基于分形理论的两粗糙表面接触的黏滑摩擦模型

周 华，龙新华，孟 光

（上海交通大学机械系统与振动国家重点实验室，上海 200240）

摘要：两粗糙表面的接触本质上是大量微凸体的接触，具有复杂的力学行为，连接界面的力学建模是重要的科学问题。从微观角度出发，对单个微凸体进行接触分析，并考虑了微凸体相互作用造成的基底面的下降，根据分形理论积分，建立了整个接触面的法向接触模型。利用该模型，可确定在给定法向预紧载荷下微接触截面积的概率密度函数；根据Mindlin模型、Masing准则和分形理论，建立了两粗糙表面接触的切向载荷与切向位移的关系，并研究了不同参数对系统能量耗散的影响。数值仿真结果表明，能量耗散随分形维数D增大而增大，随分形粗糙度参数G及法向预紧力增大而降低。

关键词：分形接触模型；黏滑摩擦；粗糙表面；迟滞非线性；能量耗散

中图分类号：O344；O322 **文献标志码：**A **文章编号：**1004-4523(2022)04-0895-08

DOI：10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2022.04.013

引 言

机械结构中存在大量的连接界面，例如螺栓连接。这些连接界面受到法向紧固载荷后，能够承受切向载荷。从微观角度看，在切向载荷作用下，连接表面大量的微凸体接触会发生黏着和滑移等行为，使连接界面呈现出复杂的非线性行为。建立两粗糙表面接触的切向黏滑摩擦模型一直是具有挑战性的问题。

两粗糙表面的接触模型可以分为统计模型和分形模型。Greenwood等[1]假设微凸体高度满足高斯分布，并基于统计方法建立了法向接触模型（GW模型）。不少学者在此模型上进行了改进，但是这种方法受到测量仪器的分辨率和采样长度的影响。因此，Majumda等[2]用两个分形参数表征了表面的形貌，并提出了分形接触模型（MB模型），克服了统计学方法的不足。Wang等[3]、Yan等[4]和刘文威[5]对MB模型进行了改进，使分形接触模型更加合理，然而这些模型并未考虑微凸体的相互作用。Zhao等[6]考虑了微凸体相互作用造成的基底面下降，并应用在GW统计模型中。此外，张学良等[7]、温淑花等[8]和田红亮等[9]基于分形理论建立了结合面的法向接触刚度模型。Zhou等[10]考虑微凸体相互作用造成的基底面下降，建立了两粗糙表面的法向接触模型。

对于两粗糙表面接触的黏滑摩擦研究，Mindlin[11]推导了在给定恒定法向载荷时，球接触的切向载荷与切向位移之间的非线性关系。文中认为圆形的接触区域由两部分组成，接触的中心区域为Stick黏着区，接触的外层为Slip滑移区。当切向载荷增大时，滑移区会不断增大，直至发生宏观滑动。Mindlin等[12]给出了处于弹性接触的球体在循环加载时的响应。Ödfalk等[13]把弹性接触扩展成弹性-塑性接触情况。Björklund[14]基于单个微凸体的Mindlin模型和GW统计模型分析了接触粗糙表面的黏滑现象，但仅考虑了微凸体的弹性变形。Eriten等[15-17]考虑了微凸体的弹塑性变形，并且根据不同的摩擦系数模型建立了黏滑摩擦模型。Wang等[18-19]考虑了微凸体的弹性和完全塑性变形，但也是根据统计模型分析了粗糙表面的切向接触特性。Jamshidi等[20]考虑了微凸体的斜接触，即切向和法向变形耦合，提出了改进的两粗糙表面接触模型。该模型直接分析两个粗糙表面接触，无需等效成一个光滑表面和一个等效粗糙表面，但也是基于GW统计模型。Song等[21]尝试基于分形模型建立界面黏滑摩擦模型，但并未考虑微凸体的相互作用。

本文采用文献[10]中的法向接触模型，并确定在给定法向预紧载荷下微接触截面积的概率密度函数。同时，本文基于Mindlin模型和Masing准则获得了单个微凸体的切向模型，然后根据分形理论对微接触截面积进行积分，建立了整个粗糙表面接触的黏滑摩擦模型，并研究了分形参数D和G以及法

收稿日期：2020-12-17；**修订日期：**2021-04-16

基金项目：国家重点研发计划重点专项（2018YFB2001300）。

向预紧力对接触表面能量耗散的影响。

1 两粗糙表面法向接触模型

1.1 考虑微凸体相互作用的分形接触模型

两个粗糙表面接触可以等效成一个光滑表面和一个等效的粗糙表面[22]，等效表面的等效弹性模量为：

$$\frac{1}{E}=\frac{1-\nu_1^2}{E_1}+\frac{1-\nu_2^2}{E_2} \tag{1}$$

式中 E_1和E_2分别为两表面材料的弹性模量，ν_1和ν_2分别是两表面材料的泊松比。

图1为一个光滑刚性表面和一个等效粗糙表面接触的示意图。δ_n表示微凸体的总变形量。作用在其他微凸体上的压力会对给定微凸体产生额外的变形，用微凸体平均高度的下降距离u表示微凸体相互作用产生的影响，此时单个微凸体真实的干涉量$\omega=\delta_n-u$。

