

含有分数阶阻尼的 SD 振子系统非线性动力学 响应特征研究

陈恩利¹, 王明昊^{1,2}, 王美琪², 常宇健³

(1. 石家庄铁道大学省部共建交通工程结构力学行为与系统安全国家重点实验室, 河北 石家庄 050043;

2. 石家庄铁道大学机械工程学院, 河北 石家庄 050043;

3. 石家庄铁道大学电气与电子工程学院, 河北 石家庄 050043)

摘要: 研究受简谐激励含分数阶阻尼的 SD 振子系统的幅频响应特性, 并与含整数阶阻尼的 SD 振子系统对比。提出求解系统运动微分方程刚度非线性的傅里叶等效模型, 解决了系统运动微分方程刚度非线性不可积问题。使用平均法求解等效系统运动微分方程, 得到幅频响应解析表达式, 基于 Lyapunov 稳定性理论与 Routh 判据建立周期解稳定性判断条件, 通过与数值方法结果对比, 验证了幅频响应解析方法的正确性。研究表明, SD 振子系统非线性刚度项的傅里叶等效模型可以应用于系统大振幅运动的研究, 大大提高了计算精度。阻尼系数相同时, 分数阶阻尼系统的幅频响应与整数阶阻尼系统相比其共振频率及振幅发生了很大的变化; 改变分数阶系数, 会改变分数阶阻尼系统幅频响应骨架曲线, 整数阶阻尼系统幅频响应骨架曲线不受影响; 改变分数阶阶次时, 分数阶阻尼系统振幅在分界点两侧变化相反。

关键词: 非线性振动; SD 振子; 分数阶; 骨架曲线

中图分类号: O322 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2022)05-1068-08

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2022.05.004

1 概述

Thompson 等^[1]研究简支梁时提出一个含非线性特征的振子模型, 该模型常被用于模拟梁的屈曲, 模型中弹簧因几何结构表现出非线性恢复力。Cao 等^[2]以此基础提出 SD 振子模型, 研究了受简谐激励作用含黏性阻尼的 SD 振子系统从光滑动力学行为迁为不连续动力学行为的现象, 动力学微分方程为:

$$m\ddot{X} + 2kX \left(1 - \frac{L}{\sqrt{X^2 + l^2}} \right) = 0 \quad (1)$$

随后众多学者对 SD 振子系统作了深入研究, 因为振子模型结构上具有几何非线性特征, 在解析求解时有一定困难。文献[3]使用三线性方程来等效振子模型中几何非线性部分, 使用半解析法分析了光滑不连续振子受谐波激励下的混沌现象。研究发现 SD 振子系统光滑时具有和 Duffing 系统类似的双阱动力学现象, 当系统不连续时则具有类鞍点等非标准动力学行为^[4]。王建华等^[5]使用广义胞映射图论方法研究了 SD 振子内部激变现象。陈恩利等^[6]设计了一个具有 SD 振子系统光滑特征的非线性实验装

置, 从实验角度验证了 SD 振子模型具有周期振动、周期 5 振动、混沌运动等复杂的动力学行为, 而且各个实验参数具有良好的可调性。Chen 等^[7]系统性研究了 SD 振子的分岔行为, 如叉型分岔、退化的 Hopf 分岔、同宿分岔、二重极限环分岔、Bautin 分岔、Bogdanov-Takens 分岔等。Han 等^[8]提出了含强无理非线性项的水平刚性耦合 SD 振子。文献[9]研究了分段线性不连续的耦合 SD 振子。Hao 等^[10]设计了基于 SD 振子的准零刚度振子, 使用 SD 振子无理非线性刚度项代替传统的泰勒级数近似方程, 分析了该模型在各参数下复杂的动力学行为。Li 等^[11-13]研究了受干摩擦的 SD 振子奇点稳定性、分岔与黏-滑振动行为。Yang 等^[14]研究了在速度和位移反馈控制下含时滞准零刚度 SD 振子的主共振, 受谐波激励与高斯白噪声作用的含时滞负刚度 SD 振子随机共振现象。发现时滞反馈可以增强随机共振现象, 并以 SD 振子为基础设计了结合压电和电磁转换的能量收集器^[15-17]、一种多方向多稳定机构^[18], 此机构可在超高频激励下产生大幅度响应, 进而从超低频振动源中收集能量。Zhu 等^[19]以 SD 振子为基础针对地震波设计了一种二自由度准零刚度隔振器。

收稿日期: 2021-01-13; 修订日期: 2021-07-13

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(12072205); 石家庄铁道大学研究生创新项目(YC2021045)。

