

分数阶导数系统非平稳随机振动灵敏度分析的 时域显式方法

洗剑华¹, 苏 成^{1,2}

(1. 华南理工大学土木与交通学院, 广东 广州 510640;

2. 华南理工大学亚热带建筑科学国家重点实验室, 广东 广州 510640)

摘要: 分数阶导数模型是描述黏弹性材料本构关系的理想模型。进行了分数阶导数线性系统非平稳随机振动的灵敏度分析。建立分数阶导数系统动力响应的时域显式表达式; 采用灵敏度分析的直接求导法或伴随变量法, 推导系统动力响应灵敏度的时域显式表达式; 提出分数阶导数系统响应统计矩灵敏度高效计算的时域显式方法。所提出的基于直接求导法和伴随变量法的时域显式方法, 分别适用于少设计变量和多设计变量两种情况下的响应统计矩灵敏度分析。以非平稳地震激励下设置分数阶导数黏弹性阻尼器的层剪切结构为数值算例, 验证了所提方法的计算精度和计算效率。

关键词: 随机振动灵敏度; 分数阶导数; 时域显式方法; 直接求导法; 伴随变量法

中图分类号: O324; TU311.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2022)05-1058-10

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2022.05.003

引 言

理论和实验研究表明, 分数阶导数模型能够同时模拟黏弹性材料的应力松弛特性和蠕变特性, 是描述黏弹性材料本构关系的理想模型^[1-2]。近年来, 在结构振动领域, 分数阶导数模型已被广泛用于描述黏弹性阻尼器的力学行为^[3-5]。

分数阶导数系统的随机振动分析已引起了不少学者的关注。Spanos 和 Zeldin^[6]提出了分数阶导数线性系统平稳随机振动的频域分析方法。Agrawal^[7]给出了分数阶导数单自由度线性系统平稳或非平稳随机振动的时域解析解答。Di Paola 等^[8]基于 Lyapunov 矩方程法求解了分数阶导数线性振子的平稳或非平稳随机响应。上述研究属于线性随机振动分析范畴。在非线性随机振动分析方面, Spanos 和 Evangelatos^[9]利用蒙特卡罗模拟和统计线性化法分别求解了平稳白噪声激励下分数阶导数非线性振子的响应统计量。孙春艳和徐伟^[10]借助随机平均法和统计线性化法, 研究了分数阶导数单自由度非线性系统在平稳白噪声下的响应功率谱密度估计。Xu 和 Li^[11]采用概率密度演化法对设置分数阶导数黏弹性阻尼器的单自由度非线性随机结构进行了动力可靠度分析。更多关于分数阶导数系统随机振动

分析的研究可参考文献[12-14]。

灵敏度分析是结构优化、模型修正和结构损伤识别等问题面临的重要课题。Kobelev^[15]研究了分数阶导数线性非保守系统的失稳临界荷载灵敏度。Martinez-Agirre 和 Elejabarrieta^[16]求解了分数阶导数悬臂梁线性结构的特征值和特征向量灵敏度。Lewandowski 和 Łasecka-Plura^[17]研究了设置分数阶导数黏弹性阻尼器线性结构的动力特性灵敏度。Li 等^[18]和 Yun 等^[19]对黏弹性阻尼线性系统进行了动力响应灵敏度分析, 他们的方法同样适用于分数阶导数系统。上述研究仅考虑了分数阶导数线性系统动力特性或确定性动力响应的灵敏度, 而针对分数阶导数系统随机振动灵敏度问题的研究目前尚未见到有文献报道。另一方面, 黏性阻尼线性系统随机振动灵敏度问题的研究则相对成熟, 相关研究可参考文献[20-21]。

近年来提出的一类非平稳随机振动时域显式方法^[22-25], 通过构建结构动力响应及其灵敏度的时域显式表达式, 能够在时域内直接建立非平稳响应统计矩及其灵敏度的显式列式, 实现任意时刻和自由度的降维计算, 并应用于非平稳随机激励下的结构拓扑优化, 具有理想的计算精度和计算效率。在上述研究的基础上, 本文将时域显式方法进一步发展应用于分数阶导数线性系统的非平稳随机振动灵敏

收稿日期: 2020-12-17; 修订日期: 2021-05-13

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51678252); 广州市科学研究计划重点项目(201804020069)。

度分析。首先构建分数阶导数系统动力响应的时域显式表达式;进而采用灵敏度分析的直接求导法或伴随变量法,推导系统动力响应灵敏度的时域显式表达式;最终利用统计矩的运算规律,建立系统非平稳响应统计矩灵敏度的时域显式列式。以非平稳地震激励下设置分数阶导数黏弹性阻尼器的层剪切结构为数值算例,验证了所提方法的计算精度和计算效率。

1 分数阶导数系统动力响应时域显式表达式

分数阶导数多自由度线性系统的运动方程可以表达如下:

$$M\ddot{U}(t) + C\dot{U}(t) + KU(t) + C_\alpha D_t^\alpha U(t) = LF(t) \quad (1)$$

式中 M, C, K 和 C_α 分别为质量矩阵、黏性阻尼矩阵、刚度矩阵和分数阶导数阻尼矩阵; $U(t), \dot{U}(t)$ 和 $\ddot{U}(t)$ 分别为位移向量、速度向量和加速度向量; $D_t^\alpha U(t)$ 表示对位移向量 $U(t)$ 关于时间 t 求 $\alpha (0 \leq \alpha < 1)$ 阶导数; $F(t)$ 为非平稳随机激励; L 为随机激励定位向量。

分数阶导数的定义有很多种,其中最常用的有 Riemann-Liouville (RL) 定义、Caputo (C) 定义和 Grunward-Letnikov (GL) 定义。GL 定义在数值计算中是最适用的,它可以表达为^[26]:

$$D_t^\alpha U(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta t)^{-\alpha} \sum_{k=0}^n GL_k U(t - k\Delta t) \quad (2)$$

式中 Δt 为时间步长; n 为时间步数; GL_k 为 GL 系数,它可以表达为^[9]:

$$GL_k = (-1)^k \binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(k - \alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k + 1)}, \quad 0 \leq k \leq n \quad (3)$$

式中 $\Gamma(\cdot)$ 表示 Gamma 函数。利用 Gamma 函数的性质, GL 系数可以用如下递推关系式进行计算:

$$GL_0 = 1, \quad GL_k = \frac{k - \alpha - 1}{k} GL_{k-1}, \quad 1 \leq k \leq n \quad (4)$$

定义分数阶导数系统的状态向量如下:

$$V(t) = [U^T(t) \quad \dot{U}^T(t) \quad D_t^\alpha U^T(t)]^T \quad (5)$$

采用 Newmark- β 数值积分法求解式(1),能够推导得到系统状态向量的递推公式为(推导过程见附录):

$$V_i = Q_1 LF_{i-1} + Q_2 LF_i + TV_{i-1} + T_1 \sum_{k=1}^{i-1} \omega_k V_{i-k}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (6)$$

式中 $\omega_k = (\Delta t)^{-\alpha} GL_k (0 \leq k \leq n)$; $V_i = V(t_i)$,

$V_{i-1} = V(t_{i-1}), V_{i-k} = V(t_{i-k}), F_i = F(t_i), F_{i-1} = F(t_{i-1})$, 其中 $t_i = i\Delta t, t_{i-1} = (i-1)\Delta t, t_{i-k} = (i-k)\Delta t$; Q_1, Q_2, T 和 T_1 只与结构参数有关,它们的表达式以及推导过程见附录。