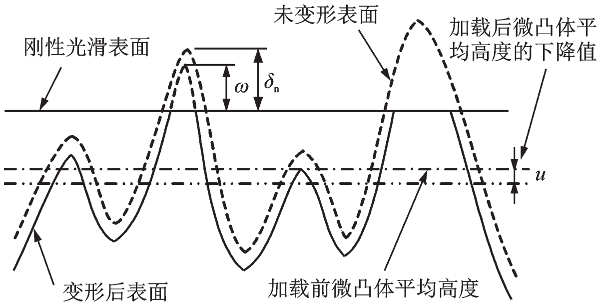

图1 一个刚性光滑表面与粗糙表面的接触

Fig. 1 Contact of a rough surface with a rigid smooth flat

微凸体的总变形量δ_n可以由粗糙表面的形貌获得。Yan等[4]使用改进的两变量W-M函数来表征粗糙表面的形貌。他们假设接触表面是各向同性表面，并且推导了等效的单变量等式。

$$z(x)=L\left(\frac{G}{L}\right)^{D_s-2}(\ln\gamma)^{1/2}\cdot \sum_{n=0}^{n_{\max}}\gamma^{(D_s-3)n}\left[\cos\phi_n-\cos\left(\frac{2\pi\gamma^n x}{L}-\phi_n\right)\right] \tag{2}$$

式中 D_s（$2<D_s<3$）为表面的分形维数。令D为表面轮廓曲线的分形维数，则$D_s=D+1$，即$1<D<2$。G为分形粗糙度，L为取样长度，γ是确定轮廓频率密度的一个参数，一般取$\gamma=0.5$。ϕ_n为随机相位，$n_{\max}$为频率指数，与截止长度L_s相关，表示为：

$$n_{\max}=\operatorname{int}\left[\frac{\lg(L/L_s)}{\lg\gamma}\right] \tag{3}$$

式中 int［…］表示取中括号数值的最大整数。若微凸体的截半径为r'，则微凸体波形的最长波长为$2r'$。可以合理地假设微接触力主要是由于基波长的微凸体尖端的小变形造成的，并且相应的频率指数为$n_0=\ln(L/2r')/\ln\gamma$[4]。代入到式（2），可以得到基波轮廓曲线函数$z_0(x)$，表示为：

$$z_0(x)=G^{D-1}(\ln\gamma)^{1/2}(2r')^{2-D}\cdot \left[\cos\phi_{n_0}-\cos\left(\frac{\pi x}{r'}-\phi_{n_0}\right)\right] \tag{4}$$

δ_n定义为关于x轴的余弦函数的峰值高度，写为：

$$\delta_n=G^{D-1}(\ln\gamma)^{1/2}(2r')^{2-D}=c_1a'^{(2-D)/2} \tag{5}$$

式中 $c_1=2^{2-D}\pi^{(D-2)/2}G^{D-1}(\ln\gamma)^{1/2}$，$a'$为微接触截面积，即$a'=\pi r'^2$。

由于微凸体相互作用造成的微凸体平均高度下降的位移u可以表示为[6]：

$$u=1.12\frac{\sqrt{F_{as}(F_n/A_a)}}{E} \tag{6}$$

式中 F_n为总法向载荷，A_a为名义接触面积，F_{as}为一个微凸体上的力。

考虑微凸体相互作用后，单个微凸体的真实干涉量可以表示为：

$$\omega=\delta_n-u=c_1a'^{(2-D)/2}-1.12\frac{\sqrt{F_{as}(F_n/A_a)}}{E} \tag{7}$$

需要指出的是，当微凸体处于不同变形阶段时，上式中的F_{as}是不同的。

研究表明，微接触截面积的分布满足地球岛屿面积分布，微接触截面积的尺寸分布函数$n(a')$，或称为概率密度函数，可以表示为：

$$n(a')=\frac{D}{2}\psi^{(2-D)/2}a_1'^{D/2}a'^{-(D+2)/2} \tag{8}$$

式中 a_1'为最大的微凸体截面积，ψ为域扩展因子，与分形维数相关，表示为：

$$\psi^{(2-D)/2}-(1+\psi^{-D/2})^{-(2-D)/D}=\frac{2-D}{D} \tag{9}$$

对等式（9）求解并拟合数据，可以直观表示为：

$$\psi=1.549D^{-1.253}+1.069 \tag{10}$$

微凸体的曲率半径R可以从等式（4）获得：

$$R=\frac{1}{\left|\mathrm{d}^2z_0/\mathrm{d}x^2\right|_{x=0}}=\frac{r'^D}{2^{2-D}\pi^2G^{D-1}(\ln\gamma)^{1/2}}=c_2a'^{D/2} \tag{11}$$

式中 $c_2=[2^{2-D}\pi^{2+D/2}G^{D-1}(\ln\gamma)^{1/2}]^{-1}$。

微凸体有三个变形阶段：弹性变形、弹塑性变形和完全塑性变形。ω_{yc}定义为微凸体从弹性变形阶段转为弹塑性变形阶段的临界屈服变形值，ω_{pc}定义为微凸体从弹塑性变形阶段转为完全塑性变形阶段的临界变形值，可以表示为[22-23]：

$$\omega_{yc}=\left(\frac{\pi KH}{2E}\right)^2R \tag{12}$$

$$\omega_{pc}=\left(\frac{\bar{p}_{pc}}{\bar{p}_{yc}}\right)^2\omega_{yc} \tag{13}$$

式中　H表示较软材料的硬度,$H\approx 2.8\sigma_b$;K为硬度系数[24],且$K=0.4645+0.3141\nu+0.1943\nu^2$;$\bar{p}_{yc}$表示初始屈服点的平均压力,$\bar{p}_{yc}=1.1\sigma_y$;$\bar{p}_{pc}$表示完全塑性流动转变点处的均压[23],$\bar{p}_{pc}=2.8\sigma_y$。

把等式(11)代入等式(12),临界屈服变形量为:

$$\omega_{yc}=\left(\frac{\pi KH}{2E}\right)^2 c_2 a'^{D/2}=c_3 a'^{D/2} \tag{14}$$

