

调频式钢轨阻尼器对曲线轨道动力特性影响研究

谭新宇, 刘卫丰

(北京交通大学土木建筑工程学院, 北京 100044)

摘要: 建立垂向安装有具有两阶自振频率的调频式钢轨阻尼器(Tuned Rail Damper, TRD)的曲线轨道频域解析模型。将此曲线轨道视为离散支承的无限周期结构,引入周期无限结构理论,结合频域模态叠加法,通过求解轨道某“基本元”内一点的动力响应,进而得到安装有 TRD 的曲线轨道上任意位置处的动力响应。对安装 TRD 的曲线轨道动力特性进行计算分析可知:TRD 能够显著降低曲线轨道在 TRD 自振频率附近频段内的振动响应并有效抑制曲线轨道的 pinned-pinned 共振;安装 TRD 后,曲线轨道钢轨振动衰减率明显增大;TRD 对不同半径曲线轨道的动力响应均具有一定的抑制作用;移动谐振荷载作用下,当荷载激振频率大于轨道自振频率时,安装 TRD 的曲线轨道时域振动响应被不同程度地抑制,当荷载激振频率与 TRD 自振频率一致时,轨道的振动响应显著降低。

关键词: 曲线轨道; 调频式钢轨阻尼器; 频域解析模型; 动力特性; 频响函数

中图分类号: U231; TB535 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2022)04-0866-10

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2022.04.010

引言

近年来,城市轨道交通迅猛发展。曲线轨道对地形地物具有高适应性,在城市轨道交通线路中被大量设置:以北京地铁为例,地铁线路中曲线轨道超过轨道总里程的 30%^[1]。然而,当地铁列车通过曲线轨道时,多种问题往往随之产生:例如曲线轨道时常产生大量异常钢轨波浪形磨耗^[2];列车通过曲线段时引起的地表振动响应有时会较直线段更大,并在某些情况下存在水平向振动强度高于铅垂向振动强度的特殊现象^[3]。

针对地铁列车运行引起的轨道振动和波磨发展问题,各国学者进行了较为广泛的研究,提出通过增加轨道系统阻尼的方式改变轨道的动力特性,以此达到控制轨道系统振动、减缓钢轨波磨产生和发展的目的。基于这一思想,在对钢轨振动特性进行研究之后,Thompson 等^[4]提出一种装配在轨道钢轨轨腰处的钢轨阻尼器模型,此为 TRD 的雏形。随后,Thompson^[5]发现通过设计阻尼器的自振频率,可以使整个轨道系统的阻尼得到提升,从而相应地降低列车运行引发的轮轨辐射噪声。Croft 等^[6]通过建立二维有限元,发现钢轨阻尼器可一定程度上使钢轨 pinned-pinned 共振频率发生改变,从而使轨道的动位移曲线变得平滑,以此达到控制钢轨波磨发展

的目的。文献[7-9]建立了直线轨道-TRD 模型,通过解析的方法求得了连续支承和离散支承形式下钢轨的动位移和振动衰减率,并模拟了钢轨波磨的发展过程,进一步证实了 TRD 在控制钢轨波磨发展和减小轮轨噪声方面的积极作用。近年来,刘卫丰等^[10-11]、陈嘉梁等^[12]通过锤击试验和现场实测发现,TRD 能使钢轨振动衰减率在某些频段内得到提升,有效控制钢轨波磨的发展,同时发现 TRD 在抑制钢轨振动方面也具有一定效果。总的说来,目前对 TRD 作用效果的研究多集中于直线轨道。曲线轨道较直线轨道而言,具有平面内和平面外弯扭耦合振动的特性^[13],故其振动特性更为复杂,但针对安装有 TRD 的曲线轨道动力特性的研究相对较少,因此,需要对这一问题进行进一步研究,确定 TRD 在曲线轨道中的性能表现。

对 TRD 的研究可通过解析法、数值模拟和现场测试的方式进行。相较而言,解析法能够更为准确地反映 TRD 的力学作用机理、提高计算效率,节省成本。本文采用频域解析法,将曲线钢轨简化为具有周期性的离散支承无限长 Timoshenko 梁,将 TRD 简化为由双质量块组成的质量-弹簧体系,仅考虑 TRD 和钢轨的垂向相互作用,建立安装有 TRD 的曲线轨道梁频域动力微分方程。引入无限周期结构理论和曲线轨道梁的数学模态,通过求解固定谐振荷载和移动谐振荷载分别作用时轨道“基本

收稿日期: 2020-12-22; 修订日期: 2021-03-26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51778049); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(2019YJS128)。

元”的动力响应得到曲线轨道任一点的动力响应,分析 TRD 对曲线轨道动力特性的影响。

1 曲线轨道-TRD 模型建立

1.1 TRD 的基本构造

TRD 由两部分组成,内部为按照特定几何和物理要求配置的质量块,外部为包裹质量块的具有高阻尼损耗因子的弹性材料,TRD 通过特定金属卡夹被紧密固定在钢轨轨腰的两侧。原理上,TRD 中质量块与弹性材料构成了具有高阻尼的弹簧-质量体系,体系的自振频率阶数与质量块的数量相同。通过对质量块的质量、相对位置以及弹性材料的刚度和阻尼等参数进行设计,可以调整 TRD 的自振频率,使轨道系统在特定频段内的阻尼得到提升,从而降低轨道系统的振动能量,抑制钢轨内能量的传播,达到控制轨道系统振动、减缓钢轨波磨产生和发展的目的,TRD 的横剖面示意图如图 1 所示。

1.2 曲线轨道-TRD 力学模型

由于 TRD 的长度较短,在建模计算中,质量块可被简化为具有一定质量的刚体^[7],故双层 TRD 可

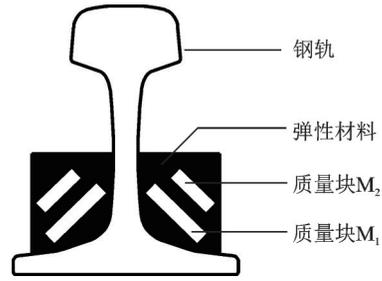


图 1 安装有 TRD 的钢轨横剖面示意图

Fig. 1 The cross-section of the rail with a TRD

被模拟为通过弹簧阻尼原件连接在钢轨上的具有双自振频率的弹簧-质量体系。本文仅考虑 TRD 和钢轨的垂向相互作用,以此为基础建立力学模型,对 TRD 的作用进行原理性探究。当安装有 TRD 的周期性离散支承无限长曲线 Timoshenko 梁受移动单位谐振荷载作用时,其力学模型示意图如图 2 所示。轨下支承扣件用等距离的弹簧阻尼原件模拟,TRD 装配在两相邻扣件跨中处。需要指出的是,模型中坐标系的正方向由右手螺旋法则确定,且同时假定 Timoshenko 梁为半径恒定的等截面均质梁,梁截面关于 y 轴对称;曲线 Timoshenko 梁的半径远大于梁截面尺寸以及梁长,且梁截面的形心与剪切中心重合。