不失一般性,假定 $V_0 = V(0) = 0$ 和 $F_0 = F(0) = 0$,基于式(6)能够推导得到系统状态向量的时域显式表达式为:

$$V_i = A_{i,1} F_1 + A_{i,2} F_2 + \dots + A_{i,i} F_i = A_i F_{[i]}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (7)$$

式中 $F_{[i]} = [F_1 \quad F_2 \quad \dots \quad F_i]^T$; $A_i = [A_{i,1} \quad A_{i,2} \quad \dots \quad A_{i,i}]$,其中系数向量 $A_{i,j} (1 \leq j \leq i \leq n)$ 可以由以下闭合公式进行计算:

$$\begin{cases} A_{1,1} = Q_2 L \\ A_{2,1} = (TQ_2 + Q_1)L + \omega_1 T_1 A_{1,1} \\ A_{i,1} = TA_{i-1,1} + T_1 \sum_{k=1}^{i-1} \omega_k A_{i-k,1}, \quad 3 \leq i \leq n \\ A_{i,j} = A_{i-1,j-1}, \quad 2 \leq j \leq i \leq n \end{cases} \quad (8)$$

根据式(8)所揭示的系数向量之间的内在关系,仅系数向量 $A_{i,1} (1 \leq i \leq n)$ 需要计算和存储,其余系数向量均可以用 $A_{i,1} (1 \leq i \leq n)$ 表示。应当指出,系数向量 $A_{i,1}$ 具有明确的物理意义,它表示在 t_i 时刻作用的单位脉冲激励 $f(t)$ (如图 1 所示)下系统在 t_i 时刻的状态向量。因此,系数向量 $A_{i,1} (1 \leq i \leq n)$ 的计算量相当于对分数阶导数系统进行 1 次响应时程分析。

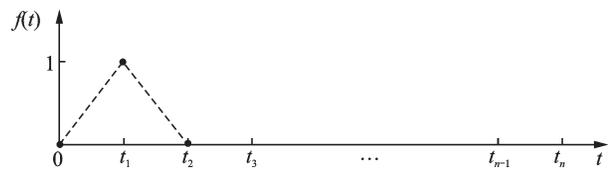


图 1 单位脉冲激励 $f(t)$

Fig. 1 The unit impulse excitation $f(t)$

一般而言,人们只关注系统的某些关键响应,并不要求出系统中所有的响应。假设 r_i 为所关注的关键响应,如位移响应、速度响应、位移响应分数阶导数或构件内力响应等,则由式(7)能够得到关键响应 r_i 的时域显式表达式为:

$$r_i = q^T V_i = a_{i,1}^r F_1 + a_{i,2}^r F_2 + \dots + a_{i,i}^r F_i = a_i^r F_{[i]}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (9)$$

式中 $a_i^r = [a_{i,1}^r \quad a_{i,2}^r \quad \dots \quad a_{i,i}^r]$, 其中 $a_{i,j}^r = q^T A_{i,j}$ ($1 \leq j \leq i \leq n$); $q = [q_D^T \quad q_V^T \quad q_a^T]^T$ 为转换向量,其中 q_D, q_V 和 q_a 分别为针对位移响应、速度响应和位移响应分数阶导数的转换向量。当 r_i 为 V_i 中的某一位移响应、速度响应或位移响应分数阶导数时, q 中除与该位移响应、速度响应或位移响应分数阶导数对应的元素为 1 外,其余元素均为 0。当 r_i 为某一构件内力响应时, q 依赖于相应的本构关系。

2 基于直接求导法的动力响应灵敏度时域显式表达式

假设 θ 为分数阶导数系统中的一个设计参数, 则对运动方程(1)两端同时关于参数 θ 求导能够得到以下灵敏度方程:

$$M \frac{\partial \ddot{U}(t)}{\partial \theta} + C \frac{\partial \dot{U}(t)}{\partial \theta} + K \frac{\partial U(t)}{\partial \theta} + C_\alpha \frac{\partial D_i^\alpha U(t)}{\partial \theta} = \frac{\partial L}{\partial \theta} F(t) - \left[\frac{\partial M}{\partial \theta} \ddot{U}(t) + \frac{\partial C}{\partial \theta} \dot{U}(t) + \frac{\partial K}{\partial \theta} U(t) + \frac{\partial C_\alpha}{\partial \theta} D_i^\alpha U(t) \right] \quad (10)$$

式中 $\partial M/\partial \theta, \partial C/\partial \theta, \partial K/\partial \theta, \partial C_\alpha/\partial \theta$ 和 $\partial L/\partial \theta$ 分别为矩阵 M, C, K, C_α 和 L 关于参数 θ 的灵敏度; $\partial U(t)/\partial \theta, \partial \dot{U}(t)/\partial \theta, \partial \ddot{U}(t)/\partial \theta$ 和 $\partial D_i^\alpha U(t)/\partial \theta$ 分别为响应向量 $U(t), \dot{U}(t), \ddot{U}(t)$ 和 $D_i^\alpha U(t)$ 关于参数 θ 的灵敏度。

由式(10)可以看出, 灵敏度方程的求解依赖于运动方程(1)的求解。由式(1)可将 $\ddot{U}(t)$ 表达为:

$$\ddot{U}(t) = M^{-1} [LF(t) - C_\alpha D_i^\alpha U(t) - C\dot{U}(t) - KU(t)] \quad (11)$$

将式(11)代入式(10)可得:

$$M \frac{\partial \ddot{U}(t)}{\partial \theta} + C \frac{\partial \dot{U}(t)}{\partial \theta} + K \frac{\partial U(t)}{\partial \theta} + C_\alpha \frac{\partial D_i^\alpha U(t)}{\partial \theta} = L_1 F(t) + L_2 V(t) \quad (12)$$

式中 $V(t)$ 如式(5)所示; L_1 和 L_2 可以表达为:

$$\begin{cases} L_1 = \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{\partial M}{\partial \theta} M^{-1} L \\ L_2 = \left[\frac{\partial M}{\partial \theta} M^{-1} K - \frac{\partial K}{\partial \theta} \frac{\partial M}{\partial \theta} M^{-1} C - \frac{\partial C}{\partial \theta} \right. \\ \left. \frac{\partial M}{\partial \theta} M^{-1} C_\alpha - \frac{\partial C_\alpha}{\partial \theta} \right] \end{cases} \quad (13)$$

对比式(1)和式(12)可知, 灵敏度方程和运动方程在形式上是一致的。因此, 与式(6)类似, 系统状态向量灵敏度的递推公式可以表达为:

$$\frac{\partial V_i}{\partial \theta} = Q_1(L_1 F_{i-1} + L_2 V_{i-1}) + Q_2(L_1 F_i + L_2 V_i) + T \frac{\partial V_{i-1}}{\partial \theta} + T_1 \sum_{k=1}^i \omega_k \frac{\partial V_{i-k}}{\partial \theta}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (14)$$

假定系统的初始条件为 $V_0 = 0$, 并且初始条件与设计参数 θ 无关, 即 $\partial V_0/\partial \theta = 0$, 则基于式(6)和(14)能够推导得到系统状态向量灵敏度的时域显式表达式为:

$$\frac{\partial V_i}{\partial \theta} = B_{i,1} F_1 + B_{i,2} F_2 + \dots + B_{i,i} F_i = B_i F_{[i]}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (15)$$

