一般线性黏弹性阻尼器保护系统非均匀与完全非平稳地震响应解析分析

李创第[1]，王博文[2]，昌明静[3]

（1.广西科技大学土木建筑工程学院，广西 柳州 545006；2.中国矿业大学力学与土木工程学院，江苏 徐州 221116；3.武汉理工大学土木工程与建筑学院，湖北 武汉 430070）

摘要：为建立设置支撑的一般线性黏弹性耗能结构阻尼器保护系统的抗震设计和动力可靠度分析方法，提出了在非扩阶空间上，基于非均匀和完全非平稳地震激励下，设置支撑的一般线性黏弹性耗能结构阻尼器保护系统响应的通用解析解。采用设置支撑黏弹性阻尼器的最一般积分型分析模型，用微分积分方程组实现设置支撑的一般线性黏弹性阻尼耗能结构系统的非扩阶建模；采用传递矩阵法，直接获得耗能结构阻尼器保护系统在任意激励和非零初始条件下瞬态响应的非扩阶模态叠加解析解；应用此解析解和随机振动频域分析法，获得了耗能结构阻尼器保护系统在一般和 8 种经典均匀与非均匀非平稳地震激励以及完全非平稳地震功率谱模型下的具体响应解析解。通过减震和隔震两种典型结构的复模态法和频响函数法的理论验证分析，以及均匀、非均匀、完全非平稳算例响应分析，证明了本文方法的正确性、简易性和普适性；所获得的瞬态响应解析解和非平稳地震响应分析法，一方面可对整体耗能系统各构件进行基于泊松假设的抗震动力可靠度分析，另一方面将为结构系统建立基于反应谱的模态叠加抗震设计提供分析路径。

关键词：耗能结构系统；黏弹性阻尼器；瞬态响应；非均匀与完全非平稳响应；解析解

中图分类号：TU311.3　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1004-4523(2022)05-1084-17

DOI：10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2022.05.006

引　言

目前国内外最为成熟的提高结构抗震抗风能力的被动控制技术有耗能减震和橡胶基础隔震[1-2]。耗能结构是通过设置阻尼器保护系统（阻尼装置和支撑构件）[1-7]以达到很好的耗能效果。支撑刚度不仅影响结构的整体响应[8-12]，而且影响阻尼器的受力和变形。阻尼器保护系统的破坏加重了结构的损伤甚至倒塌[13]，因此中国相关规范[1,14]明确要求阻尼器保护系统应具有足够的抗震能力，故对阻尼器保护系统的研究具有工程意义。

黏弹性阻尼器是一种有效的被动控制装置，具有广泛的工程适应性[3]。目前的研究方法无法将黏弹性耗能结构阻尼器保护系统的响应精确分解为各模态响应的线性组合，导致其精确的抗震反应谱设计法无法建立，因此黏弹性减振控制的实用设计理论及其在规范中的应用已被列为中国土木结构振动控制领域的关键问题之一[15]。

黏弹性耗能结构系统现有解析法的代表有扩阶精确法[16-17]、非扩阶近似法[18]等，它们存在物理意义不明确、假设较多、计算效率低等[19-20]缺陷导致适用性受限。非扩阶精确法[21]求解过程简单，计算效率高，获得的黏弹性耗能结构响应解析解物理意义明确，从本质上精确揭示了黏弹性耗能结构保护系统的振动机理，避免了结构运动方程模态无法解耦的问题[21]。该方法对不同黏弹性阻尼器耗能结构具有简易性和普适性。

关于一般黏弹性阻尼器响应分析的重要性早已形成共识[11-12,22-24]，但目前仅获得单自由度一般黏弹性耗能结构在简谐荷载激励下稳态响应的解析解，尚未获得多自由度设置支撑的一般黏弹性耗能结构阻尼器保护系统在任意荷载激励下瞬态响应的非正交模态叠加精确解析解。

地震的整个过程，一般是非平稳随机过程[25]。一般用 Priestley 提出的演变谱模型来分析非均匀非平稳地震响应[26]。平稳地震激励模型主要有白噪声模型[27]、Kanai-Tajimi 谱[28]、Clough-Penzien 谱[29]、胡聿贤谱[30]等，其中 Kanai-Tajimi 谱地震激励模型符合地震动特点且表达式相对简单，受到广大科研人

收稿日期：2020-07-09；**修订日期：**2021-01-16

基金项目：国家自然科学基金资助项目（51468005）；广西科技大学创新团队支持计划（校发[2016]31 号）。

员的关注[31-32]。Conte 等[33]提出了可以由实际地震加速度演变功率谱经自适应最小二乘法拟合确定参数的完全非平稳模型,该模型同时反映了地震的强度非平稳和频率非平稳特性,其计算参数可通过实际地震加速度演变功率谱拟合得到,具有较强通用性。

关于一般黏弹性耗能结构的非平稳响应分析,目前已获得广义 Maxwell 阻尼耗能结构在平稳滤过白噪声激励下的平稳响应解析解[34-36]和 Maxwell 阻尼耗能结构均匀非平稳地震响应解析解[20],然而对于多自由度设置支撑的一般黏弹性耗能结构阻尼器保护系统在一般和多种[37]均匀与非均匀非平稳激励以及完全非平稳地震功率谱模型下的响应解析分析尚未建立。

本文采用设置支撑黏弹性阻尼器的最一般积分型分析模型,将传递矩阵法应用到一般黏弹性阻尼耗能结构系统中,求解过程简单,计算效率高,在获得了黏弹性耗能结构阻尼器保护系统在任意激励作用下瞬态响应非扩阶模态叠加精确解的基础上,建立了一般线性黏弹性耗能结构阻尼器保护系统的均匀与非均匀以及完全非平稳地震响应解析分析。采用减震和隔震两种典型结构的复模态法和频响函数法的理论验证分析,以及均匀、非均匀、完全非平稳算例响应分析,证明了本文方法的正确性、简易性和普适性。一方面可对整体耗能系统各构件进行基于泊松假设的抗震动力可靠度分析;另一方面将为结构系统建立基于反应谱的模态叠加抗震设计提供分析路径。

1　结构运动方程

设置支撑的一般线性黏弹性阻尼器的 n 个自由度结构系统的运动方程可表示为:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}+\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{L}_i\,p_{Gi}(t)=\boldsymbol{F}(t) \tag{1}$$

式中　$\boldsymbol{M}$ 为结构的质量矩阵;$\boldsymbol{C}$ 为结构的黏滞阻尼矩阵;$\boldsymbol{K}$ 为结构的刚度矩阵;$\boldsymbol{x}$ 为结构位移向量;$p_{Gi}(t)$ 和 $\boldsymbol{L}_i$ 表示等效后第 i 个阻尼器的作用力及其影响向量,m 为阻尼器总数;$\boldsymbol{F}(t)$ 为任意外载向量;对于地震激励 $\boldsymbol{F}(t)=-\boldsymbol{r}\ddot{x}_g(t)$,$\ddot{x}_g(t)$ 为地面地震加速度,$\boldsymbol{r}$ 为常数向量。

等效后黏弹性阻尼器受力 $p_{Gi}(t)$ 的一般积分型本构方程为:

$$p_{Gi}(t)=k_{Gi}\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(t)+\int_0^t h_{Gi}(t-\tau)\cdot \boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{x}}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2}$$

式中　k_{Gi} 和 $h_{Gi}(t)$ 分别为等效后第 i 个阻尼器的平衡刚度和松弛函数,$i=1,2,\cdots,m$;原阻尼器 $p_{Qi}(t)$ 及其支撑刚度 k_{bi} 与等效阻尼器 $p_{Gi}(t)$ 之间的转换关系详见文献[38]。

故设置支撑的一般线性黏弹性阻尼耗能结构系统的运动方程可表示为:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{K}_G\boldsymbol{x}+\int_0^t \boldsymbol{h}_G(t-\tau)\dot{\boldsymbol{x}}(\tau)=\boldsymbol{F}(t) \tag{3}$$

$$\boldsymbol{K}_G=\sum_{i=1}^{m}k_{Gi}\boldsymbol{L}_i\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}};\ \boldsymbol{h}_G(t)=\sum_{i=1}^{m}h_{Gi}(t)\boldsymbol{L}_i\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

式中　$\boldsymbol{K}_G$ 和 $\boldsymbol{h}_G(t)$ 分别为等效后阻尼器体系的对称平衡模量和松弛函数矩阵。

2　结构系统的传递矩阵法

2.1　阻尼器的传递矩阵法

设结构的初始条件为:

$$\boldsymbol{x}(t=0)=\boldsymbol{x}_0,\ \dot{\boldsymbol{x}}(t=0)=\dot{\boldsymbol{x}}_0 \tag{5}$$

由拉氏变换,式(3)可转化为:

$$\bar{\boldsymbol{x}}(s)=\boldsymbol{D}(s)^{-1}\bar{\boldsymbol{G}}(s)=\boldsymbol{H}(s)\bar{\boldsymbol{G}}(s) \tag{6}$$

$$\boldsymbol{D}(s)=s^2\boldsymbol{M}+s\boldsymbol{C}+\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}_G+s\bar{\boldsymbol{h}}_G(s) \tag{7}$$

$$\bar{\boldsymbol{G}}(s)=\bar{\boldsymbol{F}}(s)+\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{x}}_0+[s\boldsymbol{M}+\boldsymbol{C}+\bar{\boldsymbol{h}}_G(s)]\boldsymbol{x}_0 \tag{8}$$