目前诸多研究常在式(1)中引入整数阶阻尼模型表示系统的耗散现象,但是简单的整数阶模型无法准确描述耗散中存在的滞后现象,而分数阶模型可以较准确地描述此类现象^[20]。Caputo等^[21]以分数阶微分模型为基础建立耗散模型,并通过实验证明该模型与铝、铜、玻璃、银、钢等材料的耗散曲线拟合较好。Rossikhin等^[22]使用分数阶模型描述悬索桥自由振动的内摩擦现象,通过该模型得到与振动固有频率相关的阻尼系数,同实验数据拟合较好。文献[23]研究了分数阶阻尼模型在多种线性、非线性迟滞系统中的应用。Padovan等^[24]以Duffing系统为基础,引入分数阶阻尼研究其对非线性系统的影响,发现分数阶阶次同时影响响应的频率和幅值。文献[25]使用两个阶数相独立的分数阶模型描述二自由度系统的阻尼特性,研究了该系统自由振动时能量交换与耗散过程;文献[26-27]使用分数阶模型描述黏弹性薄板的阻尼特性,研究其在2/1等多种内共振条件下的自由振动。Seredyńska等^[28]研究发现含分数阶阻尼的非线性摆、Duffing系统与整数阶阻尼系统有明显不同。Sheu等^[29]将分数阶阻尼引入Duffing系统,发现其对Duffing系统动力学行为有显著影响。Gao等^[30]首次将分数阶Duffing系统扩展至复数域,研究了对称和非对称周期激励时系统的混沌行为。Shen等^[31-32]使用平均法研究了分数阶Duffing振子主共振、超谐共振^[33],发现分数阶参数对系统响应幅值与频率有显著影响。韦鹏等^[34]研究了分数阶Duffing振子的亚谐共振。姜源等^[35]使用平均法得到了分数阶Duffing振子的超谐与亚谐联合共振。文献[36]研究了分数阶van der Pol振子的超谐与亚谐联合共振,发现分数阶参数对响应幅值、频率、周期解的数目等存在显著影响。Niu等^[37]使用Melnikov方法研究了分数阶Duffing系统的混沌阈值。常宇健等^[38]使用分数阶模型拟合出金属橡胶阻尼器的非线性滞回曲线,与实验结果拟合较好。

非线性系统具有独特的动力学现象,如共振区间的位移突跳、多解共存等,通过引入分数阶阻尼研究系统响应,可以更准确地揭示系统复杂的动力学特性,因此有必要研究含分数阶阻尼的SD振子动力学行为,研究结果可以为SD振子系统的工程应用提供理论指导。本文研究受简谐激励作用含分数阶阻尼的SD振子系统幅频响应。系统非线性刚度项在微分方程积分计算时难以求解,现有文献常将其展开为泰勒级数,这种方法在系统振幅较大时会产生很大误差,导致得出错误的周期解、幅频响应等结果。本文提出求解具有刚度非线性项的微分方程傅里叶等效模型,既保留系统非线性特征,又在较大的振幅范围内有较高的计算精度。应用平均法求得等

效系统幅频响应解析表达式,通过Lyapunov稳定性理论与Routh判据建立了系统周期解稳定性判断条件。研究分数阶阻尼对系统幅频响应的影响,并与含整数阶阻尼的SD振子幅频响应进行对比,发现分数阶阻尼系统幅频响应与整数阶阻尼系统响应幅值、频率有很大不同。

2 含黏弹性阻尼的SD振子运动方程

使用分数阶微分来描述系统耗散行为,分数阶微分模型采用Caputo形式^[39]:

$$D^p[X(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t \frac{X'(u)}{(t-u)^p} du \quad (2)$$

式中 $\Gamma(\cdot)$ 为Gamma函数,计算式为 $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$; $p(0 \leq p \leq 1)$ 为分数阶微分项阶次。将式(2)代入式(1),此时系统模型如下:

$$m\ddot{X}(t) + cD^p[X(t)] + 2kX(t) \left[1 - \frac{L}{\sqrt{l^2 + X^2(t)}} \right] = F_1 \cos(\omega t) \quad (3)$$

式中 m 为振子质量, X 为振子位移, k 为弹簧刚度, L 为弹簧原长, l 为振子距一侧弹簧固定端的距离, c 为分数阶系数, p 为分数阶阶次, F_1 为外激励幅值, ω 为外激励频率。

对式(3)进行无量纲化,取:

$$2\zeta\omega_0 = \frac{c}{m}, \omega_0^2 = \frac{2k}{m}, x = \frac{X}{L}, \alpha = \frac{l}{L}, f = \frac{F_1}{mL}$$

可以改写为:

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_0 D^p[x(t)] + \omega_0^2 x(t) \left[1 - \frac{1}{\sqrt{x^2(t) + \alpha^2}} \right] = f \cos(\omega t) \quad (4)$$

设式(4)中刚度非线性项表达式为 $P(x(t)) = \omega_0^2 x(t) \left[1 - \frac{1}{\sqrt{x^2(t) + \alpha^2}} \right]$, 因为 $P(x(t))$ 形式复杂,无法积分计算^[3]。目前诸多文献常将 $P(x(t))$ 展开为泰勒级数 $P_i(x(t))$:

$$P_i(x(t)) = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) x(t) - \omega_0^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^{2i}}{dx^{2i}} (x^2 - 1)^{2i} x^{2i+1}(t) \quad (5)$$

本文将 $P(x(t))$ 展开为8阶泰勒级数并忽略高阶小量,通过计算可知展开时 $x(t)$ 的偶次方项均为0,则式(5)可表示为:

$$P_i(x(t)) = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) x(t) + \frac{\omega_0^2}{2\alpha^3} x^3(t) - \frac{3\omega_0^2}{8\alpha^5} x^5(t) + \frac{5\omega_0^2}{16\alpha^7} x^7(t) \quad (6)$$