式中 $F_{[i]} = [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_i]^T; B_i = [B_{i,1} \ B_{i,2} \ \dots \ B_{i,i}]$, 其中系数向量 $B_{i,j} (1 \leq j \leq i \leq n)$ 可以由以下闭合公式进行计算:

$$\begin{cases} B_{1,1} = Q_4 \\ B_{2,1} = TQ_4 + Q_3 + \omega_1 T_1 B_{1,1} + T_2 A_{1,1} + \omega_1 T_3 A_{1,1} \\ B_{i,1} = TB_{i-1,1} + T_1 \sum_{k=1}^{i-1} \omega_k B_{i-k,1} + T_2 A_{i-1,1} + \\ T_3 \sum_{k=1}^{i-1} \omega_k A_{i-k,1}, \quad 3 \leq i \leq n \\ B_{i,j} = B_{i-1,j-1}, \quad 2 \leq j \leq i \leq n \end{cases} \quad (16)$$

式中:

$$Q_3 = Q_1 L_1 + Q_2 L_2 Q_1 L, \quad Q_4 = Q_2 L_1 + Q_2 L_2 Q_2 L, \\ T_2 = Q_1 L_2 + Q_2 L_2 T, \quad T_3 = Q_2 L_2 T_1 \quad (17)$$

与式(8)类似, 式(16)同样揭示了系数向量 $B_{i,j} (1 \leq j \leq i \leq n)$ 之间的内在关系, 仅 $B_{i,1} (1 \leq i \leq n)$ 需要进行计算和存储, 其余系数向量均可以用 $B_{i,1} (1 \leq i \leq n)$ 表示。与 $A_{i,1}$ 类似, 系数向量 $B_{i,1}$ 同样具有明确的物理意义, 它表示在 t_i 时刻作用的单位脉冲激励 $f(t)$ (如图 1 所示) 下, 系统在 t_i 时刻的状态向量灵敏度。因此, 系数向量 $B_{i,1} (1 \leq i \leq n)$ 的计算量相当于对分数阶导数系统进行 1 次响应灵敏度时程分析。

记式(9)中关键响应 r_i 关于参数 θ 的灵敏度为 $\partial r_i/\partial \theta$, 则由式(15)可得 $\partial r_i/\partial \theta$ 的时域显式表达式为:

$$\frac{\partial r_i}{\partial \theta} = q^T \frac{\partial V_i}{\partial \theta} = b_{i,1}^r F_1 + b_{i,2}^r F_2 + \dots + b_{i,i}^r F_i = b_i^r F_{[i]}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (18)$$

式中 $b_i^r = [b_{i,1}^r \ b_{i,2}^r \ \dots \ b_{i,i}^r]$, 其中 $b_{i,j}^r = q^T B_{i,j} (1 \leq j \leq i \leq n)$ 。

假设考虑 m 个设计参数, 则基于直接求导法构建关键响应 r_i 关于所有参数灵敏度的时域显式表达式, 计算量相当于对分数阶导数系统进行 m 次响应灵敏度时程分析。当所涉及的设计参数数目较多时, 上述方法计算量较大, 此时可基于伴随变量法构建关键响应灵敏度的时域显式表达式。

3 基于伴随变量法的动力响应灵敏度时域显式表达式

设 $r(\tilde{t})$ 为所关注 \tilde{t} 时刻的位移响应或构件内力响应, 则响应 $r(\tilde{t})$ 可以表达为以下积分形式:

$$r(\tilde{t}) = q_D^T U(\tilde{t}) = \int_0^{t_d} q_D^T U(t) \delta(t - \tilde{t}) dt \quad (19)$$

式中 t_d 为位移响应 $U(t)$ 的持续时长; q_D 为针对位移响应的转换向量; $\delta(\cdot)$ 为 Dirac 函数。

为了计算响应 $r(\tilde{t})$ 关于参数 θ 的灵敏度, 引入

一任意伴随向量 $\lambda(t)$, 并定义一个新的变量 $\psi(\tilde{t})$ 为:

$$\psi(\tilde{t}) = r(\tilde{t}) + \int_0^{\tilde{t}_d} \lambda^T(t) [M\ddot{U}(t) + C\dot{U}(t) + KU(t) + C_\alpha D_t^\alpha U(t) - LF(t)] dt \quad (20)$$

由于运动方程(1)在任意时刻恒成立, $\psi(\tilde{t})$ 恒等于 $r(\tilde{t})$, 所以它们关于参数 θ 的灵敏度也恒等, 即:

$$\frac{\partial \psi(\tilde{t})}{\partial \theta} = \frac{\partial r(\tilde{t})}{\partial \theta} \quad (21)$$

对式(20)左右两端同时关于参数 θ 求导, 并进行分部积分, 整理后可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(\tilde{t})}{\partial \theta} &= \int_0^{\tilde{t}_d} \frac{\partial q_D^T}{\partial \theta} U(t) \delta(t - \tilde{t}) dt + \int_0^{\tilde{t}_d} \lambda^T(t) \left[\frac{\partial M}{\partial \theta} \ddot{U}(t) + \frac{\partial C}{\partial \theta} \dot{U}(t) + \frac{\partial K}{\partial \theta} U(t) + \frac{\partial C_\alpha}{\partial \theta} D_t^\alpha U(t) - \frac{\partial L}{\partial \theta} F(t) \right] dt + \\ &\int_0^{\tilde{t}_d} \left[\ddot{\lambda}^T(t) M - \dot{\lambda}^T(t) C + \lambda^T(t) K + \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ n\Delta t = \tilde{t}_d - t}} \sum_{k=0}^n \omega_k \lambda^T(t + k\Delta t) C_\alpha + q_D^T \delta(t - \tilde{t}) \right] \frac{\partial U(t)}{\partial \theta} dt + \\ &\lambda^T(t) M \frac{\partial \dot{U}(t)}{\partial \theta} \Big|_0^{\tilde{t}_d} - \dot{\lambda}^T(t) M \frac{\partial U(t)}{\partial \theta} \Big|_0^{\tilde{t}_d} + \lambda^T(t) C \frac{\partial U(t)}{\partial \theta} \Big|_0^{\tilde{t}_d} \end{aligned} \quad (22)$$

尽管式(22)对任意的伴随向量 $\lambda(t)$ 都成立, 但为了避免计算位移向量的灵敏度 $\partial U(t)/\partial \theta$, 可选择一伴随向量以消除其中含 $\partial U(t)/\partial \theta$ 的积分项, 得到以下伴随方程:

$$M\ddot{\lambda}(t) - C\dot{\lambda}(t) + K\lambda(t) + C_\alpha \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ n\Delta t = \tilde{t}_d - t}} \sum_{k=0}^n \omega_k \lambda(t + k\Delta t) = -q_D \delta(t - \tilde{t}) \quad (23)$$

假定系统的初始位移和速度与设计参数 θ 无关, 则有 $\partial U(0)/\partial \theta = \partial \dot{U}(0)/\partial \theta = 0$ 。同时, 令式(22)的后三项均等于 0, 得到以下终值条件:

$$\lambda(\tilde{t}_d) = 0, \quad \dot{\lambda}(\tilde{t}_d) = 0 \quad (24)$$

此时, 式(23)和(24)组成一个关于伴随向量 $\lambda(t)$ 的终值问题。为求解该问题, 可采用变量代换 $s = \tilde{t}_d - t$ 将终值问题转换成初值问题, 即:

$$\begin{cases} M \frac{d^2 \mathbf{A}(s)}{ds^2} + C \frac{d\mathbf{A}(s)}{ds} + K\mathbf{A}(s) + C_\alpha D_s^\alpha \mathbf{A}(s) = \mathbf{P}(s) \\ \mathbf{A}(0) = 0, \quad \frac{d\mathbf{A}(0)}{ds} = 0 \end{cases} \quad (25)$$

