与标准差二者的差值最

大值,且可显著降低相应 NSNVD 的最优阻尼系数。

(4) 基于斜拉索各阶模态阻尼比的均值和标准差的多模态减振参数优化方法同样适用于斜拉索-NSNVD 系统。

(5) 当 NSNVD 的负刚度系数和黏滞阻尼指数匹配合理时,可以实现斜拉索减振双重增效。

## 参考文献:

- [1] Pacheco B M, Fujino Y, Sulekh A. Estimation curve for modal damping in stay cables with viscous damper [J]. Journal of Structural Engineering, 1993, 119(6): 1961-1979.
- [2] Krenk S. Vibrations of a taut cable with an external damper [J]. Journal of Applied Mechanics, 2000, 67(4): 772-776.
- [3] 段元锋,李频,周仙通,等.斜拉索外置式黏滞阻尼器实用设计方法[J].中国公路学报,2015,28(11): 46-51.  
Duan Yuan-feng, Li Pin, Zhou Xian-tong, et al. Practical design method for external viscous damper of stay cable [J]. China Journal of Highway and Transport, 2015, 28(11): 46-51.
- [4] 王浩,李爱群,谢静,等.台风作用下超大跨度斜拉桥抖振响应现场实测研究[J].土木工程学报,2010,43(7): 71-78.  
Wang Hao, Li Ai-qun, Xie Jing, et al. Field measurement of the buffeting response of a super-long-span cable stayed bridge under typhoon [J]. China Civil Engineering Journal, 2010, 43(7): 71-78.
- [5] 王修勇,蒋乾超,孙洪鑫,等.斜拉桥拉索风雨激振参数联合概率分布模型[J].土木工程学报,2017,50(10): 69-74.  
Wang Xiu-yong, Jiang Qian-chao, Sun Hong-xin, et al. Joint probability distribution model of wind-rain-induced vibration parameters of stay cables on cable-stayed bridges [J]. China Civil Engineering Journal, 2017, 50(10): 69-74.
- [6] 汪峰,彭章,刘章军.设置黏滞阻尼器的斜拉索参数振动模型及控制分析[J].振动工程学报,2019,32(6): 977-985.  
Wang Feng, Peng Zhang, Liu Zhang-jun. Parametric vibration model and control analysis of cable-stayed

- dampers with viscous dampers[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2019, 32(6): 977-985.
- [7] 祝志文, 陈魏, 李健朋, 等. 多塔斜拉桥加劲索涡激振动实测与时域解析模态分解[J]. *中国公路学报*, 2019, 32(10): 247-256.
- Zhu Zhi-wen, Chen Wei, Li Jian-peng, et al. Field observation of vortex-induced vibration of stiffening cables in a multi-tower cable-stayed bridge with application of analytical mode decomposition [J]. *China Journal of Highway and Transport*, 2019, 32(10): 247-256.
- [8] Chen W L, Gao D, Laima S, et al. A field investigation on vortex-induced vibrations of stay cables in a cable-stayed bridge[J]. *Applied Sciences*, 2019, 9(21): 4556.
- [9] Wang X Y, Ni Y Q, Ko J M, et al. Optimal design of viscous dampers for multi-mode vibration control of bridge cables [J]. *Engineering Structures*, 2005, 27(5): 792-800.
- [10] Main J A, Jones N P. Free vibrations of taut cable with attached damper. II: nonlinear damper[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2002, 128(10): 1072-1081.
- [11] Krenk S, Høgsberg J R. Damping of cables by a transverse force [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2005, 131(4): 340-348.
- [12] Chen L, Sun L M. Steady-state analysis of cable with nonlinear damper via harmonic balance method for maximizing damping[J]. *Journal of Structural Engineering*, 2017, 143(2): 04016172.
- [13] Hoang N, Fujino Y. Multi-mode control performance of nonlinear dampers in stay cable vibrations[J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2009, 16(7-8): 860-869.
- [14] 何旭辉, 陈政清, 黄方林, 等. 洞庭湖大桥斜拉索减振试验研究[J]. *振动工程学报*, 2002, 15(4): 79-82.
- He Xu-hui, Chen Zheng-qing, Huang Fang-lin, et al. Test of vibration mitigation of a stay cable on the Dongting Lake Bridge [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2002, 15(4): 79-82.
- [15] 王修勇, 陈政清, 倪一清, 等. 斜拉桥拉索磁流变阻尼器减振技术研究[J]. *中国公路学报*, 2003, 16(2): 52-56.
- Wang Xiu-yong, Chen Zheng-qing, Ni Yi-qing, et al. Study of mitigating cables vibration on the cable-stayed bridges using magnetorheological (MR) dampers [J]. *China Journal of Highway and Transport*, 2003, 16(2): 52-56.
- [16] Chen Z Q, Wang X Y, Ko J M, et al. MR damping system for mitigating wind-rain induced vibration on Dongting Lake Cable-Stayed Bridge [J]. *Wind and Structures*, 2004, 7(5): 293-304.
- [17] Li H, Liu M, Li J, et al. Vibration control of stay cables of the Shandong Binzhou Yellow River Highway Bridge using magnetorheological fluid dampers[J]. *Journal of Bridge Engineering*, 2007, 12(4): 401-409.
- [18] Zhou P, Li H. Modeling and control performance of a negative stiffness damper for suppressing stay cable vibrations[J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2016, 23(4): 764-782.
- [19] Shi X, Zhu S Y, Spencer B F. Experimental study on passive negative stiffness damper for cable vibration mitigation [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2017, 143(9): 04017070.
- [20] Shi X, Zhu S Y, Li J Y, et al. Dynamic behavior of stay cables with passive negative stiffness dampers[J]. *Smart Materials and Structures*, 2016, 25(7): 075044.
- [21] Lu L, Duan Y F, Spencer B F, et al. Inertial mass damper for mitigating cable vibration [J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2017, 24(10): e1986.
- [22] 李寿英, 李振宇, 陈政清. 黏滞惯性质量阻尼器对斜拉索减振效果的数值分析[J]. *中国公路学报*, 2019, 32(10): 230-236.
- Li Shou-ying, Li Zhen-yu, Chen Zheng-qing, et al. Numerical analysis on the effectiveness of viscous inertial mass dampers on stay cables of cable-stayed bridges[J]. *China Journal of Highway and Transport*, 2019, 32(10): 230-236.
- [23] 汪志昊, 郜辉, 许艳伟, 等. 惯性质量对斜拉索阻尼器减振增效作用试验研究[J]. *振动工程学报*, 2019, 32(3): 377-385.
- Wang Zhi-hao, Gao Hui, Xu Yan-wei, et al. Experimental study on the improvement effect of inertial mass on vibration control performance of stay cables with dampers [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2019, 32(3): 377-385.
- [24] Mehrabi A B, Tabatabai H. Unified finite difference formulation for free vibration of cables[J]. *Journal of Structural Engineering*, 1998, 11(124): 1313-1322.
- [25] Zhou H J, Zhou X B, Yao G Z, et al. Free vibration of two taut cables interconnected by a damper[J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2019, 26(10): e2423.