当展开阶数取 3 阶时,将式(6)代入式(4),该 SD 系统将变为具有黏弹阻尼特性的 Duffing 系统。泰勒级数法虽然解决了 $P(x(t))$ 无法积分计算的问题,但是系统振幅较大时会产生很大误差,为提高解析解数值仿真的精度,本文提出 $P(x(t))$ 的傅里叶等效模型。设 $P(x(t))$ 的傅里叶等效模型 $P_f(x(t))$ 为:

$$P_f(x(t)) = p_0 + \sum_{i=1}^I [p_i \cos(inx(t)) + q_i \sin(inx(t))] \quad (7)$$

式中 $n, p_0, p_i, q_i (i=1, 2, 3, \dots)$ 为待定系数, I 为近似阶数。

取系统参数 $m=5, k=5$, 分别于 $\alpha=0.1, 0.6$ 与 1.5 时, SD 振子非线性刚度项与不同近似阶数的傅里叶变换结果如图 1~3 所示。

由图 1 可知,当 $\alpha=0.1$ 系统非线性较强时,随着傅里叶近似阶数 I 增大,等效模型精度提高,当 $I=5$ 时,等效模型已经拥有较高精度。随着 α 增大,系统非线性减弱。如图 2 所示,当 $\alpha=0.6$ 时,取 $I=3$ 即可使等效模型拥有较高精度。当 $\alpha > 1$ 时,如图 3 所示,系统弹簧由预压缩变为预拉伸,此时等

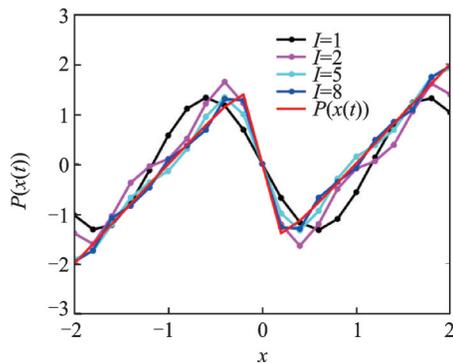


图 1 $\alpha=0.1$ 时不同阶次非线性刚度 $P(x(t))$ 傅里叶等效模型

Fig. 1 Fourier transform equivalent model of nonlinear stiffness $P(x(t))$ with different orders when $\alpha=0.1$

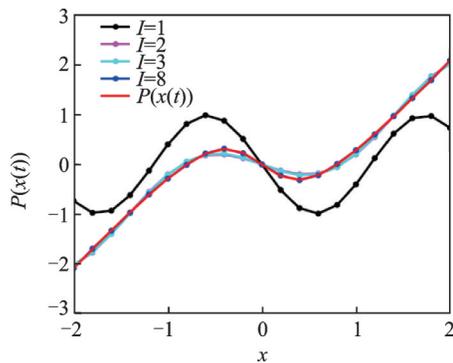


图 2 $\alpha=0.6$ 时不同阶次非线性刚度 $P(x(t))$ 傅里叶变换结果

Fig. 2 Fourier transform equivalent results of nonlinear stiffness $P(x(t))$ with different orders when $\alpha=0.6$

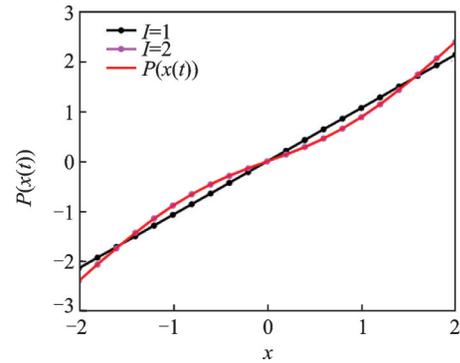


图 3 $\alpha=1.5$ 时不同阶次非线性刚度 $P(x(t))$ 傅里叶变换结果

Fig. 3 Fourier transform equivalent results of nonlinear stiffness $P(x(t))$ with different orders when $\alpha=1.5$

效模型取 $I=2$ 即可拥有较高精度。分析图 1~3 可知,随着 α 增大,使等效模型达到理想精度的傅里叶近似阶数 I 逐渐降低。本文为保证解析解的计算精度,在后文求解时取 $I=8$ 。

取 $\alpha=0.6$, 其余参数与前述相同, $P(x(t))$ 的 8 阶泰勒级数与 8 阶傅里叶等效模型结果如图 4 所示。

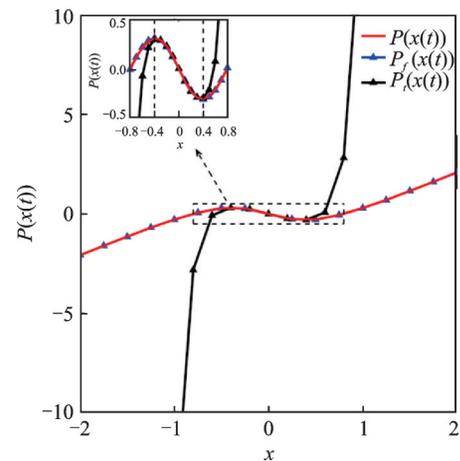


图 4 非线性刚度 $P(x(t))$ 等效模型

Fig. 4 Equivalent model of nonlinear stiffness $P(x(t))$

由图 4 可知:系统位移较小时, $x \in [-0.4, 0.4]$, $P_f(x(t))$ 与 $P(x(t))$ 变化趋势一致;当位移 $|x| > 0.4$ 时, $P_f(x(t))$ 误差随 x 增大而逐渐增加;当位移 $|x| \rightarrow 1$ 时, $P_f(x(t))$ 误差极大。因此 $P_f(x(t))$ 虽然表达式形式简洁,计算方便,但是适用性较差,一旦系统位移响应较大(振幅较大),将产生很大误差,可能导致计算结果完全错误。由图 4 局部放大图可知,虽然 $P_f(x(t))$ 在 $P(x(t))$ 的极大值点与极小值点邻域内存在较小的误差,但是 $P_f(x(t))$ 在较大的位移响应范围内与 $P(x(t))$ 拟合较好,几乎完全重合。因此 $P_f(x(t))$ 的精度与适用范围均优于 $P_f(x(t))$ 。故将式(7)代入式(4)可得:

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_0 D^p[x(t)] + P_f(x) = f \cos(\omega t) \quad (8)$$

3 含黏弹性阻尼的 SD 振子主共振

假设式(8)的解具有以下形式:

$$x(t) = a \cos \varphi \tag{9}$$

式中 a 为系统振动幅值, $\varphi = \omega t + \theta$ 。根据平均法, 将式(9)代入式(8)可得到关于幅值和相位的方程:

$$\dot{a} = -\frac{\sin \varphi}{\omega} R(a, \theta) \tag{10a}$$

$$a \dot{\theta} = -\frac{\cos \varphi}{\omega} R(a, \theta) \tag{10b}$$

式中 $R(a, \theta) = \{ a \omega^2 \cos \varphi - 2 \zeta \omega_0 D^\rho [a \cos \varphi] - P_f(a \cos \varphi) + f \cos(\omega t) \}$ 。

对式(10)中非分数阶项, 关于 φ 在 $[0, 2\pi]$ 取积分平均, 可得:

$$\dot{a}_1 = -\frac{f \sin \theta}{2\omega} \tag{11a}$$

$$a \dot{\theta}_1 = -\frac{1}{2\omega} [a \omega^2 + P_{f_2}(a) + f \cos \theta] \tag{11b}$$

式中 $P_{f_2}(a) = -2 \sum_{i=1}^8 q_i \text{Bessel}J(ima)$; $P_{f_2}(a)$ 中 $\text{Bessel}J(\cdot)$ 为第一类贝塞尔函数。

对式(10)中分数阶项在 $[0, T]$ 内取积分平均, 得到:

$$\dot{a}_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{\sin \varphi 2 \zeta \omega_0 D^\rho [a \cos \varphi]}{\omega} d\varphi \tag{12a}$$

$$a \dot{\theta}_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{\cos \varphi 2 \zeta \omega_0 D^\rho [a \cos \varphi]}{\omega} d\varphi \tag{12b}$$

为求解 Caputo 形式的分数阶微分, 引入以下公式^[31]:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{\sin(\omega t)}{t^\rho} dt = \omega^{\rho-1} \Gamma(1-\rho) \cos\left(\frac{\rho\pi}{2}\right) \tag{13a}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{\cos(\omega t)}{t^\rho} dt = \omega^{\rho-1} \Gamma(1-\rho) \sin\left(\frac{\rho\pi}{2}\right) \tag{13b}$$

将式(13)与(12)联立可得:

$$\dot{a}_2 = -a \zeta \omega_0 \omega^{\rho-1} \sin\left(\frac{\rho\pi}{2}\right) \tag{14a}$$

$$a \dot{\theta}_2 = a \zeta \omega_0 \omega^{\rho-1} \cos\left(\frac{\rho\pi}{2}\right) \tag{14b}$$

将式(11)与式(14)求和可得:

$$\dot{a} = -\frac{f \sin \theta}{2\omega} - a \zeta \omega_0 \omega^{\rho-1} \sin\left(\frac{\rho\pi}{2}\right) \tag{15a}$$

$$a \dot{\theta} = -\frac{1}{2\omega} [a \omega^2 + P_{f_2}(a) + f \cos \theta] + a \zeta \omega_0 \omega^{\rho-1} \cos\left(\frac{\rho\pi}{2}\right) \tag{15b}$$

令式(15)中 $\dot{a} = 0$ 和 $a \dot{\theta} = 0$, 可得:

$$\frac{f \sin \theta}{2\omega} + a \zeta \omega_0 \omega^{\rho-1} \sin\left(\frac{\rho\pi}{2}\right) = 0 \tag{16a}$$

$$\frac{1}{2\omega} (a \omega^2 - a \omega_0^2 + P_{f_2}(a) + f \cos \theta) - a \zeta \omega_0 \omega^{\rho-1} \cos\left(\frac{\rho\pi}{2}\right) = 0 \tag{16b}$$

可由式(16)求得式(8)的幅频函数关系式:

$$\left[2a \zeta \omega_0 \omega^\rho \sin\left(\frac{\rho\pi}{2}\right) \right]^2 + \left[a \omega^2 + P_{f_2}(a) - 2a \zeta \omega_0 \omega^\rho \cos\left(\frac{\rho\pi}{2}\right) \right]^2 = f^2 \tag{17}$$

设奇点为 $(\bar{a}, \bar{\theta})$, $a = \bar{a} + \Delta a$, $\theta = \bar{\theta} + \Delta \theta$ 代入式(15), 并用式(16)消去 $\bar{\theta}$ 可得:

$$\frac{d\Delta a}{dt} = -\Delta a A - \Delta \theta \bar{a} \left[B - \frac{C + P_2(\bar{a})}{2\omega} \right] \tag{18a}$$

$$\frac{d\Delta \theta}{dt} = \Delta a \left[B - \frac{C + P'_2(\bar{a})}{2\omega} \right] - \Delta \theta \bar{a} A \tag{18b}$$