式中　$\bar{\boldsymbol{x}}(s)$,$\bar{\boldsymbol{F}}(s)$,$\bar{\boldsymbol{h}}_G(s)$ 分别为 $\boldsymbol{x}(t)$,$\boldsymbol{F}(t)$,$\boldsymbol{h}_G(t)$ 的拉氏变换;s 为拉氏变换的状态变量;$\boldsymbol{D}(s)$ 和 $\boldsymbol{H}(s)$ 分别为结构的阻抗和传递矩阵。

结构的特征值方程为:

$$\det[\boldsymbol{D}(s)]=0 \tag{9}$$

方程(2)可表示为:

$$p_{Gi}(t)=\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(t) \tag{10}$$

$$\boldsymbol{g}(t)=k_{Gi}\boldsymbol{x}(t)+\int_0^t h_{Gi}(t-\tau)\dot{\boldsymbol{x}}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{11}$$

对式(10)和(11)取拉氏变换,并考虑关系式(6),可得:

$$\bar{p}_{Gi}(s)=\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{g}}(s) \tag{12}$$

$$\bar{\boldsymbol{g}}(s)=[k_{Gi}+s\bar{h}_{Gi}(s)]\bar{\boldsymbol{x}}(s)-\bar{h}_{Gi}(s)\boldsymbol{x}_0=[k_{Gi}+s\bar{h}_{Gi}(s)]\boldsymbol{H}(s)\bar{\boldsymbol{G}}(s)-\bar{h}_{Gi}(s)\boldsymbol{x}_0 \tag{13}$$

式中　$\bar{p}_{Gi}(s)$ 和 $\bar{\boldsymbol{g}}(s)$ 分别为 $p_{Gi}(t)$ 和 $\boldsymbol{g}(t)$ 的拉氏变换。

故阻尼器的变换向量 $\boldsymbol{g}(t)$ 的传递矩阵 $\boldsymbol{H}_g(s)$ 和阻抗矩阵 $\boldsymbol{D}_g(s)$ 分别为:

$$\bar{\boldsymbol{g}}(s)=\boldsymbol{H}_g(s)\bar{\boldsymbol{G}}(s)-\bar{h}_{Gi}(s)\boldsymbol{x}_0 \tag{14}$$

$$\boldsymbol{H}_g(s)=[k_{Gi}+s\bar{h}_{Gi}(s)]\boldsymbol{H}(s) \tag{15}$$

$$\boldsymbol{D}_g(s)=\boldsymbol{H}_g(s)^{-1}=[k_{Gi}+s\bar{h}_{Gi}(s)]^{-1}\boldsymbol{D}(s) \tag{16}$$

由阻尼器 $p_{Gi}(t)$ 的实际物理意义和其本构关系式(2)可知:$p_{Gi}(t)\neq 0$;故:

$$\bar{p}_{Gi}(s)=\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}[k_{Gi}+s\bar{h}_{Gi}(s)]\bar{\boldsymbol{x}}(s)-\bar{h}_{Gi}(s)\boldsymbol{x}_0\neq 0 \tag{17}$$

由式(17)对任意初始位移$\boldsymbol{x}_0$均成立得：

$$k_{Gi}+s\bar{h}_{Gi}(s)\neq 0 \tag{18}$$

故阻尼器的变换向量$\boldsymbol{g}(t)$的特征值方程为：

$$\det[\boldsymbol{D}_g(s)]=[k_{Gi}+s\bar{h}_{Gi}(s)]^{-m}\det[\boldsymbol{D}(s)]=0 \tag{19}$$

由式(18)和(19)可知：$\boldsymbol{g}(t)$的特征值与结构位移$\boldsymbol{x}(t)$的特征值完全相同。$\boldsymbol{x}(t)$的每个特征值s_j对应的右、左特征向量$\boldsymbol{u}_j$和$\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{g}(t)$的每个特征值$s_j$对应的右、左特征向量$\boldsymbol{u}_{gj}$和$\boldsymbol{u}_{gj}^{\mathrm{T}}$，它们满足的方程分别为：

$$\boldsymbol{D}(s_j)\boldsymbol{u}_j=0,\ \boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}(s_j)=0^{\mathrm{T}} \tag{20}$$

$$\boldsymbol{D}_g(s_j)\boldsymbol{u}_{gj}=[k_{Gi}+s_j\bar{h}_{Gi}(s_j)]^{-1}\boldsymbol{D}(s_j)\boldsymbol{u}_{gj}=0 \tag{21}$$

$$\boldsymbol{u}_{gj}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_g(s_j)=\boldsymbol{u}_{gj}^{\mathrm{T}}[k_{Gi}+s_j\bar{h}_{Gi}(s_j)]^{-1}\boldsymbol{D}(s_j)=0^{\mathrm{T}} \tag{22}$$

其中，$j=1\sim M$，M为特征值个数。

由式(20)～(22)，可得$\boldsymbol{g}(t)$与$\boldsymbol{x}(t)$的特征向量的对应关系为：

$$\boldsymbol{u}_{gj}=[k_{Gi}+s_j\bar{h}_{Gi}(s_j)]\boldsymbol{u}_j,\quad \boldsymbol{u}_{gj}^{\mathrm{T}}=[k_{Gi}+s_j\bar{h}_{Gi}(s_j)]\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}} \tag{23}$$

根据前期研究，对于$\boldsymbol{g}(t)$的传递矩阵$\boldsymbol{H}_g(s)$和$s\boldsymbol{H}_g(s)$，下列解析式均成立[21]：

$$\boldsymbol{H}_g(s)=\boldsymbol{D}_g(s)^{-1}=\sum_{j=1}^{M}\frac{\eta_{gj}\boldsymbol{u}_{gj}\boldsymbol{u}_{gj}^{\mathrm{T}}}{s-s_j} \tag{24}$$

$$s\boldsymbol{H}_g(s)=\sum_{j=1}^{M}\frac{s_j\eta_{gj}\boldsymbol{u}_{gj}\boldsymbol{u}_{gj}^{\mathrm{T}}}{s-s_j} \tag{25}$$

$$\frac{1}{\eta_{gj}}=\boldsymbol{u}_{gj}^{\mathrm{T}}\frac{\partial\boldsymbol{D}_g(s_j)}{\partial s_j}\boldsymbol{u}_{gj} \tag{26}$$

式中 s_j为$\boldsymbol{g}(t)$的阻抗矩阵$\boldsymbol{D}_g(s)$的特征值，其值与结构位移$\boldsymbol{x}(t)$的阻抗矩阵$\boldsymbol{D}(s)$的特征值完全相同；$\boldsymbol{u}_{gj}$为动刚矩阵$\boldsymbol{D}_g(s)$对应于特征值s_j的特征向量。

由式(14)～(16)，可得：

$$\frac{\partial\boldsymbol{D}_g(s_j)}{\partial s_j}=\frac{1}{k_{Gi}+s_j\bar{h}_{Gi}(s_j)}\frac{\partial\boldsymbol{D}(s_j)}{\partial s_j}+\boldsymbol{D}(s_j)\frac{\partial}{\partial s_j}\left[\frac{1}{k_{Gi}+s_j\bar{h}_{Gi}(s_j)}\right] \tag{27}$$

将式(27)代入式(26)，可得：

$$\frac{1}{\eta_{gj}}=\frac{1}{k_{Gi}+s_j\bar{h}_{Gi}(s_j)}\boldsymbol{u}_{gj}^{\mathrm{T}}\frac{\partial\boldsymbol{D}(s_j)}{\partial s_j}\boldsymbol{u}_{gj}+\boldsymbol{u}_{gj}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}(s_j)\boldsymbol{u}_{gj}\frac{\partial}{\partial s_j}\left[\frac{1}{k_{Gi}+s_j\bar{h}_{Gi}(s_j)}\right] \tag{28}$$

将式(23)代入式(28)，可得：

$$\frac{1}{\eta_{gj}}=[k_{Gi}+s_j\bar{h}_{Gi}(s_j)]\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\frac{\partial\boldsymbol{D}(s_j)}{\partial s_j}\boldsymbol{u}_j+\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}(s_j)\boldsymbol{u}_j\cdot[k_{Gi}+s_j\bar{h}_{Gi}(s_j)]^2\cdot\frac{\partial}{\partial s_j}\left[\frac{1}{k_{Gi}+s_j\bar{h}_{Gi}(s_j)}\right] \tag{29}$$

由于$\boldsymbol{u}_j$是$\boldsymbol{D}(s)$对应于特征值s_j的特征向量，故$\boldsymbol{D}(s_j)\boldsymbol{u}_j=0$，代入式(29)可化简为：

$$\frac{1}{\eta_{gj}}=\frac{[k_{Gi}+s_j\bar{h}_{Gi}(s_j)]}{\eta_j} \tag{30}$$

式中：

$$\eta_j=\frac{1}{\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial\boldsymbol{D}(s_j)}{\partial s_j}\boldsymbol{u}_j} \tag{31}$$

$$\eta_{gj}=[k_{Gi}+s_j\bar{h}_{Gi}(s_j)]^{-1}\eta_j \tag{32}$$

将式(23)代入式(24)和式(25)，最终可得：

$$\boldsymbol{H}_g(s)=\boldsymbol{D}_g(s)^{-1}=\sum_{j=1}^{M}\frac{[k_{Gi}+s_j\bar{h}_{Gi}(s_j)]\eta_j\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}}{s-s_j} \tag{33}$$

$$s\boldsymbol{H}_g(s)=\sum_{j=1}^{M}\frac{[k_{Gi}+s_j\bar{h}_{Gi}(s_j)]s_j\eta_j\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}}{s-s_j} \tag{34}$$