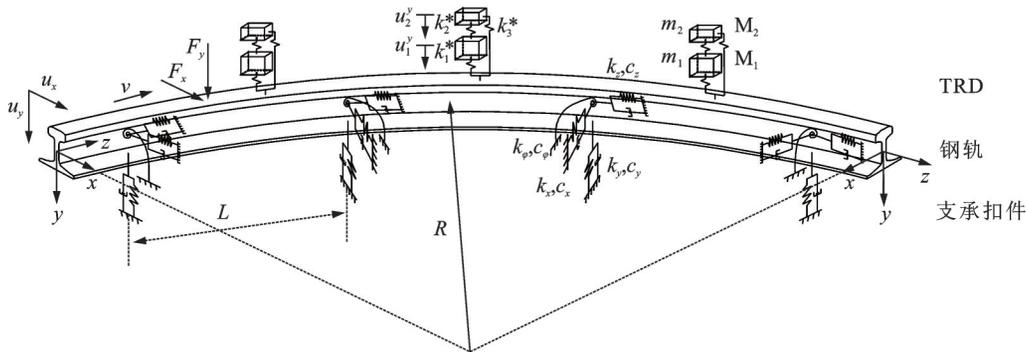


图 2 安装有 TRD 的曲线轨道结构力学模型示意图

Fig. 2 The mechanics model of the curved rail with TRDs

图中, m_1 和 m_2 分别为 TRD 中底部质量块 M_1 和顶部质量块 M_2 的质量; k_1^* , k_2^* 和 k_3^* 分别为钢轨与 M_1 , M_1 与 M_2 以及钢轨与 M_2 间的弹性层支承复刚度,复刚度均考虑弹性层的损耗因子 η , 记为 $k_j^* = k_j(1 + i\eta)$, 其中, k_j 为弹性层支承刚度且 $j=1, 2, 3$; u_x, u_y 分别为钢轨在 x, y 方向上的位移; u_1^y, u_2^y 分别为 M_1, M_2 的垂向位移; R 为曲线轨道的半径; L 为相邻两支承点间的距离,即轨道基本元的长度; k_x, k_y 和 k_z 分别为

扣件的径向、垂向以及绕 z 轴的扭转支承刚度; c_x, c_y 和 c_z 分别为扣件的径向、垂向和绕 z 轴的扭转支承阻尼系数; F_x 和 F_y 分别为作用在钢轨轨顶中心线的移动横向、垂向荷载,移动速度为 v 。

1.3 曲线轨道-TRD 模型的动力微分方程

当速度为 v , 激振频率为 ω_F 的横向、垂向移动单位谐振荷载 $e^{i\omega_F t}$ 作用于曲线轨道时,根据文献[14], 可推得钢轨在频域中的动力平衡方程为:

$$\frac{E^* A}{R^2} \hat{u}_x - K_x A G^* \frac{\partial^2 \hat{u}_x}{\partial z^2} - m \omega^2 \hat{u}_x - \frac{K_x A G^* + E^* A}{R} \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial z} + K_x A G^* \frac{\partial \hat{\phi}_y}{\partial z} + k_x^* \sum_{j=1}^{N_z} \hat{u}_x \delta(z - z_{ij}) = \frac{1}{v} e^{i\frac{\omega_F - \omega}{v}(z - z_i^0)} \quad (1)$$

$$\frac{K_x A G^* + E^* A}{R} \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial z} - E^* A \frac{\partial^2 \hat{u}_z}{\partial z^2} + K_x A G^* \frac{\hat{u}_z}{R^2} - m \omega^2 \hat{u}_z - \frac{K_x A G^*}{R} \hat{\phi}_y = 0 \quad (2)$$

$$-K_x A G^* \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial z} - \frac{K_x A G^*}{R} \hat{u}_z - E I_y \frac{\partial^2 \hat{\varphi}_y}{\partial z^2} + K_x A G^* \hat{\varphi}_y - \rho I_y \omega^2 \hat{\varphi}_y = 0 \quad (3)$$

$$-K_y A G^* \frac{\partial^2 \hat{u}_y}{\partial z^2} + K_y A G^* \frac{\partial \hat{\varphi}_x}{\partial z} - m \omega^2 \hat{u}_y + k_y^* \sum_{j=1}^{N_j} \hat{u}_y \delta(z - z_{tj}) - \sum_{k=1}^{N_c} k_1^* (\hat{u}_1^y - \hat{u}_y) \delta(z - z_{ck}) - \sum_{k=1}^{N_c} k_3^* (\hat{u}_2^y - \hat{u}_y) \delta(z - z_{ck}) = \frac{1}{v} e^{i \frac{\omega_F - \omega}{v} (z - z_0^F)} \quad (4)$$

$$-\frac{E^* I_x}{R} \frac{\partial \hat{\varphi}_z}{\partial z} + E^* I_x \frac{\partial^2 \hat{\varphi}_x}{\partial z^2} - \frac{G^* I_d}{R} \left(\frac{\hat{\varphi}_x}{R} + \frac{\partial \hat{\varphi}_z}{\partial z} \right) + K_y A G^* \left(\frac{\partial \hat{u}_y}{\partial z} - \hat{\varphi}_x \right) - \rho I_x \omega^2 \hat{\varphi}_x = 0 \quad (5)$$

$$-\frac{G^* I_d}{R} \frac{\partial \hat{\varphi}_x}{\partial z} - G^* I_d \frac{\partial^2 \hat{\varphi}_z}{\partial z^2} - \frac{E^* I_x}{R} \left(\frac{\partial \hat{\varphi}_x}{\partial z} - \frac{\hat{\varphi}_z}{R} \right) - \rho I_0 \omega^2 \hat{\varphi}_z + k_\varphi^* \sum_{j=1}^{N_j} \hat{\varphi}_z \delta(z - z_{tj}) = \frac{h}{v} e^{i \frac{\omega_F - \omega}{v} (z - z_0^F)} \quad (6)$$

式中 符号“ $\hat{\cdot}$ ”代表各物理量在频域中的相应表示； $E^* = E(1 + i\eta)$ 和 $G^* = G(1 + i\eta)$ 分别为考虑钢轨材料阻尼的弹性模量和剪切模量， η 为钢轨的损耗因子， E 为钢轨的弹性模量， G 为钢轨的剪切模量； $k_x^* = k_x + i c_x \omega$ ， $k_y^* = k_y + i c_y \omega$ ， $k_\varphi^* = k_\varphi + i c_\varphi \omega$ 分别为考虑阻尼影响的径向、垂向、扭转支承复刚度； K_x, K_y 分别为钢轨截面横向、垂向剪切因子； A 为钢轨截面面积； m 为钢轨单位长度质量； h 为钢轨轨顶到截面形心的垂向距离； I_d 为钢轨截面扭转常数； I_0 为钢轨截面极惯性矩； I_x 为绕 x 轴的截面惯性矩； I_y 为绕 y 轴的截面惯性矩； z_0^F 为移动荷载的起始坐标； z_{tj} 为第 j 个支承点的坐标； N_j 为计算范围内支承点的个数； z_{ck} 为第 k 个TRD的坐标； N_c 为计算范围内TRD的个数。