式中　$c_3=c_2\left(\frac{\pi KH}{2E}\right)^2$。

(i) 弹性变形阶段

微凸体在此阶段的微接触面积a_e和接触载荷F_e可以表示为[2]:

$$a_e=\pi R\omega \tag{15}$$

$$F_e=\frac{4}{3}ER^{1/2}\omega^{3/2} \tag{16}$$

此时,真实干涉量ω可以表示为:

$$\omega=\delta_n-u=c_1 a'^{(2-D)/2}-\frac{1.12}{E}\sqrt{\frac{4}{3}ER^{1/2}\omega^{3/2}(F_n/A_a)}=$$
$$c_1 a'^{(2-D)/2}-\frac{1.12}{E}\left(\frac{4EF_n}{3A_a}\right)^{1/2}c_2^{1/4}a'^{D/8}\omega^{3/4}=$$
$$c_1 a'^{(2-D)/2}-c_4 a'^{D/8}\omega^{3/4} \tag{17}$$

式中　$c_4=\frac{1.12}{E}\left(\frac{4EF_n}{3A_a}\right)^{1/2}c_2^{1/4}$。

根据等式(17)中a'和ω的关系,临界微接触屈服截面积a'_{yc}可以由等式(12)中的ω_{yc}求得;类似的,临界微接触截面积a'_{pc}可以由等式(13)中的ω_{pc}求得。

$$a'_{yc}=\left(\frac{c_3+c_4c_3^{3/4}}{c_1}\right)^{1/(1-D)} \tag{18}$$

$$a'_{pc}=\left[\frac{c_3(\bar{p}_{pc}/\bar{p}_{yc})^2+c_4c_3^{3/4}(\bar{p}_{pc}/\bar{p}_{yc})^{3/2}}{c_1}\right]^{1/(1-D)} \tag{19}$$

因为c_4与法向载荷F_n相关,所以这两个临界接触面积并不是常值,而是与法向载荷相关。

(ii) 弹塑性阶段

微凸体在此阶段的微接触面积a_{ep}和接触载荷F_{ep}可以表示为[5]:

$$a_{ep}=\pi R\omega_{yc}\left(\frac{\omega}{\omega_{yc}}\right)^b \tag{20}$$

$$F_{ep}=\frac{4}{3}ER^{1/2}\omega_{yc}^{3/2}\left(\frac{\omega}{\omega_{yc}}\right)^s=\frac{2}{3}\pi KHR\omega_{yc}\left(\frac{\omega}{\omega_{yc}}\right)^s \tag{21}$$

式中　b和s为常数,可以根据微接触面积和载荷在弹性、弹塑性和完全塑性变形的连续性条件计算出这两个参数。

$$\begin{cases} b=1+\ln 2/\ln(\omega_{pc}/\omega_{yc}) \\ s=1+\ln(3/K)/\ln(\omega_{pc}/\omega_{yc}) \end{cases} \tag{22}$$

此时,真实干涉量ω可以表示为:

$$\omega=c_1 a'^{(2-D)/2}-\frac{1.12}{E}\sqrt{\frac{2}{3}\pi KHR\omega_{yc}\left(\frac{\omega}{\omega_{yc}}\right)^s(F_n/A_a)}=$$
$$c_1 a'^{(2-D_s)/2}-\frac{1.12}{E}\left(\frac{2\pi KHF_n}{3A_a}\right)^{1/2}c_3^{(1-s)/2}c_2^{1/2}\cdot$$
$$a'^{D(2-s)/4}\omega^{d/2}=c_1 a'^{(2-D)/2}-c_5 a'^{D(2-s)/4}\omega^{s/2} \tag{23}$$

式中　$c_5=\frac{1.12}{E}\left(\frac{2\pi KHF_n}{3A_a}\right)^{1/2}c_3^{(1-s)/2}c_2^{1/2}$。

(iii) 完全塑性阶段

微凸体在此阶段的微接触面积a_p和接触载荷F_p可以表示为[22]:

$$a_p=2\pi R\omega \tag{24}$$

$$F_p=Ha_p \tag{25}$$

此时,真实干涉量ω可以表示为:

$$\omega=c_1 a'^{(2-D)/2}-\frac{1.12}{E}\sqrt{2\pi RH\omega(F_n/A_a)}=$$
$$c_1 a'^{(2-D)/2}-\frac{1.12}{E}\left(\frac{2\pi HF_n}{A_a}\right)^{1/2}c_2^{1/2}a'^{D/4}\omega^{1/2}=$$
$$c_1 a'^{(2-D)/2}-c_6 a'^{D/4}\omega^{1/2} \tag{26}$$

式中　$c_6=\frac{1.12}{E}\left(\frac{2\pi HF_n}{A_a}\right)^{1/2}c_2^{1/2}$。

1.2　法向总载荷

单个微凸体在弹性、弹塑性和完全塑性阶段的法向载荷分别用F_e, F_{ep}和F_p表示。根据尺寸分布函数$n(a')$,这三个阶段总的接触载荷分别用F_{ne}, F_{nep}和F_{np}表示,由下面等式给出:

$$F_{ne}=\int_{a'_{yc}}^{a'_l}F_e n(a')\mathrm{d}a'=$$
$$\int_{a'_{yc}}^{a'_l}\frac{4}{3}Ec_2^{1/2}\frac{D}{2}\psi^{(2-D)/2}a_l'^{D/2}a'^{-(D+4)/4}\omega^{3/2}\mathrm{d}a' \tag{27}$$

$$F_{nep}=\int_{a'_{pc}}^{a'_{yc}}F_{ep}n(a')\mathrm{d}a'=$$
$$\int_{a'_{pc}}^{a'_{yc}}\frac{2}{3}\pi KHc_2c_3^{1-s}\frac{D}{2}\psi^{(2-D)/2}a_l'^{D/2}a'^{[D(1-s)-2]/2}\omega^s\mathrm{d}a' \tag{28}$$

$$F_{np}=\int_0^{a'_{pc}}F_p n(a')\mathrm{d}a'=$$
$$\int_0^{a'_{pc}}2\pi Hc_2\frac{D}{2}\psi^{(2-D)/2}a_l'^{D/2}a'^{-1}\omega\mathrm{d}a' \tag{29}$$