2.2 阻尼器受力瞬态响应解析解

由式(12)，(14)，(33)和式(8)，可得：

$$\bar{p}_{Gi}(s)=\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_g(s)\bar{\boldsymbol{G}}(s)-\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\bar{h}_{Gi}(s)\boldsymbol{x}_0=\sum_{j=1}^{M}\eta_j[k_{Gi}+s_j\bar{h}_{Gi}(s_j)]\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\left[\frac{\bar{\boldsymbol{F}}(s)+\bar{\boldsymbol{h}}_G(s)\boldsymbol{x}_0}{s-s_j}+\frac{\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{x}}_0+\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_0+s_j\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_0}{s-s_j}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_0\right]-\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\bar{h}_{Gi}(s)\boldsymbol{x}_0 \tag{35}$$

由拉氏逆变换，式(35)可转化为：

$$p_{Gi}(t)=\sum_{j=1}^{M}\eta_j[k_{Gi}+s_j\bar{h}_{Gi}(s_j)]\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\times\left\{\int_0^t e^{s_j(t-\tau)}[\boldsymbol{F}(\tau)+\boldsymbol{h}_G(\tau)\boldsymbol{x}_0]\mathrm{d}\tau+e^{s_jt}[\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{x}}_0+\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_0+s_j\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_0]+\delta(t)\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_0\right\}-\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}h_{Gi}(t)\boldsymbol{x}_0 \tag{36}$$

式中 $\delta(t)$为Dirac delta函数。

对于$t>0$，阻尼器受力的瞬态响应解析解为：

$$p_{Gi}(t)=\sum_{j=1}^{M}\eta_j[k_{Gi}+s_j\bar{h}_{Gi}(s_j)]\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j\times\left\{\int_0^t e^{s_j(t-\tau)}\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(\tau)\mathrm{d}\tau+a_j(t)\right\}-\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}h_{Gi}(t)\boldsymbol{x}_0 \tag{37}$$

式中 $a_j(t)$表示初始条件产生的响应，表达式为：

$$a_j(t)=\int_0^t e^{s_j(t-\tau)}\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_G(\tau)\boldsymbol{x}_0\mathrm{d}\tau+e^{s_jt}\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{x}}_0+\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_0+s_j\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_0) \tag{38}$$

对于零初始条件，$a_j(t)=0\ (j=1\sim M)$。

同理，由式(12)，(14)，(34)和式(8)，可得阻尼

器受力速度的瞬态响应解析解为:

$$\dot{p}_{Gi}(t)=\sum_{j=1}^{M}s_j\eta_j[k_{Gi}+s_j\bar{h}_{Gi}(s_j)]\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j\times\left[\int_0^t \mathrm{e}^{s_j(t-\tau)}\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(\tau)\mathrm{d}\tau+a_j(t)\right]-\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\dot{h}_{Gi}(t)\boldsymbol{x}_0 \tag{39}$$

2.3　结构瞬态响应解析解

同理可得结构的位移和速度的瞬态响应解析解为:

$$\boldsymbol{x}(t)=\sum_{j=1}^{M}\eta_j\boldsymbol{u}_j\left[\int_0^t \mathrm{e}^{s_j(t-\tau)}\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(\tau)\mathrm{d}\tau+a_j(t)\right] \tag{40}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\sum_{j=1}^{M}s_j\eta_j\boldsymbol{u}_j\left[\int_0^t \mathrm{e}^{s_j(t-\tau)}\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(\tau)\mathrm{d}\tau+a_j(t)\right] \tag{41}$$

其中 $a_j(t)$ 如式(38)所示。

若在初始条件为零的情况下,则 $a_j(t)=0(j=1\sim M)$。

2.4　支撑和阻尼器瞬态响应解析解

支撑刚度、原阻尼器和等效阻尼器之间满足以下关系:

$$k_{bi}x_{bi}=p_{Gi}(t),\ x_{bi}+x_{Qi}=x_{\Delta i} \tag{42}$$

式中　x_{bi},x_{Qi} 和 $x_{\Delta i}$ 分别为支撑位移、原阻尼器位移和层间相对位移;k_{bi} 为支撑刚度。

对于 $t>0$,由式(42)可得:

$$x_{bi}=k_{bi}^{-1}p_{Gi}(t),\ \dot{x}_{bi}=k_{bi}^{-1}\dot{p}_{Gi}(t) \tag{43}$$

$$x_{Qi}=x_{\Delta i}-k_{bi}^{-1}p_{Gi}(t),\quad \dot{x}_{Qi}=\dot{x}_{\Delta i}-k_{bi}^{-1}\dot{p}_{Gi}(t) \tag{44}$$

将式(37),(39)～(41)分别代入式(43)和(44),可得:

$$x_{bi}=\sum_{j=1}^{M}\eta_jk_{bi}^{-1}[k_{Gi}+s_j\bar{h}_{Gi}(s_j)]\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j\times\left[\int_0^t \mathrm{e}^{s_j(t-\tau)}\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(\tau)\mathrm{d}\tau+a_j(t)\right]-\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}k_{bi}^{-1}h_{Gi}(t)\boldsymbol{x}_0 \tag{45}$$

$$\dot{x}_{bi}=\sum_{j=1}^{M}s_j\eta_jk_{bi}^{-1}[k_{Gi}+s_j\bar{h}_{Gi}(s_j)]\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j\times\left[\int_0^t \mathrm{e}^{s_j(t-\tau)}\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(\tau)\mathrm{d}\tau+a_j(t)\right]-\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}k_{bi}^{-1}\dot{h}_{Gi}(t)\boldsymbol{x}_0 \tag{46}$$

$$x_{Qi}=\sum_{j=1}^{M}\eta_j\{1-k_{bi}^{-1}[k_{Gi}+s_j\bar{h}_{Gi}(s_j)]\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\}\boldsymbol{u}_j\times\left[\int_0^t \mathrm{e}^{s_j(t-\tau)}\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(\tau)\mathrm{d}\tau+a_j(t)\right]+\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}k_{bi}^{-1}h_{Gi}(t)\boldsymbol{x}_0 \tag{47}$$

$$\dot{x}_{Qi}=\sum_{j=1}^{M}s_j\eta_j\{1-k_{bi}^{-1}[k_{Gi}+s_j\bar{h}_{Gi}(s_j)]\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\}\boldsymbol{u}_j\times\left[\int_0^t \mathrm{e}^{s_j(t-\tau)}\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(\tau)\mathrm{d}\tau+a_j(t)\right]+\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}k_{bi}^{-1}\dot{h}_{Gi}(t)\boldsymbol{x}_0 \tag{48}$$

2.5　结构系统地震响应

零初始条件下,由式(40),(41),(37),(39)和式(45)～(48)可得一般黏弹性阻尼器 n 个自由度耗能结构的位移、速度,阻尼器受力、受力速率,支撑位移、速度,阻尼器位移、速度响应解析式可统一表示为:

$$S_l(t)=\sum_{j=1}^{M}\rho_{lj}b_j(t) \tag{49}$$

式中　$l=1\sim8$;$S_1(t)$ 为结构的位移响应,$S_2(t)$ 为结构的速度响应,$S_3(t)$ 为阻尼器受力响应,$S_4(t)$ 为阻尼器受力速率响应,$S_5(t)$ 为支撑位移响应,$S_6(t)$ 为支撑速度响应,$S_7(t)$ 为阻尼器位移响应,$S_8(t)$ 为阻尼器速度响应;ρ_{lj} 为响应系数;η_j 为计算常数。响应系数分别为:

$$\rho_{1j}=\eta_j\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r} \tag{50}$$

$$\rho_{2j}=s_j\eta_j\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r} \tag{51}$$

$$\rho_{3j}=\eta_j[k_{Gi}+s_j\bar{h}_{Gi}(s_j)]\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r} \tag{52}$$

$$\rho_{4j}=s_j\eta_j[k_{Gi}+s_j\bar{h}_{Gi}(s_j)]\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r} \tag{53}$$

$$\rho_{5j}=\eta_jk_{bi}^{-1}[k_{Gi}+s_j\bar{h}_{Gi}(s_j)]\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r} \tag{54}$$

$$\rho_{6j}=s_j\eta_jk_{bi}^{-1}[k_{Gi}+s_j\bar{h}_{Gi}(s_j)]\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r} \tag{55}$$

$$\rho_{7j}=\eta_j\{1-k_{bi}^{-1}[k_{Gi}+s_j\bar{h}_{Gi}(s_j)]\}\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r} \tag{56}$$

$$\rho_{8j}=s_j\eta_j\{1-k_{bi}^{-1}[k_{Gi}+s_j\bar{h}_{Gi}(s_j)]\}\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r} \tag{57}$$

$b_j(t)$ 为标准一阶系统对地震激励的响应,即:

$$\dot{b}_j(t)-s_jb_j(t)=-\ddot{x}_g,\quad j=1\sim M \tag{58}$$

$$b_j(t)=-\int_0^t \mathrm{e}^{s_j(t-\tau)}\ddot{x}_g(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad j=1\sim M \tag{59}$$