此时，第 k 个TRD的频域动力平衡方程为：

$$(k_1^* + k_2^* - m_1 \omega^2) \hat{u}_1^y \delta(z - z_{ck}) -$$

$$k_2^* \hat{u}_2^y \delta(z - z_{ck}) - k_1^* \hat{u}_y \delta(z - z_{ck}) = 0 \quad (7)$$

$$(k_2^* + k_3^* - m_2 \omega^2) \hat{u}_2^y \delta(z - z_{ck}) -$$

$$k_2^* \hat{u}_1^y \delta(z - z_{ck}) - k_3^* \hat{u}_y \delta(z - z_{ck}) = 0 \quad (8)$$

联立公式(7)和(8)，可将 $\hat{u}_1^y \delta(z - z_{ck})$ 和 $\hat{u}_2^y \delta(z - z_{ck})$ 用钢轨位移 $\hat{u}_y \delta(z - z_{ck})$ 表示，并最终可得：

$$(\hat{u}_1^y - \hat{u}_y) \delta(z - z_{ck}) = \alpha \hat{u}_y \delta(z - z_{ck}) \quad (9)$$

$$(\hat{u}_2^y - \hat{u}_y) \delta(z - z_{ck}) = \beta \hat{u}_y \delta(z - z_{ck}) \quad (10)$$

式中

$$\alpha = \frac{k_2^* k_3^* + k_2^{*2} + (-k_2^* + m_1 \omega^2)(k_2^* + k_3^* - m_2 \omega^2)}{(k_1^* + k_2^* - m_1 \omega^2)(k_2^* + k_3^* - m_2 \omega^2) - k_2^{*2}}$$

$$\beta = \frac{k_1^* k_2^* + k_2^{*2} + (k_1^* + k_2^* - m_1 \omega^2)(-k_2^* + m_2 \omega^2)}{(k_1^* + k_2^* - m_1 \omega^2)(k_2^* + k_3^* - m_2 \omega^2) - k_2^{*2}}$$

将式(9)和(10)代入式(4)后可得到仅包含钢轨

位移的曲线轨道动力平衡方程。

2 曲线轨道-TRD模型动力响应求解

本文通过引入无限周期结构理论以及曲线轨道梁的数学模态，分别求解移动和固定单位谐振荷载作用下曲线轨道在频域内的动力响应，轨道的时域动力响应结果可由逆Fourier变换得到。具体的，将周期离散支承的曲线轨道视为“基本元”长度为 L 的无限周期结构，将其映射到圆形轨道^[15]，则曲线钢轨在频域内的动力响应具有如下周期性关系^[16]：

$$\hat{u}(\tilde{z}, \omega, \omega_F) = e^{i(\omega_F - \omega)nL/v} \cdot \hat{u}(z, \omega, \omega_F) \quad (11)$$

式中 z 为钢轨上任意一点 \tilde{z} 在基本元内的映射点，满足 $\tilde{z} = z + nL$ ($0 \leq z < L$)， n 为基本元个数。

构造满足下式的辅助函数 $\hat{P}(z, \omega, \omega_F)$ ：

$$\hat{P}(z, \omega, \omega_F) = \hat{u}(z, \omega, \omega_F) e^{-i(\omega_F/v - \omega/v)z} \quad (12)$$

即可发现辅助函数为满足下式的周期性函数的形式：

$$\hat{P}(z + L, \omega, \omega_F) = \hat{P}(z, \omega, \omega_F) \quad (13)$$

可进一步通过Fourier级数将其表示为：

$$\hat{P}(z, \omega, \omega_F) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(\omega, \omega_F) e^{i\xi_n z} \quad (14)$$

式中 $C_n(\omega, \omega_F)$ 是Fourier级数系数； $\xi_n = 2\pi n/L$ 。

结合式(12)和(14)可得钢轨频域动力响应的级数表达：

$$\hat{u}(z, \omega, \omega_F) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(\omega, \omega_F) \hat{V}_n(z, \omega, \omega_F) \quad (15)$$

式中 $\hat{V}_n(z, \omega, \omega_F) = e^{i(\xi_n + \omega_F/v - \omega/v)z}$ 为移动谐振荷载作用下的曲线钢轨模态^[17]，令 $\kappa = (\omega - \omega_F)/v$ ，此时 $\hat{V}_n(z, \omega, \omega_F) = e^{i(\xi_n - \kappa)z}$ 。

由此，曲线钢轨不同方向的位移及扭转可表示为：

$$\hat{u}_i(z, \kappa, \omega_F) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_n^i(\kappa, \omega_F) \hat{V}_n(z, \kappa, \omega_F), \quad i=x, y, z \quad (16)$$

$$\hat{\phi}_j(z, \kappa, \omega_F) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_n^j(\kappa, \omega_F) \hat{V}_n(z, \kappa, \omega_F), \quad j=x, y, z \quad (17)$$

式中 对应于钢轨 x, y, z 方向位移和扭转变形各阶模态的模态坐标分别为 $U_n^i(\kappa, \omega_F)$ ($i=x, y, z$)和 $\Phi_n^j(\kappa, \omega_F)$ ($j=x, y, z$)。实际编程计算时,轨道梁模态 $\hat{V}_n(z, \kappa, \omega_F)$ 取满足计算精度要求的有限项。

$$K_x AG^* L(\xi_m - \kappa)^2 U_m^x - m(\omega_F + v\kappa)^2 LU_m^x - \frac{K_x AG^* + E^* A}{R} Li(\xi_m - \kappa) U_m^z + K_x AG^* Li(\xi_m - \kappa) \Phi_m^y + \frac{E^* A}{R^2} LU_m^x + k_x^* \sum_{j=1}^{N_x} \hat{u}_x(z_{tj}) \hat{V}_m^{-1}(z_{tj}) = \frac{1}{v} e^{i\kappa z_0^*} \int_0^L e^{-i\xi_m z} dz \quad (18)$$

$$\frac{K_x AG^* + E^* A}{R} Li(\xi_m - \kappa) U_m^x + E^* AL(\xi_m - \kappa)^2 U_m^z + \frac{K_x AG^*}{R^2} LU_m^z - m(\omega_F + v\kappa)^2 LU_m^z - \frac{K_x AG^*}{R} L\Phi_m^y = 0 \quad (19)$$

$$-K_x AGLi(\xi_m - \kappa) U_m^x - \frac{K_x AG^*}{R} LU_m^z + EI_y L(\xi_m - \kappa)^2 \Phi_m^y + K_x AG^* L\Phi_m^y - \rho I_y (\omega_F + v\kappa)^2 L\Phi_m^y = 0 \quad (20)$$

$$-K_y AG^* L(\xi_m - \kappa)^2 U_m^y + K_y AG^* Li(\xi_m - \kappa) \Phi_m^x - m(\omega_F + v\kappa)^2 LU_m^y + k_y^* \sum_{j=1}^{N_y} \hat{u}_y(z_{tj}) \hat{V}_m^{-1}(z_{tj}) - \sum_{e=1}^{N_e} (k_1^* A + k_3^* B) \hat{u}_y(z_{ek}) \hat{V}_m^{-1}(z_{ek}) = \frac{1}{v} e^{i\kappa z_0^*} \int_0^L e^{-i\xi_m z} dz \quad (21)$$

$$K_y AG^* Li(\xi_m - \kappa) U_m^y - E^* I_x L(\xi_m - \kappa)^2 \Phi_m^x - \left(\frac{G^* I_d}{R} + K_y AG^* \right) L\Phi_m^x - \rho I_x (\omega_F + v\kappa)^2 L\Phi_m^x - \frac{E^* I_x + G^* I_d}{R} Li(\xi_m - \kappa) \Phi_m^z = 0 \quad (22)$$

$$-\frac{E^* I_x + G^* I_d}{R} Li(\xi_m - \kappa) \Phi_m^x + G^* I_d L(\xi_m - \kappa)^2 \Phi_m^z - \rho I_0 (\omega_F + v\kappa)^2 L\Phi_m^z + \frac{E^* I_x}{R^2} L\Phi_m^z + k_\varphi^* \sum_{j=1}^{N_\varphi} \hat{\phi}_z(z_{tj}) \hat{V}_m^{-1}(z_{tj}) = \frac{h}{v} e^{i\kappa z_0^*} \int_0^L e^{-i\xi_m z} dz \quad (23)$$