需要指出的是,这些积分的被积函数是隐式表达式,三个阶段的ω和a'的关系分别由等式(17),(23)和(26)给出,并基于Maltab软件的fzero函数求解这些积分。

连接界面总的法向载荷是三个变形阶段法向载

荷的总和，可以表示为：

$$F_n = F_{ne} + F_{nep} + F_{np} = \int_{a'_{yc}}^{a'_l} F_e n(a')\mathrm{d}a' + \int_{a'_{pc}}^{a'_{yc}} F_{ep} n(a')\mathrm{d}a' + \int_{0}^{a'_{pc}} F_p n(a')\mathrm{d}a' \tag{30}$$

2 两粗糙表面的黏滑摩擦建模

在法向载荷的作用下，两接触表面被压紧，受到较小的往复切向载荷或切向位移时，会产生往复的切向位移，出现滞回现象。从单个微凸体角度看，有的微凸体接触处于黏着状态，而有的微凸体接触处于滑移状态。当切向载荷不断增大时，短的微凸体受到的法向载荷比高的微凸体小，所以更容易先滑动。同理，微凸体接触截面积越小，越容易滑动。在首次加载时，接触截面积大的黏着微凸体构成了切向刚度，而接触截面积小的滑移微凸体导致了能量耗散。卸载时，切向载荷减小，而预紧力不变，即极限切向载荷不变，所以一些在首次加载时滑移的微凸体会转变为黏着状态。

图 2 和 3 展示了微凸体在不同接触状态时微接触截面积概率密度函数的区间。首次加载时，接触的微凸体状态可以分成两组。而卸载时，接触的微凸体状态分成三组[17]。

(i) 微凸体在卸载和加载时都滑移。

(ii) 微凸体在加载时滑移，但卸载时处于黏着状态。

(iii) 微凸体在卸载和加载时都处于黏着状态。

图 2 和 3 中，a'_s 是最小的微凸体接触截面积，可以近似为 0。a'_0，a'_1 和 a'_2 都是临界接触截面积，用于区别首次加载与卸载时微凸体的接触状态，下文给出表达式。

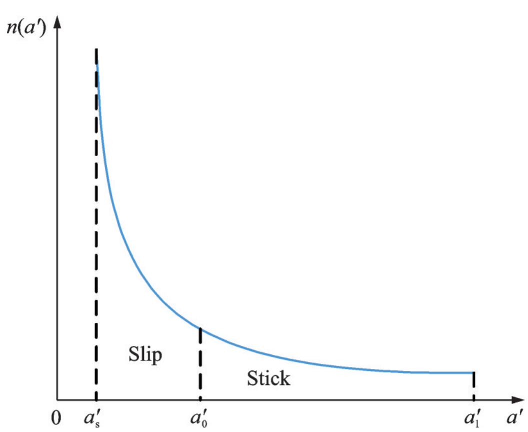

图 2 首次加载时，微凸体在不同接触状态时微接触截面积概率密度函数的区间

Fig. 2 Categories of asperities when initial loading based on the truncated microcontact area distribution

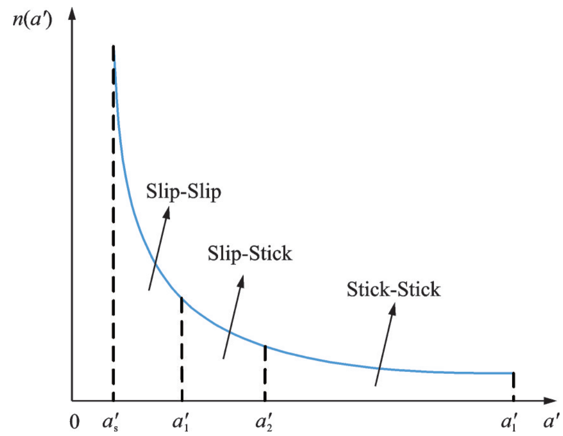

图 3 卸载时，微凸体在不同接触状态时微接触截面积概率密度函数的区间。

Fig. 3 Categories of asperities when unloading based on the truncated microcontact area distribution

Mindlin[12]给出了切向载荷与切向相对位移之间的关系：

$$\delta = \frac{3\mu F_{as}}{16G'r}\left[1-\left(1-\frac{T}{\mu F_{as}}\right)^{2/3}\right] \tag{31}$$

式中 δ 为相对切向位移，T 为切向载荷，r 为接触半径，F_{as} 为单个微凸体承受的法向力，μ 为摩擦系数，G' 为等效剪切模量。

$$\frac{1}{G'} = \frac{2-\nu_1}{G_1} + \frac{2-\nu_2}{G_2} \tag{32}$$

根据等式(31)，切向载荷与位移之间的关系为：

$$T = \mu F_{as}\left[1-\left(1-\frac{16G'r\delta}{3\mu F_{as}}\right)^{3/2}\right] \tag{33}$$

无量纲切向相对位移用弹性阶段的接触面积与法向载荷表示为：

$$\tilde{\delta} = \frac{16G'r\delta}{3\mu F_{as}} = \frac{16G'\delta}{3\mu}\frac{(a_e/\pi)^{1/2}}{F_e} = \frac{4G'\delta}{\mu E\omega} \tag{34}$$