3　结构系统非平稳响应一般解析式

3.1　非平稳地震激励模型

地震动过程通常包含两个非平稳过程:强度非平稳和频率非平稳,通常采用 Priestley 提出的演变功率谱模型,它可以表示为:

$$\ddot{x}_g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}a(\omega,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}N(\omega) \tag{60}$$

$$E[\mathrm{d}N(\omega_1)\mathrm{d}N^*(\omega_2)]=\delta(\omega_1-\omega_2)S_{\ddot{x}_f}(\omega_1)\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2 \tag{61}$$

式中　$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$;“*”表示取共轭项;$a(\omega,t)$ 是 t 与 ω 的确定性调制函数,满足 $a(\omega,t)=a^*(-\omega,t)$;$N(\omega)$ 是一个正交增量过程;$\delta(\cdot)$ 为 Dirac delta 函数;$S_{\ddot{x}_f}(\omega)$

为功率谱密度函数。

$\ddot{x}_g(t)$的协方差函数可表示为：

$$C_{\ddot{x}_g}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t_1-t_2)}a(\omega,t_1)a^*(\omega,t_2)S_{\ddot{x}_f}(\omega)\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t_1-t_2)}S_{\ddot{x}_g}(\omega,t_1,t_2)\mathrm{d}\omega \tag{62}$$

特别是当$t_1=t_2$时，

$$S_{\ddot{x}_g}(\omega,t)=|a(\omega,t)|^2S_{\ddot{x}_f}(\omega) \tag{63}$$

3.2 结构系统非平稳响应的一般解析式

结构系统一般响应$S(t)$的非平稳协方差函数的表达式为：

$$E[S(t)S(t+\tau)]=\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{M}\rho_j\rho_k^*E[b_j(t)b_k^*(t+\tau)] \tag{64}$$

$$E[b_j(t)b_k^*(t+\tau)]=\int_0^t\int_0^t\mathrm{e}^{s_j(t-\xi)}\mathrm{e}^{s_k^*(t+\tau-\eta)}C_{\ddot{x}_g}(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{65}$$

将式(62)代入式(65)可写成：

$$E[b_j(t)b_k^*(t+\tau)]=\int_{-\infty}^{+\infty}Y_j(\omega,t)Y_k^*(\omega,t+\tau)S_{\ddot{x}_f}(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{66}$$

$$Y_j(\omega,t)=\int_0^t\mathrm{e}^{s_j(t-\xi)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\xi}a(\omega,\xi)\mathrm{d}\xi \tag{67}$$

式(67)为标准一阶系统在激励$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}a(\omega,t)$下的响应积分形式。因此，式(67)可表示为如下方程的解：

$$\dot{Y}_j(\omega,t)=s_jY_j(\omega,t)+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}a(\omega,t),\quad Y_j(\omega,0)=0 \tag{68}$$

$$Y_j(\omega,t)=Y_{h,j}(\omega,t)+Y_{p,j}(\omega,t) \tag{69}$$

$$Y_{h,j}(\omega,t)=\varsigma\cdot\mathrm{e}^{s_jt} \tag{70}$$

式中 $Y_{h,j}(\omega,t)$为式(68)的齐次解，$Y_{p,j}(\omega,t)$为式(68)的特解。

ς由初始状态$t=0$所决定。假定特解$Y_{p,j}(\omega,t)$已经求出。

由式(66)和(67)可得：

$$\varsigma=-Y_{p,j}(\omega,0) \tag{71}$$

由式(69)～(71)可得：

$$Y_j(\omega,t)=Y_{p,j}(\omega,t)-\mathrm{e}^{s_jt}Y_{p,j}(\omega,0) \tag{72}$$

工程上广泛应用的调制函数为下式的线性组合[19]：

$$a(\omega,t)=\varepsilon(\omega)t^r\mathrm{e}^{-\alpha(\omega)t} \tag{73}$$

式中 r为整数；$\varepsilon(\omega)$和$\alpha(\omega)$为描述调制函数的参数。

因此，式(72)中的特解为：

$$Y_{p,j}(\omega,t)=-\varepsilon(\omega)\mathrm{e}^{-\beta(\omega)t}\left[\sum_{s=0}^{r}\frac{r!}{s!}t^sB_j^{\,r-s+1}(\omega)\right],t>0 \tag{74a}$$

$$\beta(\omega)=\alpha(\omega)-\mathrm{i}\omega;\ B_j(\omega)=\frac{1}{s_j+\beta(\omega)} \tag{74b}$$

将式(74)代入式(72)得耗能结构系统非平稳响应的一般解析式为：

$$Y_j(\omega,t)=-\varepsilon(\omega)r!\{\mathrm{e}^{-\beta(\omega)t}[\sum_{s=0}^{r}\frac{t^s}{s!}B_j^{\,r-s+1}(\omega)]-\mathrm{e}^{s_jt}B_j^{\,r+1}(\omega)\},t>0 \tag{75}$$

4 几种经典调制情况下非平稳响应具体解析式

4.1 Shinozuka-Sato型调制函数

$$a(t)=\varepsilon(\mathrm{e}^{-\alpha_1t}-\mathrm{e}^{-\alpha_2t}) \tag{76}$$

式中 $\varepsilon=\frac{\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}\mathrm{e}^{\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}\ln\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\right]}$；$\alpha_1,\alpha_2$为已知常数。

式(70)中ς由初始状态$t=0$时，$Y_j(\omega,0)=0$所决定。$Y_{p,j}$可表示为：

$$Y_{p,j}(\omega,t)=-\varepsilon[\mathrm{e}^{-\beta_1(\omega)t}B_{1,j}(\omega)-\mathrm{e}^{-\beta_2(\omega)t}B_{2,j}(\omega)],t>0 \tag{77a}$$

$$\beta_r(\omega)=\alpha_r-\mathrm{i}\omega,\quad B_{r,j}(\omega)=\frac{1}{s_j+\beta_r(\omega)},\ r=1,2 \tag{77b}$$

将式(77)代入式(72)得：

$$Y_j(\omega,t)=-\varepsilon\{\mathrm{e}^{-\beta_1(\omega)t}B_{1,j}(\omega)-\mathrm{e}^{-\beta_2(\omega)t}B_{2,j}(\omega)-\mathrm{e}^{s_jt}[B_{1,j}(\omega)-B_{2,j}(\omega)]\},\ t>0 \tag{78}$$

4.2 Hsu-Bernard型调制函数

$$a(t)=\varepsilon t\mathrm{e}^{-\alpha t} \tag{79}$$

式中 $\varepsilon=\alpha\mathrm{e}$，$\alpha$为已知常数。

式(70)中ς由初始状态$t=0$时，$Y_j(\omega,0)=0$所决定。$Y_{p,j}$可表示为：

$$Y_{p,j}(\omega,t)=-\varepsilon\mathrm{e}^{-\beta(\omega)t}[B_j^2(\omega)+B_j(\omega)t],t>0 \tag{80a}$$

$$\beta(\omega)=\alpha-\mathrm{i}\omega,\ B_j(\omega)=\frac{1}{s_j+\beta(\omega)} \tag{80b}$$

将式(80)代入式(72)得：

$$Y_j(\omega,t)=-\varepsilon\{\mathrm{e}^{-\beta(\omega)t}\lfloor B_j^2(\omega)+B_j(\omega)t\rfloor-\mathrm{e}^{s_jt}B_j^2(\omega)\},t>0 \tag{81}$$

4.3 Goto-Toki型调制函数

$$a(t)=A_0\frac{t}{t_p}\mathrm{e}^{1-\frac{t}{t_p}} \tag{82}$$

式中 A_0,t_p为已知常数。

式(70)中 ς 由初始状态 $t=0$ 时，$Y_j(\omega,0)=0$ 所决定。$Y_{p,j}$ 可表示为：

$$Y_{p,j}(\omega,t)=-\frac{A_0\mathrm{e}}{t_p}\mathrm{e}^{-\beta(\omega)t}[B_j^2(\omega)+B_j(\omega)t],t>0 \tag{83a}$$

$$\beta(\omega)=\frac{1}{t_p}-\mathrm{i}\omega,B_j(\omega)=\frac{1}{s_j+\beta(\omega)} \tag{83b}$$

将式(83)代入式(72)得：

$$Y_j(\omega,t)=-\frac{A_0\mathrm{e}}{t_p}\{\mathrm{e}^{-\beta(\omega)t}[B_j^2(\omega)+B_j(\omega)t]-\mathrm{e}^{s_jt}B_j^2(\omega)\},t>0 \tag{84}$$

4.4 Iyengar型调制函数

$$a(t)=(c+dt)\mathrm{e}^{-\alpha t} \tag{85}$$

式中　c,d,α 为已知常数。

式(70)中 ς 由初始状态 $t=0$ 时，$Y_j(\omega,0)=0$ 所决定。$Y_{p,j}$ 可表示为：

$$Y_{p,j}(\omega,t)=-c\mathrm{e}^{-\beta(\omega)t}B_j(\omega)-d\mathrm{e}^{-\beta(\omega)t}[B_j^2(\omega)+B_j(\omega)t],t>0 \tag{86a}$$

$$\beta(\omega)=\alpha-\mathrm{i}\omega,B_j(\omega)=\frac{1}{s_j+\beta(\omega)} \tag{86b}$$

将式(86)代入式(72)得：

$$Y_j(\omega,t)=-c[\mathrm{e}^{-\beta(\omega)t}B_j(\omega)-\mathrm{e}^{s_jt}B_j(\omega)]-d\{\mathrm{e}^{-\beta(\omega)t}[B_j^2(\omega)+B_j(\omega)t]-\mathrm{e}^{s_jt}B_j^2(\omega)\},t>0 \tag{87}$$