式中 $\mathbf{P}(s) = -q_D \delta(s - \tilde{s})$ 表示在时刻 $s = \tilde{s} = \tilde{t}_d - \tilde{t}$ 作用的脉冲激励; 伴随向量 $\mathbf{A}(s) = \lambda(\tilde{t}_d - s)$; $D_s^\alpha \mathbf{A}(s)$ 表示对 $\mathbf{A}(s)$ 关于 s 求 $\alpha (0 \leq \alpha < 1)$ 阶导数, 可表达为:

$$D_s^\alpha \mathbf{A}(s) = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ n\Delta t = s}} \sum_{k=0}^n \omega_k \mathbf{A}(s - k\Delta t) \quad (26)$$

对比伴随方程(25)和运动方程(1)可知两者在形式上是一致的, 所以式(25)同样可以采用 Newmark- β 数值积分法进行求解。一旦获得伴随向量 $\mathbf{A}(s) = \mathbf{A}(\tilde{t}_d - t) = \lambda(t)$ 后, 由式(21)和(22)即可得到响应 $r(\tilde{t})$ 的灵敏度为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r(\tilde{t})}{\partial \theta} &= \int_0^{\tilde{t}_d} \frac{\partial q_D^T}{\partial \theta} U(t) \delta(t - \tilde{t}) dt + \int_0^{\tilde{t}_d} \mathbf{A}^T(\tilde{t}_d - t) \left[\frac{\partial M}{\partial \theta} \ddot{U}(t) + \frac{\partial C}{\partial \theta} \dot{U}(t) + \frac{\partial K}{\partial \theta} U(t) + \frac{\partial C_\alpha}{\partial \theta} D_t^\alpha U(t) - \frac{\partial L}{\partial \theta} F(t) \right] dt \end{aligned} \quad (27)$$

若关注时刻 $\tilde{t} = t_i = i\Delta t$ 的响应 $r_i = r(t_i) (1 \leq i \leq n)$, 为简单起见, 可令 $\tilde{t}_d = t_{i+1} = (i+1)\Delta t$, 此时 $\mathbf{P}(s)$ 表示在时刻 $s = \Delta t$ 作用的脉冲激励。假定 $U(0) = \dot{U}(0) = 0$ 和 $F(0) = 0$, 由式(1)和(2)可知 $\ddot{U}(0) = 0$ 和 $D_t^\alpha U(0) = 0$, 又因为 $\mathbf{A}(0) = 0$, 所以式(27)可以采用梯形积分公式求解如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_i}{\partial \theta} &= \frac{\partial q_D^T}{\partial \theta} U_i + \sum_{k=1}^i \mathbf{A}_{i-k+1}^T \left(\frac{\partial M}{\partial \theta} \ddot{U}_k + \frac{\partial C}{\partial \theta} \dot{U}_k + \frac{\partial K}{\partial \theta} U_k + \frac{\partial C_\alpha}{\partial \theta} D_t^\alpha U_k - \frac{\partial L}{\partial \theta} F_k \right) \Delta t, \\ 1 &\leq i \leq n \end{aligned} \quad (28)$$

式中 $\mathbf{A}_{i-k+1} = \mathbf{A}(t_{i-k+1}) (1 \leq k \leq i \leq n)$ 。

由式(11)可知:

$$\ddot{U}_k = M^{-1} (LF_k - C_\alpha D_t^\alpha U_k - C\dot{U}_k - KU_k), \quad 1 \leq k \leq i \leq n \quad (29)$$

将式(29)代入式(28)可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_i}{\partial \theta} &= \frac{\partial q_D^T}{\partial \theta} U_i - \sum_{k=1}^i \mathbf{A}_{i-k+1}^T (L_1 F_k + L_2 V_k) \Delta t, \\ 1 &\leq i \leq n \end{aligned} \quad (30)$$

式中 $V_k = [U_k^T \quad \dot{U}_k^T \quad D_t^\alpha U_k^T]^T (1 \leq k \leq i \leq n)$; L_1 和 L_2 如式(13)所示。

由式(7)可得响应 U_i 的时域显式表达式为:

$$U_i = A_{i,1}^U F_1 + A_{i,2}^U F_2 + \dots + A_{i,i}^U F_i = A_i^U F_{[i]}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (31)$$

式中 $A_i^U = [A_{i,1}^U \quad A_{i,2}^U \quad \dots \quad A_{i,i}^U]$, 其中 $A_{i,j}^U$ 取自系数向量 $A_{i,j} (1 \leq j \leq i \leq n)$ 中相应于 U_i 的列向量。

将式(7)和(31)代入式(30)可得响应灵敏度 $\partial r_i/\partial \theta$ 的时域显式表达式为:

$$\frac{\partial r_i}{\partial \theta} = \tilde{b}_{i,1}^r F_1 + \tilde{b}_{i,2}^r F_2 + \dots + \tilde{b}_{i,i}^r F_i = \tilde{b}_i^r F_{[i]}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (32)$$

式中 $\tilde{b}_i^r = [\tilde{b}_{i,1}^r \ \tilde{b}_{i,2}^r \ \dots \ \tilde{b}_{i,i}^r]$, 其中:

$$\tilde{b}_{i,j}^r = \frac{\partial q_D^T}{\partial \theta} A_{i,j}^U - (\mathbf{A}_{i-j+1}^T L_1 + \sum_{k=j}^i \mathbf{A}_{i-k+1}^T L_2 A_{k,j}) \Delta t, \quad 1 \leq j \leq i \leq n \quad (33)$$

由式(8)所揭示的系数向量 $A_{i,j}$ ($1 \leq j \leq i \leq n$) 之间的内在关系, 可将式(33)改写成:

$$\begin{cases} \tilde{b}_{i,1}^r = \frac{\partial q_D^T}{\partial \theta} A_{i,1}^U - (\mathbf{A}_1^T L_1 + \sum_{k=1}^i \mathbf{A}_{i-k+1}^T L_2 A_{k,1}) \Delta t, \\ \tilde{b}_{i,j}^r = \tilde{b}_{i-1,j-1}^r, \quad 2 \leq j \leq i \leq n \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n \quad (34)$$

从式(34)可以看出, 仅系数 $\tilde{b}_{i,1}^r$ ($1 \leq i \leq n$) 需要进行计算和存储, 其余系数均可以用 $\tilde{b}_{i,1}^r$ ($1 \leq i \leq n$) 表示。在已获得系数向量 $A_{i,j}$ ($1 \leq j \leq i \leq n$) 的基础上, 若求得伴随向量 $\mathbf{A}(s)$, 即可基于式(34)计算系数 $\tilde{b}_{i,j}^r$ ($1 \leq j \leq i \leq n$) 并构建响应灵敏度 $\partial r_i / \partial \theta$ 的时域显式表达式(32)。需要指出的是, 基于伴随变量法构建响应 r_i 关于不同参数灵敏度的时域显式表达式, 只需要进行 1 次伴随方程求解, 计算量相当于对分数阶导数系统进行 1 次响应时程分析。因此, 当所涉及的设计参数

$$\text{cov}(F_{[i]}, F_{[i]}) = \begin{bmatrix} R_F(t_1, t_1) - \mu_F(t_1)\mu_F(t_1) & R_F(t_1, t_2) - \mu_F(t_1)\mu_F(t_2) & \dots & R_F(t_1, t_i) - \mu_F(t_1)\mu_F(t_i) \\ R_F(t_2, t_1) - \mu_F(t_2)\mu_F(t_1) & R_F(t_2, t_2) - \mu_F(t_2)\mu_F(t_2) & \dots & R_F(t_2, t_i) - \mu_F(t_2)\mu_F(t_i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_F(t_i, t_1) - \mu_F(t_i)\mu_F(t_1) & R_F(t_i, t_2) - \mu_F(t_i)\mu_F(t_2) & \dots & R_F(t_i, t_i) - \mu_F(t_i)\mu_F(t_i) \end{bmatrix} \quad (40)$$