式中 $A = \zeta \omega_0 \omega^{\rho-1} \sin\left(\frac{\rho\pi}{2}\right)$, $B = \zeta \omega_0 \omega^{\rho-1} \cos\left(\frac{\rho\pi}{2}\right)$, $C = \omega^2 - \omega_0^2$, $P'_2(\bar{a}) = \left. \frac{dP_2(a)}{da} \right|_{a=\bar{a}}$ 。

由式(18)可以得到特征行列式:

$$\begin{vmatrix} \lambda + A & \bar{a} \left[B - \frac{C + P_2(\bar{a})}{2\omega} \right] \\ - \left[B - \frac{C + P'_2(\bar{a})}{2\omega} \right] & \lambda + \bar{a} A \end{vmatrix} = \lambda^2 + N_1 \lambda + N_2 = 0 \tag{19}$$

式中 $N_1 = A(1 + \bar{a})$, $N_2 = \frac{\bar{a}}{4\omega^2} \{ C^2 - 4BC\omega + 4B^2\omega^2 + (C - 2B\omega)P'_2(\bar{a}) + [C - 2B\omega + P'_2(\bar{a})] \cdot P_2(\bar{a}) \}$, λ 为待求的特征值。

根据 Lyapunov 稳定性理论与 Routh 判据, 若系统的响应稳定则特征值 $\lambda < 0$ 。如果 $N_1 > 0$ 且 $N_2 > 0$, 那么该奇点的轨线是渐进稳定的。如果 $N_2 < 0$, 那么该奇点对应的轨线是不稳定的。因此 $N_2 = 0$ 是判断轨线是否稳定的临界条件。

4 数值计算

对式(8)进行数值计算, 选取系统参数为 $m = 5$, $k = 5$, $c = 2.0$, $L = 0.16$, $F_1 = 0.5$, $\alpha = 0.9$, $\rho = 0.9$ 。通过式(17)获得系统的幅频响应曲线。为了验证幅频响应曲线的正确性, 采用分数阶扩展状态方程法^[39]对系统进行求解。将式(8)改写为扩展状态方程形式:

$${}_0^c D_{t_n}^{p_1} [x_1(t)] = x_2(t) \quad (20a)$$

$${}_0^c D_{t_n}^{p_2} [x_2(t)] = x_3(t) \quad (20b)$$

$${}_0^c D_{t_n}^{p_3} [x_3(t)] = f \cos(\omega t) - 2\zeta \omega_0 x_2(t) - \omega_0^2 x_1(t) \left[1 - \frac{1}{\sqrt{x_1^2(t) + a^2}} \right] \quad (20c)$$

式中 ${}_0^c D_{t_n}^{p_i} [\cdot]$ ($i=1, 2, 3$) 表示使用 Caputo 形式描述的分数阶微分项; p_1, p_2, p_3 为分数阶阶次。

将式(20)在 Matlab 中进行迭代计算。经过多次试算,在保证精度的前提下,取迭代步长 $h=0.05$,计算时间 $t_n=1000$ s,本文只研究系统稳态运动情况,因此舍弃前 800 s,保留最后 200 s 作为结果。傅里叶等效系统幅频响应曲线计算结果(EMFS)、泰勒级数等效系统幅频响应计算结果(EMTS)与数值方法结果如图 5 所示。

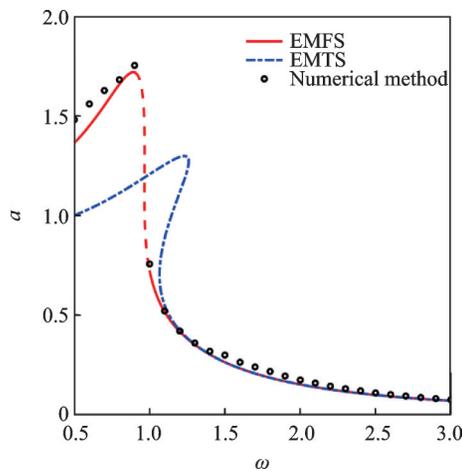


图5 幅频响应曲线对比图

Fig. 5 Comparison of amplitude-frequency response curves

图 5 结果表明,EMFS 与数值方法结果拟合较好,EMTS 在系统振幅较小时 ($a < 0.5$) 与 EMFS 和数值方法结果基本一致。但是当系统振幅较大时 ($a > 0.5$),EMTS 与数值方法结果完全不同,这与图 1~4 结论一致。当系统振幅较大时, $P_l(x(t))$ 将出现极大误差,导致系统幅频响应解析结果错误,而 $P_r(x(t))$ 在大振幅与小振幅时均与 $P(x(t))$ 拟合很好,说明刚度非线性项的计算精度对系统幅频响应曲线计算精度有很大影响,也验证了 EMFS 的正确性。

下面利用 EMFS 幅频响应曲线式(17),分别研究分数阶系数 c 与分数阶阶次 p 对系统幅频响应的影响,并与含整数阶阻尼的 SD 振子系统幅频响应曲线对比。首先选取 $p=0.5$, c 分别为 1.0, 1.5, 2.0 和 2.5,其余系统参数同上,分数阶阻尼 SD 振子系统(FSDS)与整数阶阻尼 SD 振子系统(ISDS)幅频响应数值模拟结果如图 6 所示。