4.5 分段型调制函数

$$a(t)=\begin{cases}A_0(\frac{t}{t_1})^2, & 0\leqslant t\leqslant t_1\\ A_0, & t_1\leqslant t\leqslant t_2\\ A_0\mathrm{e}^{-c}(t-t_2), & t\geqslant t_2\end{cases} \tag{88}$$

式中　A_0,c,t_1,t_2 为已知常数。

当 $0\leqslant t\leqslant t_1$ 时，式(70)中 ς 由初始状态 $t=0$ 时，$Y_j(\omega,0)=0$ 所决定的。$Y_{p,j}$ 可表示为：

$$Y_{p,j}(\omega,t)=-\frac{A_0}{t_1^2}\mathrm{e}^{-\beta(\omega)t}[2B_j^3(\omega)+2B_j^2(\omega)t+B_j(\omega)t^2] \tag{89a}$$

$$\beta(\omega)=-\mathrm{i}\omega,B_j(\omega)=\frac{1}{s_j+\beta(\omega)} \tag{89b}$$

将式(89)代入式(72)得：

$$Y_j(\omega,t)=-\frac{2A_0}{t_1^2}\{\mathrm{e}^{-\beta(\omega)t}[2B_j^3(\omega)+2B_j^2(\omega)t+B_j(\omega)t^2]-\mathrm{e}^{s_jt}B_j^3(\omega)\} \tag{90}$$

当 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 时，式(70)中 ς 由初始状态 $t=0$ 时，$Y_j(\omega,0)=0$ 所决定。$Y_{p,j}$ 可表示为：

$$Y_{p,j}(\omega,t)=-A_0\mathrm{e}^{-\beta(\omega)t}B_j(\omega) \tag{91a}$$

$$\beta(\omega)=-\mathrm{i}\omega,B_j(\omega)=\frac{1}{s_j+\beta(\omega)} \tag{91b}$$

将式(91)代入式(72)得：

$$Y_j(\omega,t)=-A_0\left[\mathrm{e}^{-\beta(\omega)t}B_j(\omega)-\mathrm{e}^{s_jt}B_j(\omega)\right] \tag{92}$$

当 $t\geqslant t_2$ 时，式(70)中 ς 由初始状态 $t=0$ 时，$Y_j(\omega,0)=0$ 所决定。$Y_{p,j}$ 可表示为：

$$Y_{p,j}(\omega,t)=A_0\mathrm{e}^{-c}t_2\mathrm{e}^{-\beta(\omega)t}B_j(\omega)-A_0\mathrm{e}^{-c}\mathrm{e}^{-\beta(\omega)t}[B_j^2(\omega)+B_j(\omega)t] \tag{93a}$$

$$\beta(\omega)=-\mathrm{i}\omega,B_j(\omega)=\frac{1}{s_j+\beta(\omega)} \tag{93b}$$

将式(93)代入式(72)得：

$$Y_j(\omega,t)=A_0\mathrm{e}^{-c}t_2\left[\mathrm{e}^{-\beta(\omega)t}B_j(\omega)-\mathrm{e}^{s_jt}B_j(\omega)\right]-A_0\mathrm{e}^{-c}\{\mathrm{e}^{-\beta(\omega)t}[B_j^2(\omega)+B_j(\omega)t]-\mathrm{e}^{s_jt}B_j^2(\omega)\} \tag{94}$$

4.6 余弦型调制函数

$$a(t)=c+d\cos(\theta t) \tag{95}$$

式中　c,d,θ 为已知常数；$c\geqslant d$。

式(70)中 ς 由初始状态 $t=0$ 时，$Y_j(\omega,0)=0$ 所决定。$Y_{p,j}$ 可表示为：

$$Y_{p,j}(\omega,t)=-c\mathrm{e}^{-\beta_1(\omega)t}B_{1,j}(\omega)-\frac{d}{2}\mathrm{e}^{-\beta_2(\omega)t}B_{2,j}(\omega)-\frac{d}{2}\mathrm{e}^{-\beta_3(\omega)t}B_{3,j}(\omega),t>0 \tag{96a}$$

$$\beta_1(\omega)=-\mathrm{i}\omega,\beta_2(\omega)=-\mathrm{i}\theta-\mathrm{i}\omega,\beta_3(\omega)=\mathrm{i}\theta-\mathrm{i}\omega,B_{r,j}(\omega)=\frac{1}{s_j+\beta_r(\omega)},r=1,2,3 \tag{96b}$$

将式(96)代入式(72)得：

$$Y_j(\omega,t)=-c\left[\mathrm{e}^{-\beta_1(\omega)t}B_{1,j}(\omega)-\mathrm{e}^{s_jt}B_{1,j}(\omega)\right]-\frac{d}{2}[\mathrm{e}^{-\beta_2(\omega)t}B_{2,j}(\omega)-\mathrm{e}^{s_jt}B_{2,j}(\omega)]-\frac{d}{2}[\mathrm{e}^{-\beta_3(\omega)t}B_{3,j}(\omega)-\mathrm{e}^{s_jt}B_{3,j}(\omega)],t>0 \tag{97}$$

4.7 正弦型调制函数

$$a(t)=c+d\sin(\theta t) \tag{98}$$

式中　c,d,θ 为已知常数；$c\geqslant d$。

式(70)中 ς 由初始状态 $t=0$ 时，$Y_j(\omega,0)=0$ 所决定。$Y_{p,j}$ 可表示为：

$$Y_{p,j}(\omega,t)=-c\mathrm{e}^{-\beta_1(\omega)t}B_{1,j}(\omega)-\frac{d}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\beta_2(\omega)t}B_{2,j}(\omega)+\frac{d}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\beta_3(\omega)t}B_{3,j}(\omega),t>0 \tag{99a}$$

$\beta_1(\omega)=-\mathrm{i}\omega,\beta_2(\omega)=-\mathrm{i}\theta-\mathrm{i}\omega,\beta_3(\omega)=\mathrm{i}\theta-\mathrm{i}\omega,$

$$B_{r,j}(\omega)=\frac{1}{s_j+\beta_r(\omega)},\ r=1,2,3 \tag{99b}$$

将式(99)代入式(72)得：

$$\begin{aligned}Y_j(\omega,t)=&-c\left\lfloor \mathrm{e}^{-\beta_1(\omega)t}B_{1,j}(\omega)-\mathrm{e}^{s_jt}B_{1,j}(\omega)\right\rfloor-\\&\frac{d}{2\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{-\beta_2(\omega)t}B_{2,j}(\omega)-\right.\\&\left.\mathrm{e}^{s_jt}B_{2,j}(\omega)\right]-\frac{d}{2\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{-\beta_3(\omega)t}B_{3,j}(\omega)-\right.\\&\left.\mathrm{e}^{s_jt}B_{3,j}(\omega)\right],t>0\end{aligned} \tag{100}$$

4.8 Spanos-Solomos型调制函数

$$a(\omega,t)=\varepsilon(\omega)t\mathrm{e}^{-\alpha(\omega)t} \tag{101}$$

式中 $\varepsilon(\omega),\alpha(\omega)$表示以$\omega$为自变量的函数。

式(70)中ς由初始状态$t=0$时，$Y_j(\omega,0)=0$所决定。$Y_{p,j}$可表示为：

$$Y_{p,j}(\omega,t)=-\varepsilon(\omega)\mathrm{e}^{-\beta(\omega)t}\left\lfloor B_j^2(\omega)+B_j(\omega)t\right\rfloor,t>0 \tag{102a}$$

$$\beta(\omega)=\alpha(\omega)-\mathrm{i}\omega,B_j(\omega)=\frac{1}{s_j+\beta(\omega)} \tag{102b}$$

将式(102)代入式(72)得：

$$\begin{aligned}Y_j(\omega,t)=&-\varepsilon(\omega)\{\mathrm{e}^{-\beta(\omega)t}\left\lfloor B_j^2(\omega)+B_j(\omega)t\right\rfloor-\\&\mathrm{e}^{s_jt}B_j^2(\omega)\},t>0\end{aligned} \tag{103}$$

5 完全非平稳功率谱模型

完全非平稳模型[33]的演变功率谱密度函数为：

$$S_{\ddot{x}_g(t)}(\omega,t)=\sum_{f=1}^{p}\left|a_f(t)\right|^2S_{\ddot{x}_f}(\omega) \tag{104}$$

$$a_f(t)=\varepsilon_f(t-t_f)^{r_f}\mathrm{e}^{-\alpha_f(t-t_f)}U(t-t_f),\quad f=1,\cdots,p \tag{105}$$

式中 $U(t-t_f)$为单位阶跃函数，

$$U(t-t_f)=\begin{cases}0, & t\leqslant t_f\\1, & t>t_f\end{cases} \tag{106}$$

$$S_{\ddot{x}_f}(\omega)=\frac{v_f}{2\pi}\left[\frac{1}{{v_f}^2+(\omega+\eta_f)^2}+\frac{1}{{v_f}^2+(\omega-\eta_f)^2}\right],\quad f=1,\cdots,p \tag{107}$$

式中 $S_{\ddot{x}_f}(\omega)$为第f个平稳高斯过程的功率谱密度函数；$a_f(t)$为第f个高斯过程的调制函数；v_f和η_f分别为随机过程的频带宽和卓越频率；$\varepsilon_f,t_f,r_f,\alpha_f$为描述调制函数$a_f(t)$的4个参数。