式中 $\mu_F(t)$ 和 $R_F(t, \tau)$ 分别为非平稳随机激励 $F(t)$ 的均值函数和自相关函数。

应当指出, 式(35)~(38)为分数阶导数系统响应统计矩灵敏度的时域显式列式, 它建立了系统响应统计量灵敏度与激励统计量之间的直接联系。式(35)和(36)可以称作基于直接求导法的时域显式方法, 而式(37)和(38)可以称作基于伴随变量法的时域显式方法。

5 数值算例

以图 2 所示设置分数阶导数黏弹性阻尼器的层剪切结构为数值算例, 验证本文所提出的非平稳随机振动灵敏度分析时域显式方法的计算精度和计算效率。该结构每一层的质量和刚度分别为 $m_i = 1.8 \times 10^4$ kg 和 $k_i = 8.9 \times 10^5$ kN/m ($1 \leq i \leq N$), 其中 N 为结构层数, 在本算例中取 $N = 20$ 。采用瑞利

数目较多时, 采用伴随变量法构建响应灵敏度的时域显式表达式会比采用直接求导法具有更高的计算效率, 而当所涉及的设计参数数目较少时, 采用直接求导法会更加简单直接。

4 非平稳随机振动灵敏度分析的时域显式方法

基于关键响应 r_i 的时域显式表达式(9), 及其灵敏度 $\partial r_i / \partial \theta$ 的时域显式表达式(18)或(32), 利用统计矩的运算规律能够直接计算得到响应 r_i 的均值 μ_{r_i} 和方差 $\sigma_{r_i}^2$ 关于参数 θ 的灵敏度为:

$$\frac{\partial \mu_{r_i}}{\partial \theta} = E\left(\frac{\partial r_i}{\partial \theta}\right) = \tilde{b}_i^r E(F_{[i]}), \quad 1 \leq i \leq n \quad (35)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r_i}^2}{\partial \theta} = 2\text{cov}\left(r_i, \frac{\partial r_i}{\partial \theta}\right) = 2(\mathbf{a}_i^r) \text{cov}(F_{[i]}, F_{[i]})(\tilde{b}_i^r)^T, \quad 1 \leq i \leq n \quad (36)$$

或

$$\frac{\partial \mu_{r_i}}{\partial \theta} = E\left(\frac{\partial r_i}{\partial \theta}\right) = \tilde{b}_i^r E(F_{[i]}), \quad 1 \leq i \leq n \quad (37)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r_i}^2}{\partial \theta} = 2\text{cov}\left(r_i, \frac{\partial r_i}{\partial \theta}\right) = 2(\mathbf{a}_i^r) \text{cov}(F_{[i]}, F_{[i]})(\tilde{b}_i^r)^T, \quad 1 \leq i \leq n \quad (38)$$

式中 $F_{[i]}$ 的均值向量和协方差矩阵可以表达为:

$$E(F_{[i]}) = [\mu_F(t_1) \ \mu_F(t_2) \ \dots \ \mu_F(t_i)]^T \quad (39)$$

阻尼模型, 取结构第 1 阶和第 20 阶模态的阻尼比为 $\zeta = 0.05$ 。结构每一层均布置 1 个黏弹性阻尼器, 阻尼器与楼层的夹角均为 $\eta = \arccos 0.8$ 。所布置黏弹性阻尼器的阻尼力模型取为分数阶 Kelvin 模型^[17], 即:

$$f_{d,i} = k_{d,i} u_{d,i} + c_{d,i} D_t^\alpha u_{d,i}, \quad 1 \leq i \leq 20 \quad (41)$$

式中 $u_{d,i}$ 为第 i 个黏弹性阻尼器两端节点的轴向相对位移; $k_{d,i}$ 和 $c_{d,i}$ 分别为第 i 个黏弹性阻尼器的刚度系数和阻尼系数。在本算例中, 取 $\alpha = 0.6$, $k_{d,i} = k_d = 3 \times 10^5$ kN/m 和 $c_{d,i} = c_d = 2.5 \times 10^5$ kN·s ^{α} /m ($1 \leq i \leq 20$)。

结构受零均值非平稳地震激励 $F(t)$ 的作用, $F(t)$ 取为均匀调制非平稳随机过程, 即 $F(t) = g(t)f(t)$ 。 $g(t)$ 为均匀调制函数, 取为:

$$g(t) = \begin{cases} (t/t_a)^2, & 0 \leq t \leq t_a \\ 1, & t_a \leq t \leq t_b \\ e^{-\delta(t-t_b)}, & t_b \leq t \leq t_c \end{cases} \quad (42)$$

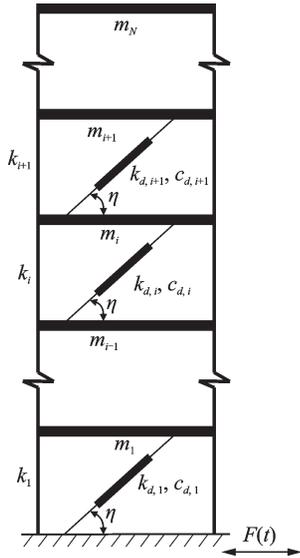


图 2 设置分数阶导数黏弹性阻尼器的层剪切结构

Fig. 2 A shear-type structure with viscoelastic dampers modelled by fractional derivatives

式中 $\delta = 0.18, t_a = 6 \text{ s}, t_b = 18 \text{ s}, t_c = 30 \text{ s}$ 。 $f(t)$ 为零均值平稳随机过程,其功率谱密度函数取为 Kanai-Tajimi 谱^[27],即:

$$S_f(\omega) = \frac{\omega_g^4 + 4\zeta_g^2 \omega_g^2 \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_g^2 \omega_g^2 \omega^2} S_0 \quad (43)$$

式中 $\omega_g = 15.708 \text{ rad/s}, \zeta_g = 0.6, S_0 = 0.005 \text{ m}^2/\text{s}^3$ 。 $f(t)$ 的自相关函数可以表达为^[28]:

$$R_f(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{\pi S_0}{2} e^{-\zeta_g \omega_g |\tau|} \cdot [\mu_1 \cos(\omega_d \tau) + \mu_2 \sin(\omega_d |\tau|)] \quad (44)$$

式中:

$$\begin{cases} \omega_d = \omega_g \sqrt{1 - \zeta_g^2} \\ \mu_1 = \frac{\omega_g (1 + 4\zeta_g^2)}{\zeta_g} \\ \mu_2 = \frac{\omega_g (1 - 4\zeta_g^2)}{\sqrt{1 - \zeta_g^2}} \end{cases} \quad (45)$$