整理式(18)~(23),可得:

$$G(\kappa, \omega_F) C(\kappa, \omega_F) = P(\kappa, \omega_F) L e^{i\kappa z_0^*} / v \quad (24)$$

式中 $G(\kappa, \omega_F)$ 为 $(NMR \times 6)$ 阶已知方阵; $C(\kappa, \omega_F)$ 为待求的 $NMR \times 6$ 阶钢轨模态坐标列向量,记为

$$C(\kappa, \omega_F) = [U_{-N}^x, \dots, U_N^x, U_{-N}^z, \dots, U_N^z, \Phi_{-N}^y, \dots, \Phi_N^y, U_{-N}^y, \dots, U_N^y, \Phi_{-N}^x, \dots, \Phi_N^x, \Phi_{-N}^z, \dots, \Phi_N^z]^T;$$

$P(\kappa, \omega_F)$ 为 $NMR \times 6$ 阶外荷载列向量,其第 j 行的值满足下式:

$$P_j(\kappa, \omega_F) = \begin{cases} 1, & j = N + 1 \\ 1, & j = NMR \times 3 + N + 1 \\ 1, & j = NMR \times 5 + N + 1 \\ 0, & j = \text{其他} \end{cases} \quad (25)$$

将式(25)代入式(24)即可求得各阶模态对应的模态坐标,即:

2.1 移动谐振荷载作用下曲线轨道-TRD模型动力响应求解

取 $2N+1$ 项钢轨模态,记为 $NMR=2N+1$ ($-N \sim +N$),之后将式(16)和(17)代入式(1)~(6),同时在方程两边同乘 $\hat{V}_m(z, \kappa, \omega_F)^{-1} = e^{-i(\xi_m - \kappa)z}$ ($m \in [-N, N]$),之后在方程两边同时对 z 在 $[0, L]$ 上进行积分,根据模态坐标的正交性与Dirac函数的筛选特性可得:

$$C(\kappa, \omega_F) = G(\kappa, \omega_F)^{-1} PL e^{i\kappa z_0^*} / v \quad (26)$$

将式(26)代入式(16)及(17)后,根据式(11)的周期性关系,可最终求得钢轨上 \bar{z} 点处的位移振动响应:

$$\begin{aligned} \hat{D}(\bar{z}, \kappa, \omega_F) &= e^{-i\kappa L} \hat{D}(z, \kappa, \omega_F) = \\ e^{-i\kappa L} B(z, \kappa, \omega_F) C(\kappa, \omega_F) &= \\ e^{-i\kappa L} B(z, \kappa, \omega_F) G^{-1}(\kappa, \omega_F) P L e^{i\kappa z_0^*} / v & \quad (27) \end{aligned}$$

式中 $\hat{D}(\bar{z}, \kappa, \omega_F) =$

$$\begin{aligned} & \left[u_x(\bar{z}, \kappa, \omega_F), u_z(\bar{z}, \kappa, \omega_F), \varphi_y(\bar{z}, \kappa, \omega_F), \right. \\ & \left. u_y(\bar{z}, \kappa, \omega_F), \varphi_x(\bar{z}, \kappa, \omega_F), \varphi_z(\bar{z}, \kappa, \omega_F) \right]^T; \end{aligned}$$

$$\hat{D}(z, \kappa, \omega_F) = \begin{bmatrix} u_x(z, \kappa, \omega_F), u_z(z, \kappa, \omega_F), \varphi_y(z, \kappa, \omega_F), \\ u_y(z, \kappa, \omega_F), \varphi_x(z, \kappa, \omega_F), \varphi_z(z, \kappa, \omega_F) \end{bmatrix}^T;$$

$B(z, \kappa, \omega_F)$ 是由曲线轨梁模态构成的 $6 \times (6 \times NMR)$ 阶矩阵,具体表示为:

$$B(z, \kappa, \omega_F) = \begin{bmatrix} B' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B' \end{bmatrix}$$

其中, $B' = [e^{i(\xi_N - \kappa)}, \dots, e^{i(\xi_N - \kappa)}]$, 为已知 NMR 阶行向量; 0 为 NMR 阶零向量。

2.2 固定谐振荷载作用下曲线轨道-TRD 模型动力响应求解

通过对 2.1 节得到的曲线轨道频域振动响应进行逆 Fourier 变换可得其时域振动响应:

$$D(\tilde{z}, t, \omega_F) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{D}(\tilde{z}, \omega, \omega_F) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{D}(\tilde{z}, \kappa, \omega_F) e^{i(\omega_F + v\kappa)t} v d\kappa = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} L e^{-i\kappa(nL - z_0^F)} B(z, \kappa, \omega_F) G(\kappa, \omega_F)^{-1} \cdot P(\kappa, \omega_F) e^{i v \kappa t} d\kappa \right] e^{i\omega_F t} \quad (28)$$

取式(28)中的荷载移动速度 $v=0$, 即可得到固定谐振荷载作用下, 钢轨位移时域响应:

$$D(\tilde{z}, t, \omega_F) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} L e^{-i\kappa(nL - z_0^F)} B(z, \kappa, \omega_F) \cdot G(\kappa, \omega_F)^{-1} P'(\kappa, \omega_F) d\kappa \right] e^{i\omega_F t} \quad (29)$$

由式(29)可知, 固定谐振荷载作用下, 钢轨的时域振动响应也是简谐的, 且其位移最大值为:

$$D_{\max}(\tilde{z}, t, \omega_F) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} L e^{-i\kappa(nL - z_0^F)} B(z, \kappa, \omega_F) \cdot G(\kappa, \omega_F)^{-1} P'(\kappa, \omega_F) d\kappa \quad (30)$$

通过求解不同激振频率固定谐振荷载作用下的曲线轨道钢轨的位移时域振动响应幅值, 即可得到曲线轨道的频率响应函数。

3 TRD 对曲线轨道动力特性影响分析

本节在前文理论推导基础之上, 使用 MATLAB 软件进行编程, 对曲线轨道安装 TRD 前后的动力特性进行计算分析。

首先对理论推导和编程计算结果的正确性进行验证。文献[18]给出了求解移动谐振荷载作用下直

线轨道振动响应的解析方法。与其选用相同的计算参数, 利用本文方法计算了激振频率为 250 Hz 的单位谐振荷载以 $v=60$ km/h 的速度移动时, 直线轨道在 $z=30$ m 位置处的钢轨振动加速度响应, 两种方法的计算结果如图 3 所示。可以看出两种计算方法所得结果吻合良好, 验证了本文理论和编程的正确性。