当微凸体处于弹塑性阶段时，等式(34)中的比值 r/F_{as} 会不同，但是至多导致 10% 的误差[17]。为了便于计算，本文都采用了弹性接触时的表达式。摩擦系数 μ 采用 CFC 恒定值模型，并取 $\mu = 0.2$。

当切向载荷不足以引起整体滑动时，处于滑移状态的微凸体，其切向载荷满足 Coulomb 摩擦定律；处于黏着状态的微凸体，其切向载荷与相对位移满足 Mindlin 理型。此时，可以得到：

(i) 首次加载

$$T_{as} = \mu F_{as}\begin{cases} 1, & a' \leqslant a'_0 \\ \left[1-\left(1-\dfrac{4G'\delta}{\mu E\omega}\right)^{3/2}\right], & a' > a'_0 \end{cases} \tag{35}$$

式中 T_{as} 为单个微凸体的切向载荷，a'_0 为临界微接

触截面积,对应的临界变形量 $\omega_0 = 4G'\delta/(\mu E)$,由于 ω 与 a' 存在隐式关系,无法直接给出显式表达式,但可以由等式(17),(23),(26)确定。

根据微凸体截面积的尺寸分布函数 $n(a')$,面-面接触的总切向载荷为:

$$T_{\mathrm{flat}} = \int_{a'_{\mathrm{s}}}^{a'_{1}} T_{\mathrm{as}} n(a') \mathrm{d}a' \tag{36}$$

需要指出的是,等式(36)需要进行分段积分。通过判断 a'_0, a'_{pc} 和 a'_{yc} 的大小关系,确定积分区间。例如当 $a'_{\mathrm{pc}} < a'_0 \leqslant a'_{\mathrm{yc}}$ 时,则首次加载时面-面接触的总切向载荷根据等式(36)展开为:

$$T^{i}_{\mathrm{flat}} = \int_{a'_{\mathrm{s}}}^{a'_{\mathrm{pc}}} \mu F_{\mathrm{p}} n(a') \mathrm{d}a' + \int_{a'_{\mathrm{pc}}}^{a'_{0}} \mu F_{\mathrm{ep}} n(a') \mathrm{d}a' + \int_{a'_{0}}^{a'_{\mathrm{yc}}} \mu F_{\mathrm{ep}} \left[1 - \left(1 - \frac{4G'\delta}{\mu E\omega}\right)^{3/2}\right] n(a') \mathrm{d}a' + \int_{a'_{\mathrm{yc}}}^{a'_{1}} \mu F_{\mathrm{e}} \left[1 - \left(1 - \frac{4G'\delta}{\mu E\omega}\right)^{3/2}\right] n(a') \mathrm{d}a' \tag{37}$$

(ii) 卸载

$$T_{\mathrm{as}} = \mu F_{\mathrm{as}} \begin{cases} -1, & a' \leqslant a'_1 \\ 2\left[1 - \dfrac{2G'(\delta_{\max} - \delta)}{\mu E\omega}\right]^{3/2} - 1, & a'_1 < a' \leqslant a'_2 \\ 2\left[1 - \dfrac{2G'(\delta_{\max} - \delta)}{\mu E\omega}\right]^{3/2} - \left(1 - \dfrac{4G'\delta_{\max}}{\mu E\omega}\right)^{3/2} - 1, & a' > a'_2 \end{cases} \tag{38}$$

式中　a'_1 和 a'_2 为临界接触截面积,对应的临界变形量为 $\omega_1 = 2G'(\delta_{\max} - \delta)/(\mu E)$ 和 $\omega_2 = 4G'\delta_{\max}/(\mu E)$,$\omega$ 与 a' 的关系由等式(17),(23),(26)确定。

同理,计算卸载时面-面接触的总切向载荷时,需要判断 a'_1, a'_2, a'_{pc} 和 a'_{yc} 的大小关系。例如当 $a'_1 \leqslant a'_{\mathrm{pc}} < a'_2 \leqslant a'_{\mathrm{yc}}$ 时,则等式(36)可以展开为:

$$\begin{aligned} T^{\mathrm{unl}}_{\mathrm{flat}} = & \int_{a'_{\mathrm{s}}}^{a'_{1}} \mu F_{\mathrm{p}} n(a') \mathrm{d}a' + \\ & \int_{a'_{1}}^{a'_{\mathrm{pc}}} \mu F_{\mathrm{p}} \left\{ 21\left[- \frac{2G'(\delta_{\max} - \delta)}{\mu E\omega}\right]^{3/2} - 1 \right\} n(a') \mathrm{d}a' + \\ & \int_{a'_{\mathrm{pc}}}^{a'_{2}} \mu F_{\mathrm{ep}} \left\{ 2\left[1 - \frac{2G'(\delta_{\max} - \delta)}{\mu E\omega}\right]^{3/2} - 1 \right\} n(a') \mathrm{d}a' + \\ & \int_{a'_{2}}^{a'_{\mathrm{yc}}} \mu F_{\mathrm{ep}} \left\{ 2\left[1 - \frac{2G'(\delta_{\max} - \delta)}{\mu E\omega}\right]^{3/2} - \left(1 - \frac{4G'\delta_{\max}}{\mu E\omega}\right)^{3/2} - \right. \\ & \left. 1 \right\} n(a')\, \mathrm{d}a' + \int_{a'_{\mathrm{yc}}}^{a'_{1}} \mu F_{\mathrm{e}} \left\{ 2\left[1 - \frac{2G'(\delta_{\max} - \delta)}{\mu E\omega}\right]^{3/2} - \right. \\ & \left. \left(1 - \frac{4G'\delta_{\max}}{\mu E\omega}\right)^{3/2} - 1 \right\} n(a') \mathrm{d}a' \end{aligned} \tag{39}$$