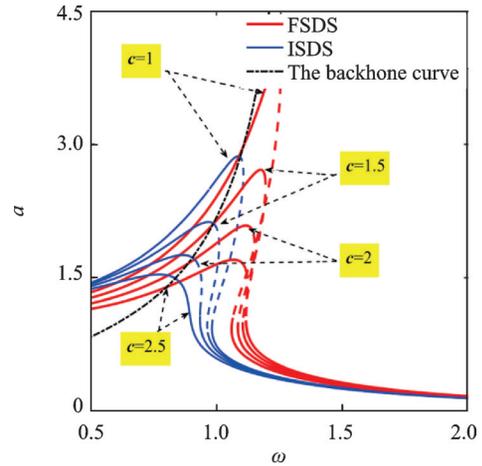


图6 不同分数阶系数的幅频响应曲线

Fig. 6 The amplitude-frequency response curves with different fractional coefficients

图 6 中点划线为 ISDS 的骨架曲线。由图 6 可知当 c 相同时, FSDS 共振区间位于 ISDS 共振区间的右上方,说明 FSDS 在共振区内其振幅与共振频率均大于 ISDS。 c 增大使两系统共振峰值均减小,但是 FSDS 共振区间逐渐向高频区间移动,而 ISDS 的共振峰值沿其骨架曲线减小,共振区间未向高频区间移动,这说明 c 增大使 FSDS 骨架曲线向右移动,系统的刚度硬化。在 ISDS 中, c 增大仅仅增加了系统阻尼而不改变系统骨架曲线。

选取参数 $c=2.0$, p 分别为 0.2, 0.3, 0.5 和 1.0 时, FSDS 幅频响应曲线与 ISDS 幅频响应曲线数值模拟结果如图 7 所示。

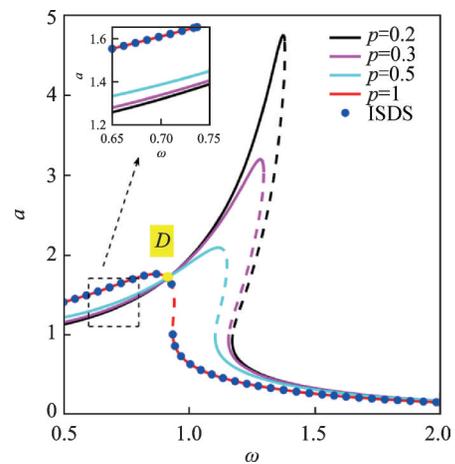


图7 不同分数阶阶次的幅频响应曲线

Fig. 7 The amplitude-frequency response curves with different fractional orders

图 7 中分界点 D 为 ISDS 共振峰。由图 7 可知以 D 分界,当 $\omega < D$ 时, ISDS 振幅大于 FSDS,此时 p 增大导致 FSDS 振幅增加(如局部放大图所示), p 由 0.2 向 0.5 逐渐增加时, FSDS 振幅小幅度增大, p 由 0.5 向 1.0 逐渐增加时, FSDS 振幅大幅度增大;与此

相反的是,当 $\omega > D$ 时,ISDS振幅小于FSDS, ρ 由0.2向0.5逐渐增加时,FSDS振幅大幅度降低, ρ 由0.5向1.0逐渐增加时,FSDS振幅小幅度降低;若 ω 继续增大,系统振幅趋于一致。随着 ρ 增大,FSDS共振区间向低频区移动。 ρ 的改变不影响ISDS幅频响应曲线, $\rho = 1.0$ 时两系统幅频响应曲线重合,表明此时黏弹性阻尼与黏性阻尼在系统幅频响应中起相同作用。

5 结 论

本文研究受简谐激励含分数阶阻尼的SD振子系统的幅频响应,并与含整数阶阻尼的SD振子幅频响应对比。提出求解SD振子运动微分方程刚度非线性的傅里叶等效模型,通过平均法得到系统的幅频响应关系式,利用Lyapunov稳定性理论与Routh判据建立周期解稳定性判断条件。研究了分数阶阻尼对系统幅频响应的影响,结果表明:

(1)针对SD振子运动微分方程刚度非线性项,本文提出的傅里叶等效模型与泰勒级数相比,在系统振幅较大时精度更高,既解决了含刚度非线性的系统运动微分方程不可积导致系统不便于采用解析方法研究的问题,又大幅提高了大振幅时的计算精度。

(2)分数阶系数相同时分数阶阻尼系统幅频响应的共振峰值与共振频率均大于整数阶阻尼系统。增大分数阶系数会降低两系统的共振振幅,对整数阶阻尼系统骨架曲线没有影响,但是会改变分数阶阻尼系统骨架曲线,使其共振区间向高频区移动。

(3)在分界点两侧,随分数阶阶次增大,系统的振幅变化趋势相反。分数阶阶次增大使分数阶系统共振区间向低频区移动,但是不影响整数阶阻尼系统幅频响应曲线。分数阶阶次等于1时,两系统幅频响应曲线重合,意味着分数阶阻尼与整数阶阻尼在系统幅频响应中起相同作用。

综上所述,通过研究受简谐激励作用含分数阶阻尼的SD振子的幅频响应,发现其与含整数阶阻尼的SD振子系统幅频响应有很大不同,以上研究为SD振子系统的工程应用提供了理论指导。

参考文献:

[1] Thompson J M T, Hunt G. General Theory of Elastic Stability[M]. London: John Wiley and Sons, 1973.
 [2] Cao Q, Wiercigroch M, Pavlovskaja E E, et al. Archetypal oscillator for smooth and discontinuous dynamics [J]. Physical Review E, Statistical, Nonlinear, and

Soft Matter Physics, 2006, 74(4 Pt 2): 046218.