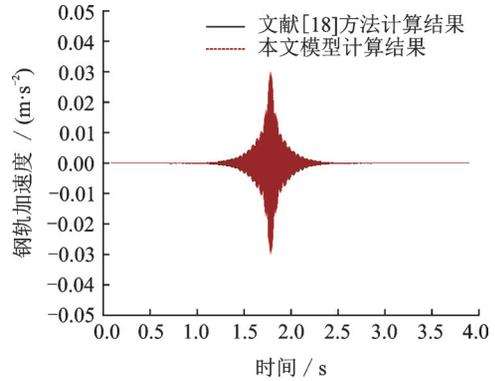


图 3 激振频率为 250 Hz 的移动谐振荷载作用下钢轨振动加速度响应图

Fig. 3 The acceleration response in the time domain of the rail under a moving vertical harmonic load ($f=250$ Hz)

线 Wu^[9] 给出了求解安装单质量块 TRD 的直线 Euler-Bernoulli 梁动力响应的时域算法, 并得到了固定单位谐振荷载作用下梁跨中处的垂向动位移曲线。为进一步说明本文方法可应用于研究 TRD 对轨道振动响应特性的影响, 应用本文频域方法对该问题进行计算, 两种方法所得结果如图 4 所示。

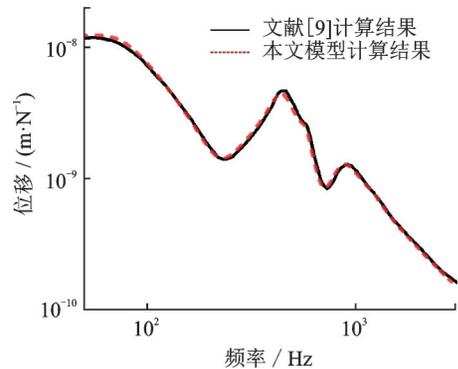


图 4 安装有 TRD 的直线梁跨中处位移频响函数

Fig. 4 FRFs of the beam with TRD at mid-span point

由图 4 可以看出, 两种方法计算得到的梁跨中处的振动响应吻合度极高, 进一步说明可利用本文方法对 TRD 对钢轨振动响应的影响进行研究。接下来, 本文将基于此方法, 对安装双质量块 TRD 的普通整体道床轨道的动力响应进行计算。轨道及扣件参数如表 1 所示, TRD 参数如表 2 所示。在表 2 所示参数下, 利用结构动力学^[19]中双自由度体系的自振频率计算方法可得 TRD 的两阶自振频率分别为 250 和 700 Hz。

表 1 T60 钢轨及 DTVI₂扣件参数表^[13]
Tab. 1 Parameters of the T60 rail and the DTVI₂ fastener^[13]

参数	数值
钢轨质量 $m/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-1})$	60.64
钢轨弹性模量 $E/(\text{N}\cdot\text{m}^{-2})$	2.059×10^{11}
钢轨剪切模量 $G/(\text{N}\cdot\text{m}^{-2})$	7.919×10^{10}
钢轨截面惯性矩 I_x/m^4	3.217×10^{-5}
钢轨截面扭转常数 I_d/m^4	0.2151×10^{-5}
钢轨截面极惯性矩 I_0/m^4	3.714×10^{-5}
钢轨损耗因子 η	0.01
钢轨密度 $\rho/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	7830
钢轨泊松比 μ	0.3
曲线半径 R/m	300
扣件间距 L/m	0.6
第一个扣件的位置 z/m	0.3
钢轨截面垂向剪切因子 K_y	0.5329
钢轨截面横向剪切因子 K_x	0.4507
横向支承刚度 $k_x/(\text{MN}\cdot\text{m}^{-1})$	41.67
横向支承阻尼系数 $c_x/(\text{kN}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1})$	27.83
垂向支承刚度 $k_y/(\text{MN}\cdot\text{m}^{-1})$	66.67
垂向支承阻尼系数 $c_y/(\text{kN}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1})$	50
纵向支承刚度 $k_z/(\text{MN}\cdot\text{m}^{-1})$	41.67
纵向支承阻尼系数 $c_z/(\text{kN}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1})$	27.83
扭转支承刚度 $k_\varphi/(\text{MN}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1})$	375
扭转支承阻尼系数 $c_\varphi/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1})$	266.67

表 2 TRD 参数表^[7]
Tab. 2 Parameters of the TRD^[7]

参数	数值
底部刚体 M_1 质量 m_1/kg	8.4
顶部刚体 M_2 质量 m_2/kg	3.6
连接刚度 $k_1/(\text{MN}\cdot\text{m}^{-1})$	156
连接刚度 $k_2/(\text{MN}\cdot\text{m}^{-1})$	7.2
连接刚度 $k_3/(\text{MN}\cdot\text{m}^{-1})$	1.8

3.1 曲线轨道频率响应特性分析

为探究 TRD 对曲线轨道频响特性的影响,本节计算了垂向固定单位谐振荷载作用时,安装 TRD 前后曲线轨道钢轨跨中处 ($z=24\text{ m}$) 和扣件处 ($z=24.3\text{ m}$) 的位移频响函数。计算不同工况时,保证该工况下的激振点和拾振点位于相同位置。曲线钢轨的垂向位移频响函数计算结果如图 5 所示,由此可见:

(1) 未安装 TRD 前,计算所得曲线钢轨的垂向一阶自振频率和一阶 pinned-pinned 共振频率分别为 149 和 1160 Hz。文献[19]给出了单位长度 Timoshenko 梁与扣件构成的含阻尼单自由度弹簧-质量系统的垂

向自振频率计算公式为 $\frac{1}{2mL}\sqrt{4k_y mL - c_y^2}/(2\pi)$;同时给出离散支撑 Timoshenko 梁垂向第 n 阶 pinned-pinned 共振频率计算公式 $f_{ppn}^n =$

$$\frac{n^2\pi}{2L^2}\sqrt{\frac{EI_x}{m}\left\{1 + \frac{n^2\pi^2 I_x}{L^2 A}\left[1 + \frac{2(1+\mu)}{K_y}\right]\right\}}$$

1 所示参数,通过公式求得钢轨垂向一阶自振频率和一阶 pinned-pinned 共振频率分别为 153 和 1136 Hz。由此可见,本文计算结果与理论结果基本相等,进一步验证了本文计算方法和结果的正确性。

(2) 跨中处出现钢轨垂向一阶 pinned-pinned 共振响应峰值,扣件处出现钢轨垂向一阶 pinned-pinned 反共振响应峰值。安装 TRD 后,钢轨的 pinned-pinned 共振响应和反共振响应均得到较大程度地抑制。

(3) 装配 TRD 后,轨道系统自重增加导致系统自振频率向低频方向移动。无论在跨中位置还是扣件位置处,曲线钢轨在 200~750 Hz 频段内的振动响应均有所减小且在 TRD 两阶自振频率 (250 和 700 Hz) 处减小明显,这是由于 TRD 的装配提高了轨道系统在 TRD 两阶自振频率围成的频段范围内,尤其是 TRD 自振频率处的阻尼,使钢轨在该频段内的振动能量被消散,减小了钢轨的振动响应。