(iii) 再次加载

微凸体的卸载方程和再次加载方程满足 Masing 映射准则,可以得到再次加载时面-面接触的总切向载荷:

$$T^{\mathrm{rel}}_{\mathrm{flat}}(\delta) = -T^{\mathrm{unl}}_{\mathrm{flat}}(-\delta) \tag{40}$$

(iv) 能量耗散

在周期载荷作用下,面-面接触的力-位移的曲线形成了封闭区域,封闭区域的面积即为一个周期内的能量耗散,可以表示为:

$$W_{\mathrm{flat}} = \int_{-\delta_{\max}}^{\delta_{\max}} \left(T^{\mathrm{rel}}_{\mathrm{flat}} - T^{\mathrm{unl}}_{\mathrm{flat}}\right) \mathrm{d}\delta \tag{41}$$

3　数值仿真

为了进一步研究所提出的基于分形理论的切向黏滑摩擦模型的特性,开展了数值仿真研究。切向载荷与相对位移关系曲线的计算流程如图 4 所示。无量纲化公式为:

$$T^{*}_{\mathrm{flat}} = \frac{T_{\mathrm{flat}}}{EA_{\mathrm{a}}},\ \delta^{*} = \frac{\delta}{\delta_{\max}} \tag{42}$$

仿真参数为:$E_1 = E_2 = 210$ GPa, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $H = 2.744$ GPa, $\sigma_{\mathrm{y}} = 785$ MPa, $A_{\mathrm{a}} = \pi \times (10/1000)^2$ m^2, $\mu = 0.2$。其他参数分成 3 组,用于对比研究不同参数对切向黏滑摩擦模型的影响。

(1) $G = 1\times10^{-7}$ m, $F_{\mathrm{n}} = 1000$ N, D 分别取 1.60, 1.62, 1.64。

(2) $D = 1.60$, $F_{\mathrm{n}} = 1000$ N, G 分别取 0.8×10^{-7}, 1×10^{-7}, 1.2×10^{-7} m。

(3) $D = 1.60$, $G = 1\times10^{-7}$ m, F_{n} 分别取 1000, 1050, 1100 N。

图 5 展示了不同的分形维数 D 时,连接界面的迟滞曲线。从图中看出,在相同切向载荷下,D 增大时,迟滞曲线所围面积增大,即一个周期的能量耗散增大。$D = 1.60$, 1.62 和 1.64 的能量耗散分别为 1.202×10^{-4}, 1.408×10^{-4} 和 1.591×10^{-4} J。分形维数 D 反映表面轮廓的复杂性和自相似性,一般来说,D 越大,表面越光滑,实际接触面积增加,滑移微凸体的个数增加,所以能量耗散也增大,该趋势与文献[25-26]中的结果一致。

不同分形粗糙度参数 G 时,连接界面的迟滞曲

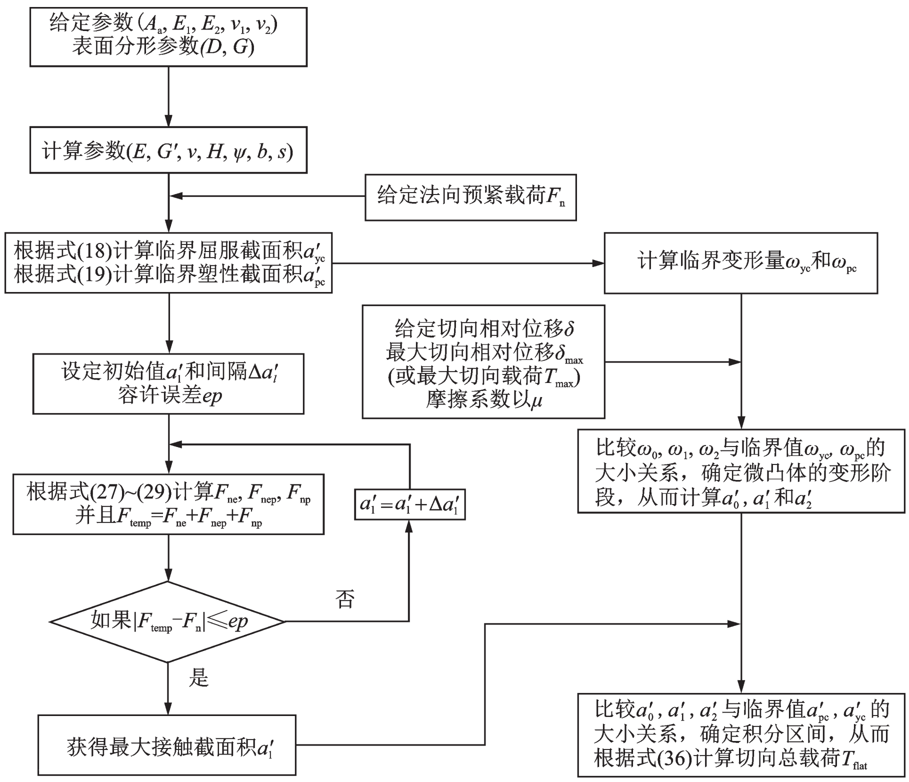

图4 切向总载荷的计算流程图

Fig. 4 Calculation of total tangential load

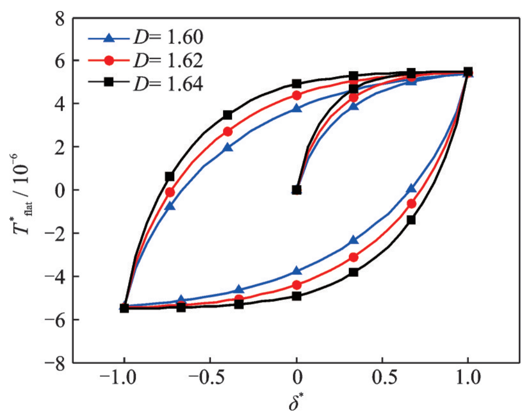

图5 不同D时，$G=1\times10^{-7}$ m, $F_n=1000$ N时的切向迟滞曲线

Fig. 5 Hysteresis loop for different fractal dimension D with $G=1\times10^{-7}$ m, $F_n=1000$ N