## Nonlinear viscous dampers paralleled with negative stiffness for cable vibration control

CHENG Zhi-peng<sup>1,2</sup>, WANG Zhi-hao<sup>1,2</sup>, GAO Hui<sup>1</sup>, YUE Fang-fang<sup>1</sup>

(1.School of Civil Engineering and Communication, North China University of Water Resources and Electric Power, Zhengzhou 450045, China; 2.National Engineering Laboratory for Bridge Structure Safety Technology, Beijing 100088, China)

**Abstract:** To enhance the cable vibration control performance of traditional passive linear viscous dampers (LVD), this paper investigates the cable vibration control performance of a negative stiffness parallel nonlinear viscous damper (NSNVD), which combines passive negative stiffness technique and nonlinear viscous damping characteristics. The linear equivalent model of the NSNVD is firstly obtained through the energy equivalent linearization method. Next, based on the complex modal analysis, the asymptotic and iterative solutions of the supplemental modal damping ratio of a taut cable are obtained, and compared with the numerical simulation solutions considering or neglecting the cable sag and bending stiffness. Accordingly, the applicability of the energy equivalent linearization method for the cable-NSNVD system is verified. Finally, based on the numerical simulation solutions considering the cable sag and bending stiffness, the parameter analysis of the single-mode vibration mitigation effect of the NSNVD and the optimization of the multi-mode vibration mitigation effect of the NSNVD on stay cables are carried out, which help to analyze the effects of the negative stiffness coefficient and viscous damping exponent of the NSNVD on single-mode and multi-mode vibration control performance of the cable. The results show that the passive negative stiffness of the NSNVD can significantly improve the single-mode vibration mitigation effect of stay cables. Moreover, both the negative stiffness and nonlinear viscous damping characteristics of the NSNVD are helpful to improve the multi-mode vibration mitigation effect of stay cables. Compared with the NVD and the NSLVD, the NSNVD presents more advantages in cable vibration control.

**Key words:** stay cables; passive negative stiffness; nonlinear viscous damper; multi-mode vibration control; modal damping ratio

**作者简介:**程志鹏(1994—),男,硕士研究生。E-mail: chengzhipeng1107@163.com。

**通讯作者:**汪志昊(1980—),男,博士,教授,博士生导师。E-mail: wangzhihao@ncwu.edu.cn。