式(70)中ς由初始状态$t=t_f$时所决定。由式(68)～(72)，同理可得：

$$\begin{aligned}Y_{j,f}(\omega,t)=&Y_{p,j}{}^{(f)}(\omega,t)+\mathrm{e}^{s_j(t-t_f)}\left[Y_{j,f}(\omega,t_f)-\right.\\&\left.Y_{p,j}{}^{(f)}(\omega,t_f)\right]\end{aligned} \tag{108}$$

式中 $Y_{j,f}(\omega,t)$和$Y_{p,j}{}^{(f)}(\omega,t)$分别是在$p$个相互独立的、零均值的、均匀调制高斯激励下，式(68)的第f个通解和特解。

由式(68)～(74)可得式(108)的特解为：

$$\begin{aligned}Y_{p,j}{}^{(f)}(\omega,t)=&-\varepsilon_f(\omega)\mathrm{e}^{-\beta_f(\omega)(t-t_f)}\times\\&\left[\sum_{s=0}^{r_f}\frac{r_f!}{s!}(t-t_f)^sB_{j,f}{}^{r_f-s+1}\right]U(t-t_f)\end{aligned} \tag{109}$$

$$\beta_f(\omega)=\alpha_f-\mathrm{i}\omega,\quad B_{j,f}=\frac{1}{s_j+\beta_f(\omega)} \tag{110}$$

将式(109)代入式(108)得：

$$\begin{aligned}Y_{j,f}(\omega,t)=&-\varepsilon_f(\omega)r_f!\ \times\\&\{\mathrm{e}^{-\beta_f(\omega)(t-t_f)}\left[\sum_{s=0}^{r_f}\frac{(t-t_f)^s}{s!}B_{j,f}{}^{r_f-s+1}(\omega)\right]-\\&\mathrm{e}^{s_j(t-t_f)}B_{j,f}{}^{r_f+1}(\omega)\}U(t-t_f)\end{aligned} \tag{111}$$

将式(111)代入式(66)得：

$$\begin{aligned}&E\left[b_j(t)b_k^*(t+\tau)\right]=\\&\sum_{f=1}^{p}\int_{-\infty}^{\infty}Y_{j,f}(\omega,t)Y_{k,f}^*(\omega,t+\tau)\cdot\\&S_{\ddot{x}_f}(\omega)\mathrm{d}\omega\end{aligned} \tag{112}$$

6 验证和算例分析

下面通过两种一般多自由度典型耗能结构的验证分析和算例分析证明本文方法的正确性。

6.1 多自由度Maxwell阻尼减震系统

6.1.1 运动方程

设n层结构的质量矩阵为$\boldsymbol{M}$；结构的刚度矩阵为$\boldsymbol{K}$；结构的黏滞阻尼矩阵为$\boldsymbol{C}$；层间质量、刚度和阻尼分别为$m_i,k_i,c_i,(i=1,2,\cdots,n)$；$k_{bi},k_{0i}$分别为层间设置的支撑刚度和Maxwell阻尼器$p_i(t)$的平衡模量；层间的Maxwell阻尼器的刚度为$k_{ii}$；阻尼器的阻尼为$c_{ii}$；阻尼器的松弛参量为$\mu_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$；$\boldsymbol{x}$为结构相对于地面的位移向量。在地震动$\ddot{x}_g(t)$作用下，结构计算简图如图1所示，结构运动方程为：

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{K}_G\boldsymbol{x}+\boldsymbol{L}\boldsymbol{p}_G^0=-\boldsymbol{M}\mathbf{1}\ddot{x}_g \tag{113}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}_G^0+\mathrm{diag}\left[\mu_{ai}\right]\boldsymbol{p}_G^0=\mathrm{diag}\left[k_{ai}\right]\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{x}},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{114}$$

$h_{Qi}(t)$为原结构第i个阻尼器的松弛函数；k_{Gi}和$h_{Gi}(t)$分别为等效后第i个阻尼器的平衡刚度和松弛函数，$i=1,2,\cdots,n$。$\bar{h}_{Qi}(s),\bar{h}_{Gi}(s)$分别为$h_{Qi}(t)$，$h_{Gi}(t)$的拉氏变换。

$$\bar{h}_{Qi}(s)=\frac{k_{ii}}{s+\mu_{ii}},\quad k_{Gi}=\frac{k_{bi}k_{0i}}{k_{bi}+k_{0i}} \tag{115}$$

$$\bar{h}_{Gi}(s)=\frac{k_{bi}^2\bar{h}_{Qi}(s)}{(k_{bi}+k_{0i})^2+(k_{bi}+k_{0i})s\bar{h}_{Qi}(s)}=\frac{k_{ai}}{s+\mu_{ai}} \tag{116}$$

$$k_{ai}=\frac{k_{bi}^2k_{ii}}{(k_{bi}+k_{0i})(k_{bi}+k_{0i}+k_{ii})} \tag{117}$$

$$\mu_{ai}=\frac{(k_{bi}+k_{0i})\mu_{ii}}{(k_{bi}+k_{0i}+k_{ii})} \tag{118}$$

其中：

$$\boldsymbol{K}_G=\boldsymbol{L}\mathrm{diag}[k_{Gi}]\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}},i=1,2,\cdots,n \tag{119}$$

$$\mu_{ii}=k_{ii}/c_{ii},i=1,2,\cdots,n \tag{120}$$

$$\boldsymbol{p}_G^0=\int_0^t\boldsymbol{h}_G(t-\tau)\dot{\boldsymbol{x}}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{121}$$

$$\boldsymbol{1}=[1\quad 1\quad \cdots\quad 1]^{\mathrm{T}} \tag{122}$$

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}1&-1&0&\cdots&0\\0&1&-1&\cdots&0\\\vdots&0&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&1&-1\\0&0&\cdots&0&1\end{bmatrix} \tag{123}$$

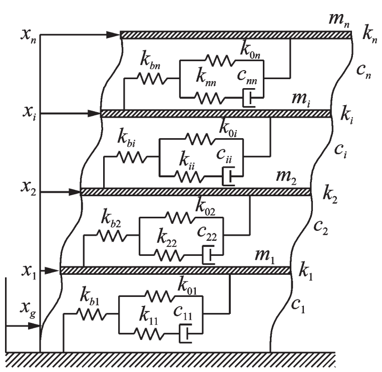

图 1　结构计算简图

Fig. 1　Structural calculation diagram

将式(114)代入式(113)，结构运动方程可化为：

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{K}_G\boldsymbol{x}+\int_0^t\boldsymbol{h}_G^0(t-\tau)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(\tau)\mathrm{d}\tau=-\boldsymbol{M}\boldsymbol{1}\ddot{x}_g \tag{124}$$

由拉氏逆变换，式(116)可转化为：

$$h_{Gi}(t)=k_{ai}\mathrm{e}^{-\mu_{ai}t} \tag{125}$$

$$\boldsymbol{h}_G^0(t)=\boldsymbol{L}\mathrm{diag}[k_{ai}\mathrm{e}^{-\mu_{ai}t}]\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} \tag{126}$$

6.1.2　验证分析

本文方法

结构特征值 s_j 及其对应的特征向量 $\boldsymbol{u}_j$ 的方程为：

$$\det[\boldsymbol{D}(s_j)]=\det\left[s_j^2\boldsymbol{M}+s_j\boldsymbol{C}+\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}_G+s_j\boldsymbol{L}\mathrm{diag}\left[\frac{k_{ai}}{s_j+\mu_{ai}}\right]\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\right]=0 \tag{127}$$

$$\boldsymbol{D}(s_j)\boldsymbol{u}_j=0 \tag{128}$$

由此求得原始结构 $3n$ 个特征值 s_j 及其对应的非零特征向量 $\boldsymbol{u}_j(j=1\sim3n)$。

由式(31)得：

$$\frac{\partial\boldsymbol{D}(s_j)}{\partial s_j}=2s_j\boldsymbol{M}+\boldsymbol{C}+\boldsymbol{L}\mathrm{diag}\left[\frac{k_{ai}}{s_j+\mu_{ai}}\right]\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}-s_j\boldsymbol{L}\mathrm{diag}\left[\frac{k_{ai}}{(s_j+\mu_{ai})^2}\right]\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} \tag{129}$$