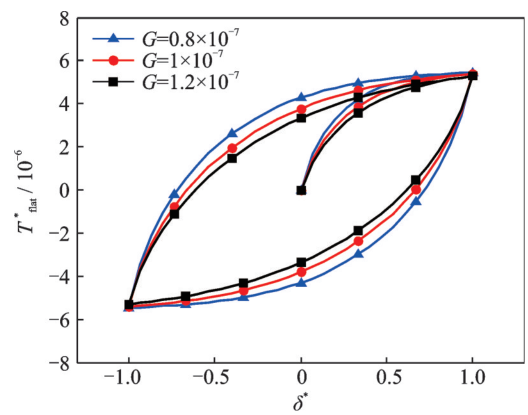

图6 不同G时，$D=1.60$, $F_n=1000$ N时的切向迟滞曲线

Fig. 6 Hysteresis loop for different fractal roughness G with $D=1.60$, $F_n=1000$ N

线如图6所示。从图中可以看出，在相同切向载荷下，G增大时，迟滞曲线所围面积减小，即能量耗散减小。$G=0.8\times10^{-7}$, 1×10^{-7}和1.2×10^{-7}的能量耗散分别为1.370×10^{-4}, 1.202×10^{-4}和1.061×10^{-4} J。分形粗糙度参数G反映粗糙表面的垂直方向的光滑程度，G越大，则表面越粗糙。所以图6说明表面越粗糙，能量耗散越小，与前文结果一致。

图7展示了不同法向紧固载荷时，连接界面的迟滞曲线。从图中可以看出，在相同切向载荷下，F_n增大时，迟滞曲线所围面积减小，即能量耗散减小。$F_n=1000$, 1050, 1100 N时的能量耗散分别为

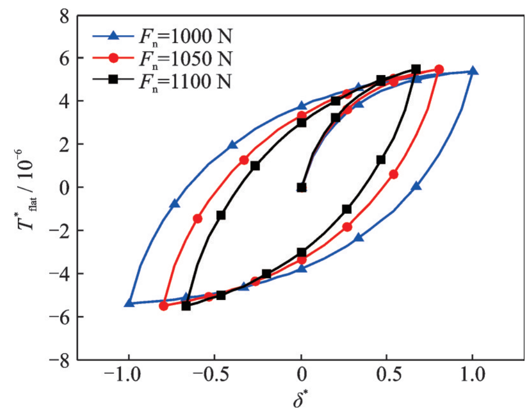

图7 不同F_n时，$D=1.60$, $G=1\times10^{-7}$ m时的切向迟滞曲线

Fig. 7 Hysteresis loop for different normal load F_n with $D=1.60$, $G=1\times10^{-7}$ m

1.202×10^{-4}, 8.447×10^{-5}和6.287×10^{-5} J。这是因为法向载荷的增大会导致微凸体滑移的最大切向载荷增大,在切向外载荷不变时,滑移微凸体的个数会减少,所以能量耗散减小,该趋势与文献[17, 26]的结果一致。

4 结　论

本文考虑了微凸体相互作用对基底面的下降,并基于分形理论建立了两粗糙表面的法向接触模型,从而确定在给定法向预紧载荷下微接触截面积的概率密度函数。然后根据Mindlin模型、Masing准则和分形理论,建立了两粗糙表面接触的切向黏滑摩擦模型。最后开展了数值仿真研究,分析了不同参数对系统能量耗散的影响。结论如下:

(1) 分形维数D越大,能量耗散越大;分形粗糙度参数G越大,能量耗散越小,即表面越粗糙,能量耗散越小。

(2) 法向预紧载荷增大时,微凸体滑移的最大切向载荷会增大,在切向外载荷不变时,滑移微凸体的个数会减少,所以能量耗散越小。

参考文献:

[1] Greenwood J A, Williamson J B P P. Contact of nominally flat surfaces [J]. Proceedings of the Royal Society of London, 1966, 295(1442): 300-319.

[2] Majumdar A, Bhushan B. Fractal model of elastic-plastic contact between rough surfaces [J]. Journal of Tribology, 1991, 113(1): 1-11.

[3] Wang S, Komvopoulos K. A fractal theory of the interfacial temperature distribution in the slow sliding regime: Part I—elastic contact and heat transfer analysis [J]. Journal of Tribology, 1994, 116(4): 812-822.

[4] Yan W, Komvopoulos K. Contact analysis of elastic-plastic fractal surfaces [J]. Journal of Applied Physics, 1998, 84(7): 3617-3624.

[5] 刘文威. 基于分形理论的机械结合部接触特性参数研究 [D]. 武汉:华中科技大学, 2016.
Liu W. A study of contact characteristic parameters of machine joint interfaces based on fractal theory [D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2016.

[6] Zhao Y, Chang L. A model of asperity interactions in elastic-plastic contact of rough surfaces [J]. Journal of Tribology, 2001, 123(4): 857.

[7] 张学良, 陈永会, 温淑花, 等. 考虑弹塑性变形机制的结合面法向接触刚度建模 [J]. 振动工程学报, 2015, 28(1): 91-99.
Zhang X, Chen Y, Wen S, et al. The model of normal contact stiffness of joint interfaces incorporating elasto-plastic deformation mechanism [J]. Journal of Vibration Engineering, 2015, 28(1): 91-99.