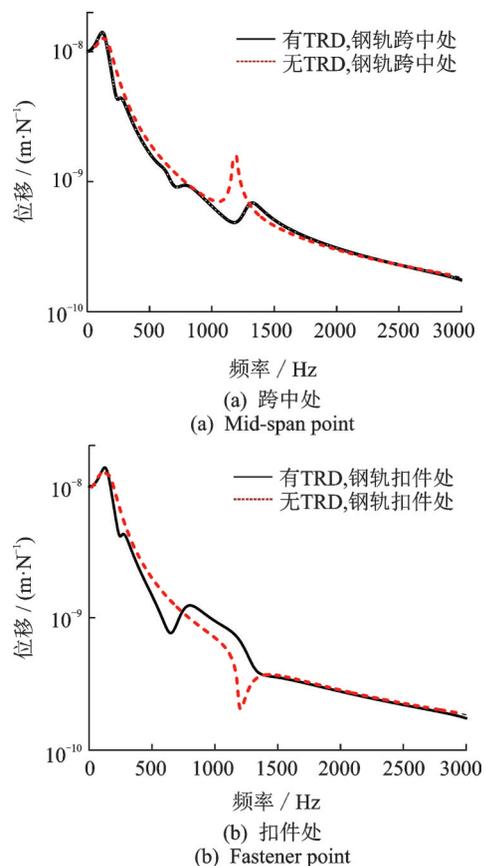


图 5 曲线钢轨垂向位移频响函数

Fig. 5 Vertical FRFs of the curved rail with or without TRD

3.2 曲线轨道系统垂向钢轨振动衰减率分析

钢轨振动衰减率能够表征轨道结构对钢轨在某频段内振动的抑制能力,钢轨振动衰减率越大说明该轨道系统的阻尼越大,对钢轨振动的抑制作用越明显。图6给出了安装TRD前后曲线轨道系统的垂向钢轨振动衰减率。由图可知:

(1)在钢轨pinned-pinned共振频率处,轨道的钢轨振动衰减率最小,表明轨道系统在此频段内的阻尼值较小,钢轨振动较为剧烈。

(2)TRD的安装极大地提高了曲线轨道系统在200 Hz以上的钢轨振动衰减率,在某些频段内作用效果尤其显著,其中,轨道系统在TRD两阶自振频率处和钢轨pinned-pinned共振频率处的钢轨振动衰减率显著提升,说明轨道系统在相应频率处的阻尼大大提高,钢轨的振动响应相应减小。

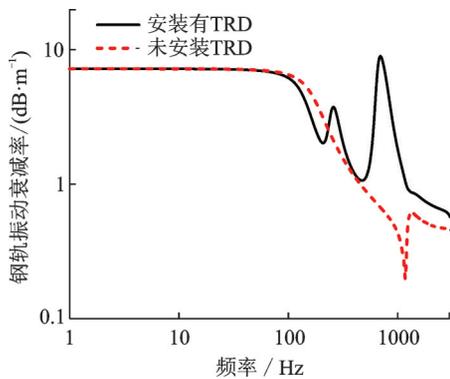


图6 TRD装配前后轨道钢轨垂向振动衰减率

Fig. 6 Vertical decay rate of the rail with or without TRD

3.3 TRD在不同半径轨道中的效果研究

文献[20]中指出,曲线轨道存在弯扭耦合振动特性且曲线半径对其影响较大,当计算与激振力方向成正交方向的轨道位移响应时,曲线半径的大小对位移响应的结果有显著影响。故本节对横向固定谐振荷载作用于不同曲线半径的钢轨时,TRD对其垂向位移频响特性的影响进行探究。图7给出了曲线半径为300 m时,TRD安装前后钢轨跨中处在横向固定单位谐振荷载作用下的垂向位移频响函数。图8给出了曲线半径分别为100,300,800 m以及直线轨道情况下,安装TRD前后钢轨跨中处在横向固定谐振荷载作用下的垂向位移频响函数。

由图7可知:当在横向固定谐振荷载作用下,钢轨的垂向位移振动响应较为复杂。垂向位移频响函数同时受钢轨的自振频率以及其横向、垂向和扭转模态影响。在TRD自振频率附近的频段内,钢轨的振动响应受到一定程度的抑制,且TRD能够大幅减小钢轨在某些峰值频率处(1200 Hz,1750 Hz)的振动响应。总的看来,安装TRD后钢轨的振动响应在全

频段基本不高于未装配TRD时钢轨的振动响应。由图8(a)可知:在横向固定荷载作用下,不同半径的曲线钢轨在未装配TRD前,钢轨垂向频响函数曲线的走势一致,仅在数值上有较大差别,曲线半径越大其振动响应越小,直线轨道情况下最小。图8(b)表明:装配TRD后,钢轨垂向频响函数曲线的特点与装配TRD前相似,即频响函数曲线走势基本一致,但在数值上随半径的增加而减小。综合图7和图8可知,对于任何半径的钢轨,在横向荷载作用下,TRD对其在垂向上的振动响应均有一定的抑制作用。

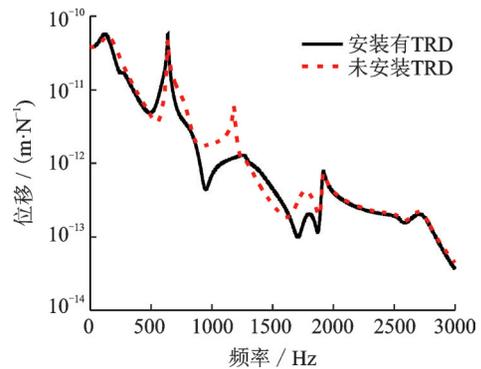
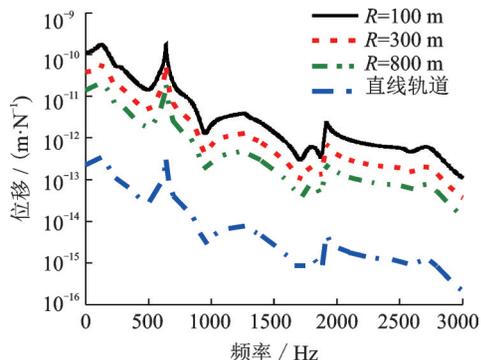
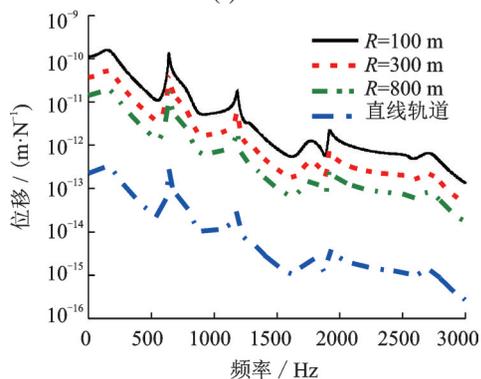


图7 TRD安装前后横向固定谐振荷载作用下半径为300 m钢轨跨中的垂向位移频响函数

Fig. 7 Vertical FRF of rail with or without TRD at mid-span point under a lateral fixed harmonic load ($R=300$ m)