相应地, $F(t)$ 的自相关函数可以表达为:

$$R_F(t, \tau) = g(t)g(t + \tau)R_f(\tau) \quad (46)$$

考虑各层黏弹性阻尼器的刚度系数和阻尼系数均同时变化,此时仅有 2 个设计参数,分别为 k_d 和 c_d 。分别采用基于直接求导法 (Direct Differentiation Method, DDM) 和伴随变量法 (Adjoint Variable Method, AVM) 的时域显式方法 (Explicit Time-Domain Method, ETDM) 对图 2 所示层剪切结构进行非平稳随机振动灵敏度分析。同时,采用基于蒙特卡罗模拟 (Monte-Carlo Simulation, MCS) 的有限差分法 (Finite Difference Method, FDM) 计算随机振动灵敏度的参考解,其中差分步长取为设计参数的 0.2% 变化量, MCS 的样本数取为 10^4 。时程分析步

长取 $\Delta t = 0.02 \text{ s}$, 时程分析总长为 $T = 30 \text{ s}$ 。三种计算方法下结构顶层水平位移标准差关于 k_d 和 c_d 的灵敏度结果分别如图 3 和 4 所示。从图中可以看出,基于 DDM 的 ETDM 和基于 AVM 的 ETDM 计算结果基本重合,且均与基于 MCS 的 FDM 计算结果吻合良好,说明所提方法具有理想的计算精度。此外,从图 3 和图 4 还可以看出,顶层水平位移标准差灵敏度时程的变化趋势明显受到式 (42) 所示均匀调制函数的影响,说明在非平稳随机激励下分数阶导数系统的随机响应灵敏度具有明显的非平稳特征。

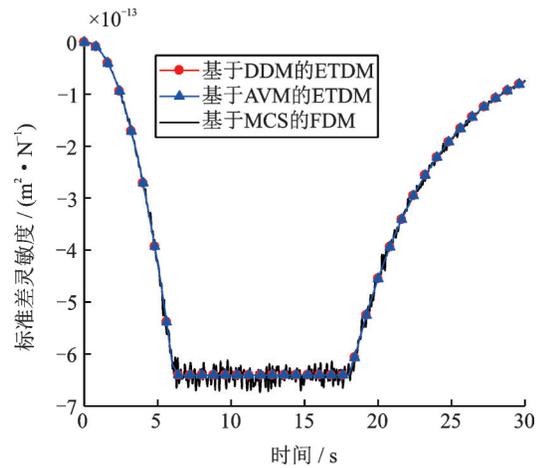


图 3 顶层水平位移标准差关于 k_d 的灵敏度时程

Fig. 3 Sensitivity time history of standard deviation of top-storey displacement with respect to k_d

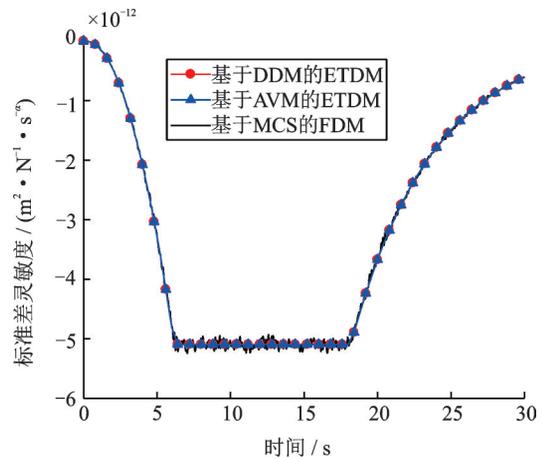


图 4 顶层水平位移标准差关于 c_d 的灵敏度时程

Fig. 4 Sensitivity time history of standard deviation of top-storey displacement with respect to c_d

上述三种方法的计算时间如表 1 所示。从表中可以看出,在设计参数只有 2 个的情况下,基于 DDM 的 ETDM 和基于 AVM 的 ETDM 计算时间分别为 2.3 和 2.1 s,均远少于基于 MCS 的 FDM 计算时间,说明所提方法具有理想的计算效率。这是因为在基于 MCS 的 FDM 中,需要对分数阶导数系统进行大量的响应时程分析。而在 ETDM 中,若基于

DDM 构建响应灵敏度的时域显式表达式, 计算量仅相当于对分数阶导数系统进行 2 次响应灵敏度时程分析; 若基于 AVM 构建响应灵敏度的时域显式表达式, 只需要进行 1 次伴随方程求解, 计算量相当于对分数阶导数系统进行 1 次响应时程分析。

表 1 三种方法的计算时间 (2 个设计参数)

Tab. 1 Computational time of the three methods (2 design parameters)

计算方法	计算时间/s
基于 DDM 的 ETDM	2.3
基于 AVM 的 ETDM	2.1
基于 MCS 的 FDM	3840

为了进一步考察所提方法在设计参数数目较多时的计算效率, 考虑各层黏弹性阻尼器的刚度系数和阻尼系数各自不同变化, 此时设计参数为 $k_{d,i}$ 和 $c_{d,i}$ ($1 \leq i \leq 20$), 共计 40 个。采用基于 DDM 的 ETDM 和基于 AVM 的 ETDM 分别计算顶层水平位移标准差最大值关于刚度系数 $k_{d,i}$ 和阻尼系数 $c_{d,i}$ ($1 \leq i \leq 20$) 的灵敏度, 计算结果分别如图 5 和 6 所示。从图 5 和 6 可以看出, 上述两种方法的计算结果基本重合, 这与图 3 和 4 所观察到的现象一致, 同时还可以看出顶层水平位移标准差的最大值对底层黏弹性阻尼器刚度系数和阻尼系数的变化更敏感。

两种方法的计算时间如表 2 所示。从表中可以看出, 当考虑 40 个设计参数时, 基于 AVM 的 ETDM 相比基于 DDM 的 ETDM 具有明显的效率优势。这是因为在 ETDM 中, 若基于 DDM 构建响应灵敏度的时域显式表达式, 计算量相当于对分数阶导数系统进行 40 次响应灵敏度时程分析; 而基于 AVM 构建响应灵敏度的时域显式表达式, 则只需要进行 1 次伴随方程求解, 计算量相当于对分数阶

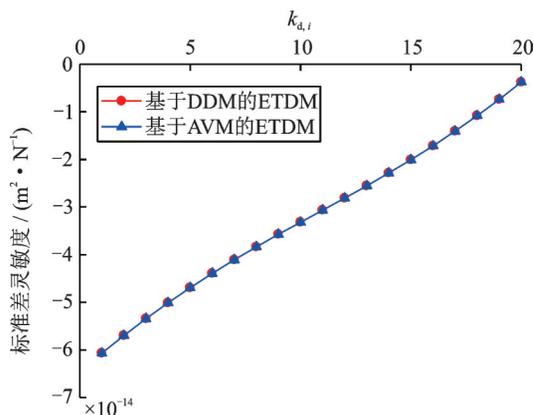


图 5 顶层水平位移标准差最大值关于 $k_{d,i}$ ($1 \leq i \leq 20$) 的灵敏度

Fig. 5 Sensitivity of maximum standard deviation of top-storey displacement with respect to $k_{d,i}$ ($1 \leq i \leq 20$)