[8] 温淑花, 张学良, 武美先, 等. 结合面法向接触刚度分形模型建立与仿真 [J]. 农业机械学报, 2009, 40(11): 197-202.
Wen S, Zhang X, Wu M, et al. Fractal model and simulation of normal contact stiffness of joint interfaces and its simulation [J]. Transactions of The Chinese Society of Agricultural Machinery, 2009, 40(11): 197-202.

[9] 田红亮, 钟先友, 秦红玲, 等. 依据各向异性分形几何理论的固定结合部法向接触力学模型 [J]. 机械工程学报, 2013, 49(21): 108-122.
Tian H, Zhong X, Qin H, et al. Normal contact mechanics model of fixed joint interface adopting anisotropic fractal geometrical theory [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(21): 108-122.

[10] Zhou H, Long X, Meng G, et al. A stiffness model for bolted joints considering asperity interactions of rough surface contact [J]. Journal of Tribology, 2021, 144(1) 1-20.

[11] Mindlin R D. Compliance of elastic bodies in contact [J]. Journal of Applied Mechanics, 1949, 16:259-268.

[12] Mindlin R, Mason W, Osmer T, et al. Effects of an oscillating tangential force on the contact surfaces of elastic spheres [C]. Proceedings of the First US National Conpress of Applied Mechanics, 1952: 203-208.

[13] Ödfalk M, Vingsbo O. An elastic-plastic model for fretting contact [J]. Wear, 1992, 157(2): 435-444.

[14] Björklund S. A random model for micro-slip between nominally flat surfaces [J]. ASME Journal of Tribology, 1997, 119(4): 726-732.

[15] Eriten M, Polycarpou A, Bergman L. Physics-based modeling for partial slip behavior of spherical contacts [J]. International Journal of Solids and Structures, 2010, 47(18-19): 2554-2567.

[16] Eriten M, Polycarpou A A, Bergman L A. Surface roughness effects on energy dissipation in fretting contact of nominally flat surfaces [J]. Journal of Applied Mechanics, 2011, 78(2): 856-875.

[17] Eriten M, Polycarpou A A, Bergman L A. Physics-based modeling for fretting behavior of nominally flat rough surfaces [J]. International Journal of Solids & Structures, 2011, 48(10): 1436-1450.

[18] Wang D, Xu C, Wan Q. Modeling tangential contact of rough surfaces with elastic- and plastic-deformed asperities [J]. Journal of Tribology, 2017, 139(5): 051401.

[19] 王东，徐超，胡杰，等. 连接结构接触界面非线性力学建模研究[J]. 力学学报，2018，50(1)：44-57.
Wang D, Xu C, Hu J, et al. Nonlinear mechanics modeling for joint interface of assembled structure [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2018, 50(1): 44-57.

[20] Jamshidi H, Ahmadian H. A modified rough interface model considering shear and normal elastic deformation couplings [J]. International Journal of Solids and Structures, 2020, 203:57-72.

[21] Song Z, Komvopoulos K. Contact mechanics analysis of oscillatory sliding of a rigid fractal surface against an elastic-plastic half-space [J]. Philosophical Magazine, 2014, 94(28): 3215-3233.

[22] Johnson K L, Johnson K L. Contact Mechanics [M]. Cambridge University Press, 1987.

[23] Stronge W J. Contact Problems for Elasto-plastic Impact in Multi-body Systems [M]//Impacts in Mechanical System. Springer Berlin Heidelberg, 2000.

[24] Li P L, Lin J F. An elastoplastic microasperity contact model for metallic materials [J]. Journal of Tribology, 2005, 127(3):666-672.

[25] 徐超，王东. 考虑粗糙表面接触的连接面黏滑摩擦建模[J]. 西安交通大学学报，2014，48(7)：131-135.
Xu C, Wang D, Stick-slip friction modeling of structural joint interface considering rough contact [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2014, 48(7): 131-135.

[26] 李一堃. 预紧连接结构非线性力学模型研究[D]. 南京:南京理工大学，2017.
Li Y. Nonlinear mechanical modeling of preloaded jointing structures [D]. Nanjing: Nanjing University of Science & Technology, 2017.

Modeling for fretting behavior of nominally flat rough surfaces based on fractal theory

ZHOU Hua, LONG Xin-hua, MENG Guang

(State Key Laboratory of Mechanical System and Vibration, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: The contact between two rough surfaces is essentially the contact of a large number of asperities, which leads to a challenging scientific problem due to the complexity of interface behaviors. In this paper, the contact of an asperity and the asperity interactions are considered. The downward displacement of mean of asperity heights is used to represent the effects of the asperity interactions. The normal contact model can then be established by the summation integral based on fractal theory. Once the normal preload is given, the probability density function of truncated asperity contact area can be determined. Then the tangential load-displacement model of joint interface can be established by Mindlin theory, Masing's hypothesis and fractal theory. The effect of different parameters on energy dissipation is studied by numerical simulation. The results show that the energy dissipation decreases with the fractal dimension D decreases, or with the fractal roughness parameter G increases. This means that the energy dissipation is lower when the rough surface is coarser. The energy dissipation will decrease with the normal preload increases.

Key words: fractal contact model; stick-slip friction; rough surfaces; hysteresis nonlinearity; energy dissipation

作者简介: 周 华(1992—),男,博士研究生。电话:18068064403; E-mail:574721243@sjtu.edu.cn。
通讯作者: 龙新华(1972—),男,研究员。电话:15921861912; E-mail:xhlong@sjtu.edu.cn。