由式(40)，(41)，(37)，(39)和式(44)～(48)在零初始条件下，结构的位移、速度，阻尼器受力、受力速率，支撑位移、速度，阻尼器位移、速度响应为：

$$\boldsymbol{x}(t)=-\sum_{j=1}^{3n}\eta_j\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}[1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}\times\int_0^t\mathrm{e}^{s_j(t-\tau)}\ddot{x}_g(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{130}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=-\sum_{j=1}^{3n}s_j\eta_j\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}[1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}\times\int_0^t\mathrm{e}^{s_j(t-\tau)}\ddot{x}_g(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{131}$$

$$\boldsymbol{p}_G(t)=-\sum_{j=1}^{3n}\eta_j\mathrm{diag}\left[\frac{k_{bi}k_{0i}}{k_{bi}+k_{0i}}+\frac{s_jk_{ai}}{s_j+\mu_{ai}}\right]\times\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}[1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}\int_0^t\mathrm{e}^{s_j(t-\tau)}\ddot{x}_g(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{132}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}_G(t)=-\sum_{j=1}^{3n}s_j\eta_j\mathrm{diag}\left[\frac{k_{bi}k_{0i}}{k_{bi}+k_{0i}}+\frac{s_jk_{ai}}{s_j+\mu_{ai}}\right]\times\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}[1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}\int_0^t\mathrm{e}^{s_j(t-\tau)}\ddot{x}_g(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{133}$$

$$\boldsymbol{x}_b=-\sum_{j=1}^{3n}\eta_j\mathrm{diag}\left[\frac{k_{0i}}{k_{bi}+k_{0i}}+\frac{s_jk_{ai}}{k_{bi}(s_j+\mu_{ai})}\right]\times\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}[1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}\int_0^t\mathrm{e}^{s_j(t-\tau)}\ddot{x}_g(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{134}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_b=-\sum_{j=1}^{3n}s_j\eta_j\mathrm{diag}\left[\frac{k_{0i}}{k_{bi}+k_{0i}}+\frac{s_jk_{ai}}{k_{bi}(s_j+\mu_{ai})}\right]\times\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}[1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}\int_0^t\mathrm{e}^{s_j(t-\tau)}\ddot{x}_g(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{135}$$

$$\boldsymbol{x}_Q=-\sum_{j=1}^{3n}\eta_j\mathrm{diag}\left[\frac{k_{bi}}{k_{bi}+k_{0i}}-\frac{s_jk_{ai}}{k_{bi}(s_j+\mu_{ai})}\right]\times\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}[1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}\int_0^t\mathrm{e}^{s_j(t-\tau)}\ddot{x}_g(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{136}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_Q=-\sum_{j=1}^{3n}s_j\eta_j\mathrm{diag}\left[\frac{k_{bi}}{k_{bi}+k_{0i}}-\frac{s_jk_{ai}}{k_{bi}(s_j+\mu_{ai})}\right]\times\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}[1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}\int_0^t\mathrm{e}^{s_j(t-\tau)}\ddot{x}_g(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{137}$$

复模态法

(1)结构状态方程

令：$\boldsymbol{v}(t)=\dot{\boldsymbol{x}}(t)$，那么，结构运动方程(113)，(114)可表示为扩阶形式：

$$\boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{z}}(t)+\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{f}(t) \tag{138}$$

式中：

$$\boldsymbol{z}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{v}\\\boldsymbol{p}_G^0\end{bmatrix},\boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{M}\mathbf{1}\ddot{x}_g\\0\\0\end{bmatrix}\tag{139}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}&\boldsymbol{M}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{M}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\mathbf{I}\end{bmatrix}\tag{140}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}_G&0&\boldsymbol{L}\\0&-\boldsymbol{M}&0\\0&-\mathrm{diag}[k_{ai}]\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}&\mathrm{diag}[\mu_{ai}]\end{bmatrix}\tag{141}$$

式中 $\mathbf{I}$为n阶单位矩阵。

(2)结构特征值和特征向量分析

$$令:\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}_j\mathrm{e}^{\lambda_j t},\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{x}}=\lambda_j\boldsymbol{\varphi}_j\mathrm{e}^{\lambda_j t},\boldsymbol{p}_G^0=\boldsymbol{p}_j\mathrm{e}^{\lambda_j t}\tag{142}$$

则结构的右、左模态方程为:

$$[\boldsymbol{B}\lambda_j+\boldsymbol{A}]\boldsymbol{\Phi}_j=0\tag{143}$$

$$[\boldsymbol{B}s_j+\boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}_j=0\tag{144}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_j^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}},\quad\lambda_j\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}},\quad\boldsymbol{p}_j^{\mathrm{T}}]\tag{145}$$

$$\boldsymbol{\Psi}_j^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{x}_j^{\mathrm{T}},\quad\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}},\quad\boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}]\tag{146}$$

将式(145)代入式(143),经化简得:

$$\boldsymbol{p}_j=\lambda_j\mathrm{diag}\left[\frac{k_{ai}}{\lambda_j+\mu_{ai}}\right]\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_j\tag{147}$$

$$\left[\lambda_j^2\boldsymbol{M}+\lambda_j\boldsymbol{C}+\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}_G+\lambda_j\boldsymbol{L}\mathrm{diag}\left[\frac{k_{ai}}{\lambda_j+\mu_{ai}}\right]\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\right]\boldsymbol{\varphi}_j=0\tag{148}$$

将式(146)代入式(144),经化简得:

$$\boldsymbol{y}_j=-\mathrm{diag}\left[\frac{1}{s_j+\mu_{ai}}\right]\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_j\tag{149}$$

$$\boldsymbol{v}_j=s_j\boldsymbol{x}_j+\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{L}\mathrm{diag}\left[\frac{1}{s_j+\mu_{ai}}\right]\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_j\tag{150}$$

$$\left[s_j^2\boldsymbol{M}+s_j\boldsymbol{C}+\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}_G+s_j\boldsymbol{L}\mathrm{diag}\left[\frac{k_{ai}}{s_j+\mu_{ai}}\right]\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\right]\boldsymbol{x}_j=0\tag{151}$$

对比式(128)和式(148),(151)得,复模态法与本文方法得到的特征值完全相同,且复模态法得到的特征向量可用原结构的特征向量表示。

由式(130),(140),(145)和(146),易得:

$$m_j'=\boldsymbol{\Psi}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Phi}_j=\eta_j^{-1}\tag{152}$$

(3)结构系统响应分析

零初始条件下,结合复模态理论可得:

$$\boldsymbol{z}(t)=\sum_{j=1}^{3n}\boldsymbol{\Phi}_j q_j(t)\tag{153}$$

$$q_j(t)=\frac{1}{m_j'}\int_0^t\mathrm{e}^{s_j(t-\tau)}\boldsymbol{\Psi}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\tau)\mathrm{d}\tau=-\eta_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}[1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}\int_0^t\mathrm{e}^{s_j(t-\tau)}\ddot{x}_g(\tau)\mathrm{d}\tau\tag{154}$$

结构的位移、速度,阻尼器受力、受力速率,支撑位移、速度,阻尼器位移、速度响应为:

$$\boldsymbol{x}(t)=\sum_{j=1}^{3n}\boldsymbol{u}_j q_j(t)=-\sum_{j=1}^{3n}\eta_j\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}[1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}\times\int_0^t\mathrm{e}^{s_j(t-\tau)}\ddot{x}_g(\tau)\mathrm{d}\tau\tag{155}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=-\sum_{j=1}^{3n}s_j\eta_j\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}[1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}\times\int_0^t\mathrm{e}^{s_j(t-\tau)}\ddot{x}_g(\tau)\mathrm{d}\tau\tag{156}$$

$$\boldsymbol{p}_G(t)=-\sum_{j=1}^{3n}\eta_j\mathrm{diag}\left[\frac{k_{bi}k_{0i}}{k_{bi}+k_{0i}}+\frac{s_jk_{ai}}{s_j+\mu_{ai}}\right]\times\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}[1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}\int_0^t\mathrm{e}^{s_j(t-\tau)}\ddot{x}_g(\tau)\mathrm{d}\tau\tag{157}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}_G(t)=-\sum_{j=1}^{3n}s_j\eta_j\mathrm{diag}\left[\frac{k_{bi}k_{0i}}{k_{bi}+k_{0i}}+\frac{s_jk_{ai}}{s_j+\mu_{ai}}\right]\times\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}[1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}\int_0^t\mathrm{e}^{s_j(t-\tau)}\ddot{x}_g(\tau)\mathrm{d}\tau\tag{158}$$

$$\boldsymbol{x}_b=-\sum_{j=1}^{3n}\eta_j\mathrm{diag}\left[\frac{k_{0i}}{k_{bi}+k_{0i}}+\frac{s_jk_{ai}}{k_{bi}(s_j+\mu_{ai})}\right]\times\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}[1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}\int_0^t\mathrm{e}^{s_j(t-\tau)}\ddot{x}_g(\tau)\mathrm{d}\tau\tag{159}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_b=-\sum_{j=1}^{3n}s_j\eta_j\mathrm{diag}\left[\frac{k_{0i}}{k_{bi}+k_{0i}}+\frac{s_jk_{ai}}{k_{bi}(s_j+\mu_{ai})}\right]\times\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}[1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}\int_0^t\mathrm{e}^{s_j(t-\tau)}\ddot{x}_g(\tau)\mathrm{d}\tau\tag{160}$$

$$\boldsymbol{x}_Q=-\sum_{j=1}^{3n}\eta_j\mathrm{diag}\left[\frac{k_{bi}}{k_{bi}+k_{0i}}-\frac{s_jk_{ai}}{k_{bi}(s_j+\mu_{ai})}\right]\times\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}[1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}\int_0^t\mathrm{e}^{s_j(t-\tau)}\ddot{x}_g(\tau)\mathrm{d}\tau\tag{161}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_Q=-\sum_{j=1}^{3n}s_j\eta_j\mathrm{diag}\left[\frac{k_{bi}}{k_{bi}+k_{0i}}-\frac{s_jk_{ai}}{k_{bi}(s_j+\mu_{ai})}\right]\times\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}[1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}\int_0^t\mathrm{e}^{s_j(t-\tau)}\ddot{x}_g(\tau)\mathrm{d}\tau\tag{162}$$