- [3] Cao Q, Wiercigroch M, Pavlovskaja E E, et al. Piecewise linear approach to an archetypal oscillator for smooth and discontinuous dynamics [J]. Philosophical Transactions of The Royal Society A Mathematical Physical and Engineering Sciences, 2008, 366(1865): 635-652.
 [4] 曹庆杰,田瑞兰,韩彦伟. SD振子的非线性动力学特征研究[J]. 石家庄铁道大学学报(自然科学版), 2010, 23(2): 32-37.
 Cao Qingjie, Tian Ruilan, Han Yanwei. Investigations of nonlinear dynamic for SD oscillator [J]. Journal of Shijiazhuang Tiedao University (Natural Science), 2010, 23(2): 32-37.
 [5] 王建华,张晓燕,洪灵. SD振子中内部激变现象的研究[J]. 动力学与控制学报, 2011, 9(4): 331-336.
 Wang Jianhua, Zhang Xiaoyan, Hong Ling. Study of the interior crisis in SD oscillator [J]. Journal of Dynamics and Control, 2011, 9(4): 331-336.
 [6] 陈恩利,曹庆杰,冯明,等. SD振子的设计及非线性特性实验研究初探[J]. 力学学报, 2012, 44(3): 584-590.
 Chen Enli, Cao Qingjie, Feng Ming, et al. The preliminary investigation on design and experimental research of nonlinear characteristics of SD oscillator [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2012, 44(3): 584-590.
 [7] Chen H, Llibre J, Tang Y. Global dynamics of a SD oscillator [J]. Nonlinear Dynamics, 2018, 91: 1755-1777.
 [8] Han Y, Cao Q, Chen Y, et al. A novel smooth and discontinuous oscillator with strong irrational nonlinearities [J]. Sci. China Phys. Mech. Astron., 2012, 55: 1832-1843.
 [9] Han Y, Cao Q, Wiercigroch M. Chaotic thresholds for the piecewise linear discontinuous system with multiple well potentials [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2015, 70: 145-152.
 [10] Hao Z, Cao Q. The isolation characteristics of an archetypal dynamical model with stable-quasi-zero-stiffness [J]. Journal of Sound & Vibration, 2015, 340: 61-79.
 [11] Li Z, Cao Q, Léger Alain. The equilibrium stability for a smooth and discontinuous oscillator with dry friction [J]. Acta Mechanica Sinica, 2016, 32(2): 309-319.
 [12] Li Z, Cao Q, Léger A. The complicated bifurcation of an archetypal self-excited SD oscillator with dry friction [J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 89(1): 1-16.
 [13] Li Z, Cao Q, Nie Z. Stick-slip vibrations of a self-excited SD oscillator with Coulomb friction [J]. Nonlinear Dynamics, 2020, 102(3): 1-17.
 [14] Yang T, Cao Q. Delay-controlled primary and stochastic resonances of the SD oscillator with stiffness nonlinearities [J]. Mechanical Systems and Signal Processing,