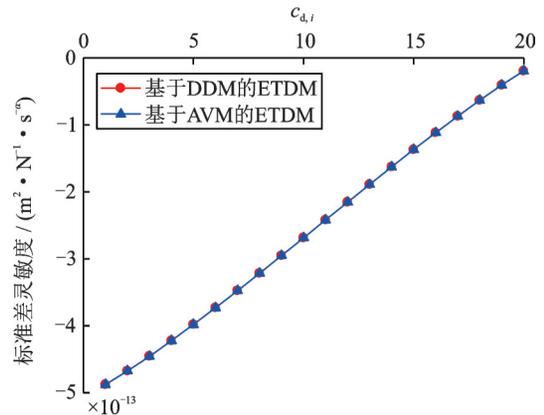


图 6 顶层水平位移标准差最大值关于 $c_{d,i}$ ($1 \leq i \leq 20$) 的灵敏度

Fig. 6 Sensitivity of maximum standard deviation of top-storey displacement with respect to $c_{d,i}$ ($1 \leq i \leq 20$)

表 2 ETDM 的计算时间 (40 个设计参数)

Tab. 2 Computational time of ETDM (40 design parameters)

计算内容	计算时间/s	
	基于 DDM 的 ETDM	基于 AVM 的 ETDM
构建响应显式表达式	0.3	0.3
构建响应灵敏度显式表达式	12	0.6
计算响应统计矩灵敏度	1.4	1.4
合计	13.7	2.3

导数系统进行 1 次响应时程分析。

应当指出, 本文所提方法还可以进一步应用于分数阶导数系统非平稳随机振动优化设计中。特别地, 当考虑分数阶黏弹性阻尼器性能参数优化时, 由于所涉及的设计参数数目通常较少, 可以采用基于 DDM 的 ETDM 进行灵敏度计算; 当考虑分数阶黏弹性阻尼器布局拓扑优化时, 由于所涉及的设计参数数目通常较多, 可以采用基于 AVM 的 ETDM 进行灵敏度计算。

6 结 论

基于灵敏度分析的直接求导法和伴随变量法, 分别推导了分数阶导数线性系统动力响应灵敏度的时域显式表达式, 提出了系统非平稳随机振动灵敏度分析的时域显式方法, 可快速获取系统关键响应统计矩的灵敏度。数值算例结果表明, 所提出的基于直接求导法或伴随变量法的时域显式方法具有理想的计算精度和计算效率。当设计参数数目较少时, 采用基于直接求导法的时域显式方法更加简单直接; 当设计参数数目较多时, 采用基于伴随变量法的时域显式方法计算效率更高。本文所提方法可与

非线性随机振动等效线性化法结合,用以求解分数阶导数非线性系统的非平稳随机振动灵敏度问题,有待进一步研究。

参考文献:

- [1] Bagley R L, Torvik P J. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity[J]. *Journal of Rheology*, 1983, 27(3): 201-210.
- [2] Di Paola M, Pirrotta A, Valenza A. Visco-elastic behavior through fractional calculus: an easier method for best fitting experimental results[J]. *Mechanics of Materials*, 2011, 43(12): 799-806.
- [3] Makris N, Constantinou M C. Fractional derivative Maxwell model for viscous dampers [J]. *Journal of Structural Engineering*, 1991, 117(9): 2708-2724.
- [4] Shen K L, Soong T T. Modeling of viscoelastic dampers for structural applications[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1995, 121(6): 694-701.
- [5] Lewandowski R, Pawlak Z. Dynamic analysis of frames with viscoelastic dampers modelled by rheological models with fractional derivatives[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2011, 330(5): 923-936.
- [6] Spanos P D, Zeldin B A. Random vibration of systems with frequency-dependent parameters or fractional derivatives [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1997, 123: 290-292.
- [7] Agrawal O P. Stochastic analysis of dynamic systems containing fractional derivatives [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 247(5): 927-938.
- [8] Di Paola M, Failla G, Pirrotta A. Stationary and non-stationary stochastic response of linear fractional viscoelastic systems [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2012, 28: 85-90.
- [9] Spanos P D, Evangelatos G I. Response of a non-linear system with restoring forces governed by fractional derivatives-time domain simulation and statistical linearization solution[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2010, 30(9): 811-821.
- [10] 孙春艳, 徐伟. 分数阶导数阻尼下非线性随机振动结构响应的功率谱密度估计[J]. *应用力学学报*, 2013, 30(3): 401-405.
Sun C Y, Xu W. Response power spectral density estimate of a fractionally damped nonlinear oscillator [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2013, 30(3): 401-405.
- [11] Xu J, Li J. Stochastic dynamic response and reliability assessment of controlled structures with fractional derivative model of viscoelastic dampers[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2016, 72-73: 865-896
- [12] Huang Z L, Jin X L, Lim C W, et al. Statistical analysis for stochastic systems including fractional derivatives [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2010, 59(1-2): 339-349.
- [13] 李伟, 赵俊锋, 李瑞红, 等. Guass白噪声激励下分数阶导数系统的非平稳响应[J]. *应用数学和力学*, 2014, 35(1): 63-70.
Li W, Zhao J F, Li R H, et al. Non-stationary response of a stochastic system with fractional derivative damping under Gaussian white-noise excitation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, 35(1): 63-70.
- [14] Frangkoulis V C, Kougioumtzoglou I A, Pantelous A A, et al. Non-stationary response statistics of nonlinear oscillators with fractional derivative elements under evolutionary stochastic excitation[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 97: 2291-2303.
- [15] Kobelev V. Sensitivity analysis of the linear nonconservative systems with fractional damping [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2007, 33(3): 179-188.
- [16] Martinez-Agirre M, Elejabarrieta M J. Higher order eigensensitivities-based numerical method for the harmonic analysis of viscoelastically damped structures[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011, 88(12): 1280-1296.
- [17] Lewandowski R, Lasecka-Plura M. Design sensitivity analysis of structures with viscoelastic dampers [J]. *Computers and Structures*, 2016, 164(1): 95-107.
- [18] Li L, Hu Y J, Wang X L. Design sensitivity analysis of dynamic response of nonviscously damped systems[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2013, 41(1-2): 613-638.
- [19] Yun K S, Youn S K. Design sensitivity analysis for transient response of non-viscously damped dynamic systems[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2017, 55(6): 2197-2210.
- [20] Zhu M, Yang Y, Guest J K, et al. Topology optimization for linear stationary stochastic dynamics: applications to frame structures [J]. *Structural Safety*, 2017, 67: 116-131.
- [21] Gomez F, Spencer B F. Topology optimization framework for structures subjected to stationary stochastic dynamic loads[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2019, 59: 813-833.
- [22] 苏成, 徐瑞. 非平稳随机激励下结构体系动力可靠度时域解法[J]. *力学学报*, 2010, 42(3): 512-520.
Su C, Xu R. Time-domain method for dynamic reliability of structural systems subjected to non-stationary random excitations[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2010, 42(3): 512-520.
- [23] Su C, Xu R. Random vibration analysis of structures by a time-domain explicit formulation method[J]. *Structural Engineering and Mechanics*, 2014, 52(2): 239-260.

- [24] Hu Z Q, Su C, Chen T C, et al. An explicit time-domain approach for sensitivity analysis of non-stationary random vibration problems[J]. Journal of Sound and Vibration, 2016, 382: 122-139.
- [25] Hu Z Q, Wang Z Q, Su C, et al. Reliability based structural topology optimization considering non-stationary stochastic excitations[J]. KSCE Journal of Civil Engineering, 2018, 22(3): 993-1001.
- [26] Podlubny I. Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications[M]. New York: Academic Press, 1999.
- [27] Kanai K. Semi-empirical formula for the seismic characteristics of the ground [J]. Bulletin of the Earthquake Research Institute, 1957, 35(2): 309-325.
- [28] Sun G J, Li H J. Stationary models of random earthquake ground motion and their statistical properties[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2004, 24(6): 21-26.
- [29] Newmark N W. A method of computation for structural dynamics [J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, 1959, 85(7): 67-94.