(a) 装配有TRD
(a) With TRD



(b) 未装配TRD
(b) Without TRD

图8 横向固定谐振荷载作用下安装TRD前后的不同半径钢轨跨中的垂向位移频响函数

Fig. 8 Vertical FRF of the rail with or without TRD at mid-span point with different radius subjected to a lateral fixed harmonic load

3.4 移动谐振荷载作用下轨道的振动特性分析

为探究移动谐振荷载作用下 TRD 对轨道振动的抑制效果,本节计算了激振频率从 0 到 1500 Hz 的垂向单位谐振荷载以 60 km/h 的速度沿钢轨中心线运动时,TRD 安装前后钢轨跨中位置处(拾振点坐标为 24 m)的时域垂向位移响应峰值,如图 9 所示。图 10 和 11 分别给出了激振频率为 250 Hz 和 700 Hz (与 TRD 自振频率相同)时的垂向移动单位谐振荷载作用下钢轨振动响应时程和频谱图,进一步探究 TRD 的作用效果。

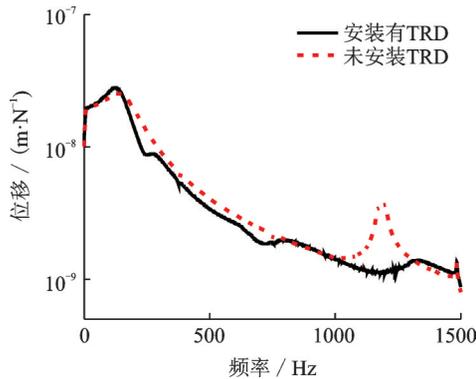


图 9 安装 TRD 前后不同频率移动谐振荷载作用下的钢轨跨中处时域位移响应最大值

Fig. 9 Rail's vertical displacement amplitude in the time domain under moving vertical harmonic load with different frequencies with or without TRD

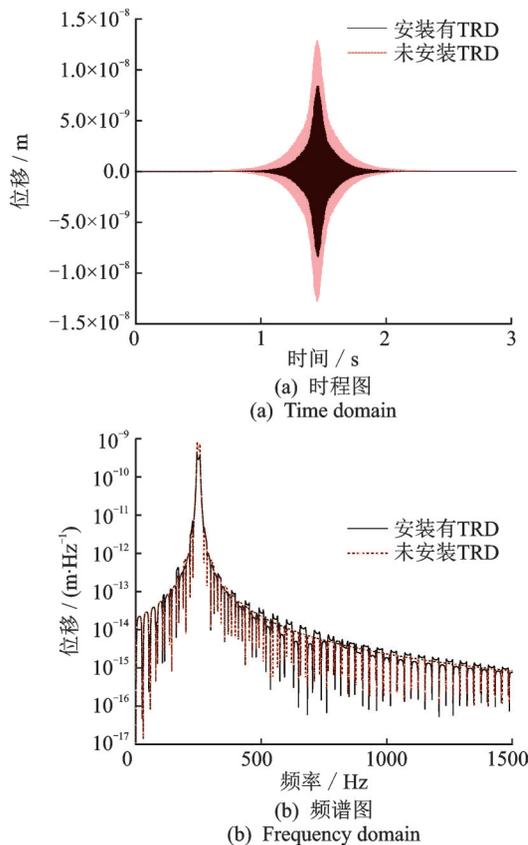


图 10 激振频率为 250 Hz 的移动谐振荷载作用下的钢轨跨中处振动响应图

Fig. 10 Vertical dynamic response of the rail at mid-span point under a vertical moving harmonic load ($f=250$ Hz)

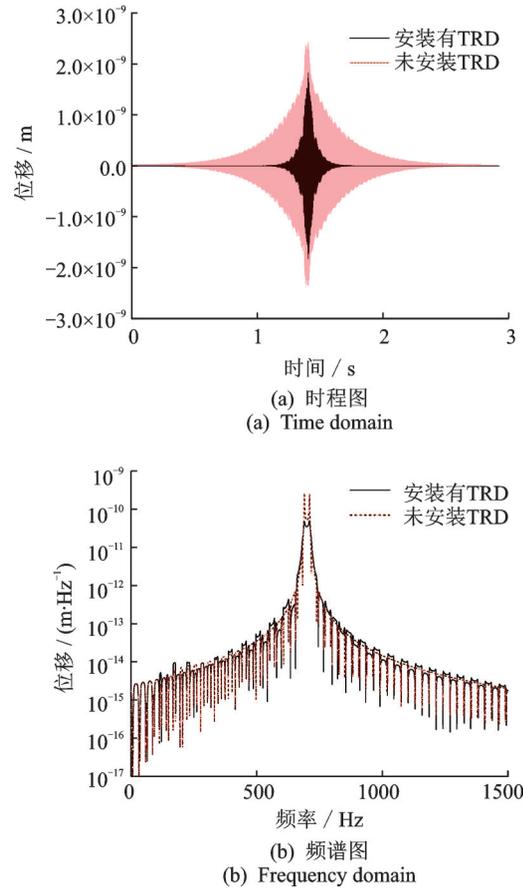


图 11 激振频率为 700 Hz 的移动谐振荷载作用下的钢轨振动响应图

Fig. 11 Vertical dynamic response of the rail at mid-span point under a vertical moving harmonic load ($f=700$ Hz)

从图 9~11 可以看出:

(1)移动谐振荷载作用下,荷载激振频率对钢轨动力响应有显著影响。以钢轨的自振频率为界,当移动荷载的激振频率小于钢轨的自振频率时,钢轨的时域振动响应峰值随荷载激振频率的增大而增大;当荷载激振频率大于轨道系统自振频率时,钢轨的时域响应最大值随荷载激振频率的增大而减小。当移动荷载的激振频率在轨道 pinned-pinned 共振频率附近,钢轨的振动时域响应最大值得到显著提高。

(2)安装 TRD 后,当移动荷载的激振频率小于钢轨的自振频率时,钢轨振动的时域响应最大值有一定程度的增加;当移动荷载的激振频率大于钢轨自振频率时,TRD 的安装明显减小了钢轨时域振动响应峰值。且当移动荷载的激振频率等于 TRD 的自振频率和轨道系统的 pinned-pinned 共振频率时,TRD 对钢轨振动时域响应最大值的抑制作用更为显著。

(3)当移动荷载激振频率与 TRD 的两阶自振频率相同时,曲线钢轨在时域内的振动响应时长和幅值均明显减小,TRD 的减振效果显著。

(4)由频谱图可知,安装 TRD 后,钢轨振动响应

峰值减小,且钢轨在TRD自振频率附近频段内的振动响应呈现减小的趋势;在远离TRD自振频率的频段中,钢轨的振动响应在安装TRD前后变化不明显。

4 结 论

(1) TRD对由于离散支承引起的曲线钢轨pinned-pinned共振具有明显的抑制作用,同时能够有效降低曲线钢轨在TRD自振频率附近频段内的振动响应。

(2) 安装TRD后,轨道系统的垂向钢轨振动衰减率在较大频率范围内得到提升。在TRD的自振频率以及钢轨的一阶pinned-pinned共振频率处,钢轨的振动衰减率显著提升,轨道系统的阻尼得到有效地提高,对减小钢轨振动有积极作用。