- 2018, 103: 216-235.
- [15] Yang T, Cao Q. Dynamics and energy generation of a hybrid energy harvester under colored noise excitations [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 121: 745-766.
- [16] Yang T, Cao Q. Time delay improves beneficial performance of a novel hybrid energy harvester [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 96: 1511-1530.
- [17] Yang T, Cao Q. Noise- and delay-enhanced stability in a nonlinear isolation system [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2019, 110: 81-93.
- [18] Yang T, Cao Q, Li Q, et al. A multi-directional multi-stable device: modeling, experiment verification and applications [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2021, 146: 106986.
- [19] Zhu G, Liu J, Cao Q, et al. A two degree of freedom stable quasi-zero stiffness prototype and its applications in aseismic engineering [J]. *Science China (Technological Sciences)*, 2020, 63(3): 496-505.
- [20] Shimizu N, Zhang W. Fractional calculus approach to dynamic problems of viscoelastic materials [J]. *JSME International Journal*, 1999, 42(4): 825-837.
- [21] Caputo M, Mainardi F. A new dissipation model based on memory mechanism [J]. *Pure and Applied Geophysics*, 1971, 91: 134-147.
- [22] Rossikhin Y A, Shitikova M V. Application of fractional calculus for analysis of nonlinear damped vibrations of suspension bridges [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1998, 124(9): 1029-1036.
- [23] Rossikhin Y A, Shitikova M V. Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids [J]. *Applied Mechanics Reviews*, 1997, 50(1): 15-67.
- [24] Padovan J, Sawicki J T. Nonlinear vibrations of fractionally damped systems [J]. *Nonlinear Dynamics*, 1998, 16(4): 321-336.
- [25] Rossikhin Y A, Shitikova M V. Analysis of nonlinear vibrations of a two-degree-of-freedom mechanical system with damping modelled by a fractional derivative [J]. *Journal of Engineering Mathematics*, 2000, 37(4): 343-362.
- [26] Rossikhin Y A, Shitikova M V. Free damped nonlinear vibrations of a viscoelastic plate under two-to-one internal resonance [J]. *Materials Science Forum*, 2003, 440-441: 29-36.
- [27] Rossikhin Y A, Shitikova M V. Analysis of free non-linear vibrations of a viscoelastic plate under the conditions of different internal resonances [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2006, 41(2): 313-325.
- [28] Sereďyńska M, Hanyga A. Nonlinear hamiltonian equations with fractional damping [J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2000, 41(4): 2135-2156.
- [29] Sheu L, Chen H, Chen J, et al. Chaotic dynamics of the fractionally damped Duffing equation [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2007, 32(4): 1459-1468.
- [30] Gao X, Yu J. Chaos in the fractional order periodically forced complex Duffing's oscillators [J]. *Chaos Solitons & Fractals*, 2005, 26(4): 1125-1133.
- [31] Shen Y, Yang S, Xing H, et al. Primary resonance of Duffing oscillator with fractional-order derivative [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2012, 17(7): 3092-3100.
- [32] Shen Y, Yang S, Xing H, et al. Primary resonance of Duffing oscillator with two kinds of fractional-order derivatives [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2012, 47(9): 975-983.
- [33] 申永军, 杨绍普, 邢海军. 分数阶 Duffing 振子的超谐共振 [J]. *力学学报*, 2012, 44(4): 762-768.
Shen Yongjun, Yang Shaopu, Xing Haijun. Super-harmonic resonance of fractional-order Duffing oscillator [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2012, 44(4): 762-768.
- [34] 韦鹏, 申永军, 杨绍普. 分数阶 Duffing 振子的亚谐共振 [J]. *振动工程学报*, 2014, 27(6): 811-818.
Wei Peng, Shen Yongjun, Yang Shaopu. Sub-harmonic resonance of Duffing oscillator with fractional-order derivative [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2014, 27(6): 811-818.
- [35] 姜源, 申永军, 温少芳, 等. 分数阶达芬振子的超谐与亚谐联合共振 [J]. *力学学报*, 2017, 49(5): 1008-1019.
Jiang Yuan, Shen Yongjun, Wen Shaofang, et al. Super-harmonic and sub-harmonic simultaneous resonances of fractional-order Duffing oscillator [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(5): 1008-1019.
- [36] 姜源, 申永军, 温少芳. 分数阶 van der Pol 振子的超谐与亚谐联合共振 [J]. *振动工程学报*, 2019, 32(5): 129-139.
Jiang Yuan, Shen Yongjun, Wen Shaofang. Super-harmonic and sub-harmonic simultaneous resonance of fractional-order van der Pol oscillator [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2019, 32(5): 129-139.
- [37] Niu J, Liu R, Shen Y, et al. Chaos detection of Duffing system with fractional-order derivative by Melnikov method [J]. *Chaos*, 2019, 29(12): 123106.
- [38] 常宇健, 田沃沃, 陈恩利, 等. 基于分数阶微分的金属橡胶迟滞非线性动力学模型 [J]. *振动与冲击*, 2020, 39(14): 233-241.
Chang Yujian, Tian Wowo, Chen Enli, et al. Dynamic model for the nonlinear hysteresis of metal rubber based

on the fractional-order derivative [J]. Journal of Vibration and Shock, 2020, 39(14):233-241.
[39] 薛定宇. 分数阶微积分与分数阶控制[M]. 北京: 科学

出版社, 2018.

Xue Dingyu. Fractional Calculus and Fractional-order Control[M]. Beijing: Science Press, 2018.

Nonlinear dynamic response characteristics of SD oscillator with fractional damping

CHEN En-li¹, WANG Ming-hao^{1,2}, WANG Mei-qi², CHANG Yu-jian³

(1.State Key Laboratory of Mechanical Behavior and System Safety of Traffic Engineering Structures, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China; 2.School of Mechanical Engineering, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China; 3.School of Electrical and Electronic Engineering, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China)

Abstract: The amplitude-frequency response characteristic of SD oscillator with fractional damping under harmonic excitation is studied, compared with the SD oscillator with integral damping. The Fourier equivalent model is proposed to solve the nonlinear stiffness of the differential equation of system motion, the problem of the nonlinear stiffness non-integrability of the differential motion equation of the system is solved. The expression of amplitude-frequency response is obtained by solving the differential equation of system motion using the average method. The stability of periodic solution is determined based on the Lyapunov stability theory and the Routh criterion. The correctness of the analytical method for amplitude-frequency response is verified by comparing with the numerical results. The result shows that the Fourier transform equivalent model of the nonlinear stiffness term of the SD oscillator can be applied to the motion characteristic of the system with large amplitude, which greatly improves the calculation accuracy. With the same damping coefficient, the amplitude-frequency response of the fractional damping system is different from that of the integral damping system, the resonance frequency and amplitude of the fractional damping system vary greatly. Changing the fractional coefficient will change the amplitude-frequency response backbone curve of the fractional damping system, but the integral damping system is not affected. When the fractional order is changed, the amplitude of the fractional damping system changes oppositely on both sides of the cut-off point.

Key words: nonlinear vibration; SD oscillator; fractional order; backbone curve

作者简介: 陈恩利(1958—),男,教授。电话:(0311)87935554; E-mail:chenenl@stdu.edu.cn。

通讯作者: 王明昊(1997—),男,硕士研究生。电话:(0311)87935554; E-mail:mhsilver@qq.com。