Explicit time-domain method for sensitivity analysis of nonstationary random vibration of systems with fractional derivatives

XIAN Jian-hua¹, SU Cheng^{1,2}

(1.School of Civil Engineering and Transportation, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China;

2.State Key Laboratory of Subtropical Building Science, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

Abstract: Fractional derivative models are capable of describing the constitutive behaviors of viscoelastic materials. This paper is devoted to the sensitivity analysis of nonstationary random vibration of linear systems comprising fractional derivative terms. The explicit time-domain expressions of dynamic responses are firstly established for the system with fractional derivatives. The sensitivities of dynamic responses are then derived using the direct differentiation method (DDM) or the adjoint variable method (AVM). On the basis of the explicit expressions of dynamic responses and their sensitivities, an explicit time-domain method (ETDM) is proposed for efficient calculation of the sensitivities of statistical moments of responses. The proposed DDM- and AVM-based ETDM are applicable to the scenarios with less and more design variables, respectively. A numerical example involving a shear-type structure under nonstationary seismic excitations and with viscoelastic dampers modelled by fractional derivatives is presented to validate the computational accuracy and efficiency of the proposed method.

Key words: sensitivity of random vibration; fractional derivative; explicit time-domain method; direct differentiation method; adjoint variable method

作者简介: 洗剑华(1994—),男,博士研究生。电话:13570433950;Email: jianhua.xian@qq.com。

通讯作者: 苏成(1968—),男,博士,教授。电话:(020)87111636;Email: cvchsu@scut.edu.cn。

附录:公式(6)的推导过程

由式(1)可得 t_i 时刻的运动方程为:

$$M\ddot{U}_i + C\dot{U}_i + KU_i + C_\alpha D_t^\alpha U_i = LF_i \quad (A1)$$

式中 $D_t^\alpha U_i$ 可由式(2)得到:

$$D_t^\alpha U_i = D_t^\alpha U(t_i) = \sum_{k=0}^i w_k U_{i-k} \quad (A2)$$

Newmark- β 数值积分法采用以下两个基本假定^[29]:

$$\ddot{U}_i = a_0(U_i - U_{i-1}) - a_1\dot{U}_{i-1} - a_2\ddot{U}_{i-1} \quad (A3)$$

$$\dot{U}_i = a_3(U_i - U_{i-1}) - a_4\dot{U}_{i-1} - a_5\ddot{U}_{i-1} \quad (A4)$$

式中:

$$a_0 = \frac{1}{\beta\Delta t^2}, a_1 = \frac{1}{\beta\Delta t}, a_2 = \frac{1}{2\beta} - 1, a_3 = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}, a_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1, a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} - 2 \right) \quad (A5)$$

式中 γ 和 β 为与积分稳定性有关的参数,本文取 $\gamma = 0.5, \beta = 0.25$ 。

将式(A2)~(A4)代入式(A1)可得:

$$M [a_0(U_i - U_{i-1}) - a_1\dot{U}_{i-1} - a_2\ddot{U}_{i-1}] + C [a_3(U_i - U_{i-1}) - a_4\dot{U}_{i-1} - a_5\ddot{U}_{i-1}] + KU_i + C_\alpha \sum_{k=0}^i \omega_k U_{i-k} = LF_i \tag{A6}$$

由式(A6)可得:

$$U_i = \tilde{K}^{-1} (LF_i + S_1 U_{i-1} + S_2 \dot{U}_{i-1} + S_3 \ddot{U}_{i-1} - C_\alpha \sum_{k=1}^i \omega_k U_{i-k}) \tag{A7}$$

式中:

$$\begin{cases} \tilde{K} = a_0 M + a_3 C + K + \omega_0 C_\alpha \\ S_1 = a_0 M + a_3 C, S_2 = a_1 M + a_4 C, S_3 = a_2 M + a_5 C \end{cases} \tag{A8}$$

由式(A1)可得 \ddot{U}_i 为:

$$\ddot{U}_i = M^{-1} (LF_i - C_\alpha D_i^\alpha U_i - C\dot{U}_i - KU_i) \tag{A9}$$

\ddot{U}_{i-1} 也可以类似表达为:

$$\ddot{U}_{i-1} = M^{-1} (LF_{i-1} - C_\alpha D_i^\alpha U_{i-1} - C\dot{U}_{i-1} - KU_{i-1}) \tag{A10}$$

将式(A10)代入式(A7)可得:

$$U_i = R_1 LF_{i-1} + R_2 LF_i + H_{11} U_{i-1} + H_{12} \dot{U}_{i-1} + H_{13} D_i^\alpha U_{i-1} - \tilde{K}^{-1} C_\alpha \sum_{k=1}^i \omega_k U_{i-k} \tag{A11}$$

式中:

$$\begin{cases} R_1 = \tilde{K}^{-1} S_3 M^{-1}, R_2 = \tilde{K}^{-1} \\ H_{11} = \tilde{K}^{-1} (S_1 - S_3 M^{-1} K), H_{12} = \tilde{K}^{-1} (S_2 - S_3 M^{-1} C), H_{13} = -\tilde{K}^{-1} S_3 M^{-1} C_\alpha \end{cases} \tag{A12}$$

将式(A10)和(A11)代入式(A4)可得:

$$\dot{U}_i = R_3 LF_{i-1} + R_4 LF_i + H_{21} U_{i-1} + H_{22} \dot{U}_{i-1} + H_{23} D_i^\alpha U_{i-1} - a_3 \tilde{K}^{-1} C_\alpha \sum_{k=1}^i \omega_k U_{i-k} \tag{A13}$$

式中

$$\begin{cases} R_3 = a_3 R_1 - a_5 M^{-1}, R_4 = a_3 R_2 \\ H_{21} = a_3 (H_{11} - I) + a_5 M^{-1} K, H_{22} = a_3 H_{12} - a_4 I + a_5 M^{-1} C, H_{23} = a_3 H_{13} + a_5 M^{-1} C_\alpha \end{cases} \tag{A14}$$

将式(A11)代入式(A2)可得:

$$D_i^\alpha U_i = R_5 LF_{i-1} + R_6 LF_i + H_{31} U_{i-1} + H_{32} \dot{U}_{i-1} + H_{33} D_i^\alpha U_{i-1} - (\omega_0 \tilde{K}^{-1} C_\alpha - I) \sum_{k=1}^i \omega_k U_{i-k} \tag{A15}$$

式中:

$$\begin{cases} R_5 = \omega_0 R_1, R_6 = \omega_0 R_2 \\ H_{31} = \omega_0 H_{11}, H_{32} = \omega_0 H_{12}, H_{33} = \omega_0 H_{13} \end{cases} \tag{A16}$$

将式(A11), (A13)和(A15)合并可得式(6), 式中:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_3 \\ R_5 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} R_2 \\ R_4 \\ R_6 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix}, T_1 = \begin{bmatrix} -\tilde{K}^{-1} C_\alpha & 0 & 0 \\ -a_3 \tilde{K}^{-1} C_\alpha & 0 & 0 \\ -(\omega_0 \tilde{K}^{-1} C_\alpha - I) & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{A17}$$