(3) TRD的安装能有效抑制横向荷载作用下钢轨的垂向振动响应,且其对半径不同钢轨的垂向振动响应均有一定的抑制效果。

(4) 垂向移动谐振荷载作用下,随激振频率的增加,钢轨在时域内振动的垂向位移响应峰值先增大后减小。当荷载激振频率高于轨道自振频率时,TRD对轨道振动呈现抑制效果;且当荷载激振频率与TRD自振频率、轨道pinned-pinned共振频率相等时,TRD对钢轨振动的抑制效果尤为显著,钢轨振动时长和幅值均明显减小。

参考文献:

- [1] 杜林林. 地铁列车曲线运行车轨耦合解析模型及振源特性研究[D]. 北京: 北京交通大学, 2018.
Du Linlin. On the spectral and amplitude features of vehicle-track vibration sources in a curved subway tunnel [D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2018.
- [2] Zhang Hougui, Liu Weining, Liu Weifeng, et al. Study on the cause and treatment of rail corrugation for Beijing metro[J]. Wear, 2014, 317(1-2):120-128.
- [3] 袁扬, 刘维宁, 刘卫丰. 基于现场测试的曲线段地铁地面振动传播规律[J]. 中国铁道科学, 2012, 33(4): 133-138.
Yuan Yang, Liu Weining, Liu Weifeng. Propagation law of ground vibration in the curve section of metro based on in-situ measurement[J]. China Railway Science, 2012, 33(4): 133-138.
- [4] Thompson D J, Jones C J C, Waters T P, et al. A tuned damping device for reducing noise from railway track[J]. Applied Acoustics, 2007, 68(1): 43-57.
- [5] Thompson D J. A continuous damped vibration absorber to reduce broad-band wave propagation in beams[J]. Journal of Sound & Vibration, 2008, 311(3): 824-842.
- [6] Croft B E, Jones C J C, Thompson D J. Modelling the effect of rail dampers on wheel-rail interaction forces and rail roughness growth rates[J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 323(1): 17-32.
- [7] Wu Tianxing. On the railway track dynamics with rail vibration absorber for noise reduction [J]. Journal of Sound & Vibration, 2008, 309(3): 739-755.
- [8] Liu H P, Wu T X, Li Z G. Theoretical modelling and effectiveness study of rail vibration absorber for noise control[J]. Journal of Sound & Vibration, 2009, 323(3): 594-608.
- [9] Wu Tianxing. Effects on short pitch rail corrugation growth of a rail vibration absorber/damper [J]. Wear, 2011, 271(1): 339-348.
- [10] 刘卫丰, 张厚贵, 孟磊, 等. 北京地铁采用调频式钢轨减振器抑制钢轨振动的试验研究[J]. 振动工程学报, 2016, 29(1): 105-111.
Liu Weifeng, Zhang Hougui, Meng Lei, et al. A test of suppressing rail vibration by tuned rail damper for Beijing metro[J]. Journal of Vibration Engineering, 2016, 29(1): 105-111.
- [11] 刘卫丰, 张厚贵, 陈嘉梁, 等. 北京地铁采用调频式钢轨减振器治理钢轨波磨的试验研究[J]. 振动工程学报, 2019, 32(4): 695-700.
Liu Weifeng, Zhang Hougui, Chen Jialiang, et al. A test of treating rail corrugation by tuned rail damper for Beijing metro [J]. Journal of Vibration Engineering, 2019, 32(4): 695-700
- [12] 陈嘉梁, 刘维宁, 刘卫丰, 等. 北京地铁DTVI2扣件钢轨波磨整治措施的试验研究[J]. 机械工程学报, 2018, 54(4): 64-69.
Chen Jialiang, Liu Weining, Liu Weifeng, et al. Demonstration test on treatment solution against rail corrugation occurs at DTVI2 fastener track sections in Beijing Metro[J]. Journal of Mechanical Engineering. 2018, 54(4): 64-69.
- [13] 杜林林, 刘维宁, 刘卫丰, 等. 固定谐振荷载作用下曲线轨道动力响应特性研究[J]. 振动与冲击, 2017, 36(20): 233-239+247.
Du Linlin, Liu Weining, Liu Weifeng, et al. A study on curved track dynamic response under a fixed harmonic load [J]. Journal of Vibration and Shock. 2017, 36(20): 233-239+247.
- [14] Lee J. In-plane free vibration analysis of curved Timoshenko beams by the pseudospectral method [J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2003, 17(8): 1156-1163.
- [15] Martínez-Casas J, Di Gialleonardo E, Bruni S, et al. A comprehensive model of the railway wheelset-track in-

- teraction in curves[J]. Journal of Sound and Vibration, 2014, 333(18): 4152-4169.
- [16] Belotserkovskiy P M. Forced oscillations of infinite periodic structures. applications to railway track dynamics [J]. Vehicle System Dynamics, 1998, 29 (sup1) : 85-103.
- [17] 马龙祥. 基于无限-周期结构理论的车轨耦合及隧道-地层振动响应分析模型研究[D]. 北京: 北京交通大学, 2014.
- Ma Longxiang. Study on the model of coupled vehicle & track and the analysis model for tunnel-ground vibration response based on the periodic-infinite structure theory[D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2014.
- [18] 马龙祥,刘维宁,刘卫丰. 移动荷载作用下周期支撑轨道结构振动研究[J]. 中国铁道科学, 2013, 34(1): 1-7.
- Ma Longxiang, Liu Weining, Liu Weifeng. Study on vibration of periodic supported track structure under moving loads [J]. China Railway Science, 2013, 34 (1) : 1-7.
- [19] 刘晶波,杜修力. 结构动力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2005.
- Liu Jingbo, Du Xiuli. Structural Dynamics [M]. Beijing: China Machine Press, 2005
- [20] Liu Weifeng, Du Linin, Liu Weining, et al. Dynamic response of a curved railway track subjected to harmonic loads based on the periodic structure theory [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part F-Journal of Rail and Rapid Transit, 2018, 232 (7) : 1932-1950.

The influence of the tuned rail damper (TRD) on the dynamic response of the curved track

TAN Xin-yu, LIU Wei-feng

(School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: A curved track-TRD analytical model is established in this paper. The TRD has two natural frequencies and the curved track is simulated by the discretely supported Timoshenko beam based on the theory of infinite-periodical structure. By using mode superposition method in frequency domain, the dynamic response of one point on the track can be obtained by calculating the track dynamic response at the corresponding point in a basic cell. After obtaining the dynamic response of the curved track-TRD model, some conclusions can be drawn. TRD is effective on controlling the track vibration in a broad frequency range and restraining the pinned-pinned resonance of the track. The rail decay rate increases after the TRD is installed. TRD can restrain the dynamic response of tracks with different radius. The dynamic response of the track under a moving harmonic load is reduced when the load frequency is higher than the first order natural frequency of the track. The vibration response of the track is significant reduced when the excitation frequency of the moving load is equal to the natural frequencies of the TRD or the frequency of the track pinned-pinned resonance.

Key words: curved track; tuned rail damper; analytical model in frequency domain; dynamic characteristics; frequency response function

作者简介: 谭新宇(1994—),男,博士研究生。电话:(010)51682752; E-mail: 16115276@bjtu.edu.cn。

通讯作者: 刘卫丰(1975—),男,副教授。电话:(010)51682752; E-mail: wfliu@bjtu.edu.cn。