对比式(130)~(137)和式(155)~(162)得,两种方法所得的结构系统响应解析式完全一样,从而验证了本文方法的正确性。

6.2 多层耗能隔震结构

6.2.1 运动方程

设多层结构的质量矩阵为$\boldsymbol{m}_0$;结构的刚度矩阵为$\boldsymbol{k}_0$;结构的阻尼矩阵为$\boldsymbol{c}_0$;层间质量、刚度、阻尼分别为m_{0i}, k_{0i}, c_{0i} $(i=1\sim n)$;隔震层的质量、刚度和阻尼分别为m,k,c。隔震层设置带支撑的一般线性黏弹性阻尼器的阻尼力为$P_G(t)$,其松弛函数和平衡刚度分别为$h_Q(t)$和k_0,水平支撑刚度为k_b。上部结构与隔震层的相对位移向量为$\boldsymbol{x}_0$,隔震层与地面的相对位移为x,在地震动$\ddot{x}_g(t)$的作用下,该耗能隔

震结构的计算简图如图2所示,运动方程为:

$$\boldsymbol{m}_0\ddot{\boldsymbol{x}}_0+\boldsymbol{c}_0\dot{\boldsymbol{x}}_0+\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{x}_0=-\boldsymbol{m}_0\boldsymbol{1}(\ddot{x}_g+\ddot{x}) \tag{163}$$

$$M_0(\ddot{x}_g+\ddot{x})+\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_0\ddot{\boldsymbol{x}}_0+c\dot{x}+kx+P_G(t)=0 \tag{164}$$

$$P_G(t)=k_Gx+\int_0^t h_G(t-\tau)\dot{x}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{165}$$

式中　$M_0=m+\sum_{i=1}^{n}m_{0i}$;$\boldsymbol{1}$为单位列向量;$h_G(t)$和$k_G$分别为等效阻尼器的松弛函数和平衡刚度:

$$k_G=\frac{k_bk_0}{k_b+k_0} \tag{166}$$

$$\bar{h}_G(s)=\frac{k_b^2\bar{h}_Q(s)}{(k_b+k_0)^2+(k_b+k_0)s\bar{h}_Q(s)} \tag{167}$$

式中　$\bar{h}_Q(s)$为松弛函数$h_Q(t)$的拉氏变换;$\bar{h}_G(s)$为松弛函数$h_G(t)$的拉氏变换。

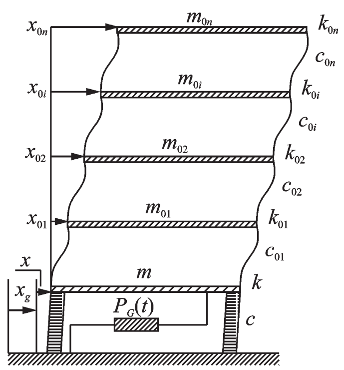

图2　结构计算简图

Fig. 2　Structural calculation diagram

将位移向量$\boldsymbol{x}_0$按上部结构第一振型展开得:

$$\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{\varphi}_1x_1(t) \tag{168}$$

则式(163)~(165)可化为对称微分积分方程:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}+\int_0^t\boldsymbol{h}_G(t-\tau)\dot{\boldsymbol{x}}(\tau)\mathrm{d}\tau=-\boldsymbol{r}\ddot{x}_g \tag{169}$$

式中

$$\boldsymbol{x}=[\,x_1\quad x_2\,]^{\mathrm{T}}=[\,x_1\quad x\,]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{r}=[\,r_1\quad r_2\,]^{\mathrm{T}} \tag{170}$$

$$\boldsymbol{K}=\mathrm{diag}[\,\omega_1^2\quad\omega_2^2\,],$$
$$\boldsymbol{C}=\mathrm{diag}[\,2\xi_1\omega_1\quad 2\xi_2\omega_2\,] \tag{171}$$

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & r_1\\ r_1 & r_2\end{bmatrix},\boldsymbol{h}_G(t)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & M_1^{-1}h_G(t)\end{bmatrix} \tag{172}$$

$$M_1=\boldsymbol{\varphi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_0\boldsymbol{\varphi}_1,r_1=M_1^{-1}\boldsymbol{\varphi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_0\boldsymbol{1},$$
$$r_2=M_1^{-1}M_0 \tag{173}$$

$$\omega_2^2=M_1^{-1}(k+k_G),\ 2\xi_2\omega_2=M_1^{-1}c \tag{174}$$

耗能隔震结构系统上部结构第一振型$\boldsymbol{\varphi}_1$对应的广义质量为M_1;振型参与系数为r_1;阻尼比为ξ_1;频率为ω_1。

6.2.2　验证分析算例

在零初始条件下,由式(40)和(37)可得结构系统的脉冲和频率响应函数分别为:

$$\begin{Bmatrix}\kappa_1(t)\\ \kappa_2(t)\end{Bmatrix}=-\sum_{j=1}^{M}\eta_j\mathrm{e}^{s_jt}\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r} \tag{175}$$

$$\kappa_p(t)=-\sum_{j=1}^{M}\eta_j[\,k_{Gi}+s_j\bar{h}_{Gi}(s_j)\,]\mathrm{e}^{s_jt}\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}=-\sum_{j=1}^{M}\eta_j[\,k_G+s_j\bar{h}_G(s_j)\,]\mathrm{e}^{s_jt}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r} \tag{176}$$

式中　i表示某一层,所以当表示具体某一层即隔震层的时候可以省略i,$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}=[\,0\quad 1\,]$。

$$\begin{Bmatrix}H_1(\mathrm{i}\omega)\\ H_2(\mathrm{i}\omega)\end{Bmatrix}=-\sum_{j=1}^{M}\frac{\eta_j}{\mathrm{i}\omega-s_j}\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r} \tag{177}$$

$$H_p(\mathrm{i}\omega)=-\sum_{j=1}^{M}\frac{\eta_j[\,k_G+s_j\bar{h}_G(s_j)\,]}{\mathrm{i}\omega-s_j}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r} \tag{178}$$

由式(169)和(165)直接获得的频率响应函数为:

$$\begin{Bmatrix}H_1(\mathrm{i}\omega)\\ H_2(\mathrm{i}\omega)\end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix}\omega_1^2+2\mathrm{i}\xi_1\omega_1\omega-\omega^2 & -r_1\omega^2\\ -r_1\omega^2 & {\omega_2}^2+2\mathrm{i}\omega\xi_2\omega_2+\mathrm{i}\omega M_1^{-1}\bar{h}_G(\mathrm{i}\omega)-r_2\omega^2\end{Bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}r_1\\ r_2\end{Bmatrix} \tag{179}$$

$$H_p(\mathrm{i}\omega)=-[\,k_G+\mathrm{i}\omega\bar{h}_G(\mathrm{i}\omega)\,]\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\begin{Bmatrix}H_1(\mathrm{i}\omega)\\ H_2(\mathrm{i}\omega)\end{Bmatrix} \tag{180}$$

式中　$\bar{h}_G(\mathrm{i}\omega)$是$h_G(t)$的傅氏变换。

由于式(177)~(180)均为解析解,所以应该相等。

某6层基础隔震钢筋混凝土框架结构,结构各层质量m_{01}~m_{02}为300×10^3 kg,m_{03}~m_{06}为270×10^3 kg;层间刚度k_{01}~k_{02}为4×10^5 kN/m,k_{03}~k_{06}为3.6×10^5 kN/m;结构第一振型阻尼比$\xi_1=0.05$。隔震层质量$m=400\times10^3$ kg,隔震层等效圆频率$\omega_b=5.27$ rad/s,等效阻尼比ξ_b分别取0.10,0.15,0.20,0.25,隔震层刚度$k=m\omega_b^2$。隔震层设置带支撑一般线性黏弹性阻尼器$P_G(t)$,平衡刚度$k_0=2.1\times10^7$ N/m,水平支撑刚度$k_b=3k$,松弛函数$h_Q(t)$的拉氏和傅氏变换取二次分式:

$$\frac{\bar{h}_Q(s)}{m}=\frac{\omega_p^2(s+d_1)}{s^2+e_1s+e_2} \tag{181}$$

$$\frac{\bar{h}_Q(\mathrm{i}\omega)}{m}=\frac{\omega_p^2(\mathrm{i}\omega+d_1)}{(\mathrm{i}\omega)^2+e_1(\mathrm{i}\omega)+e_2} \tag{182}$$

其计算值取为:$\omega_p=9.45$ rad/s;$d_1=28.4$ rad/s;$e_1=65$ rad/s;$e_2=950$ rad/s。

图3~5分别为四种工况下,按照直接计算法和本文方法计算的结构隔震层频率响应函数模、上部结构频率响应函数模、阻尼器受力频率响应函数模。由图可知两种求解方法所得结果完全一致,从而再

次验证了本文方法的正确性。

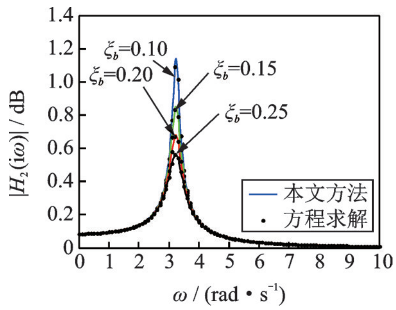

图 3 隔震层频率响应函数模 $|H_2(\mathrm{i}\omega)|$

Fig. 3 Calculation values of $|H_2(\mathrm{i}\omega)|$ of isolated layer frequency response function

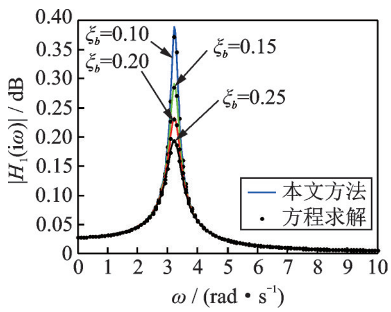

图 4 上部结构频率响应函数模 $|H_1(\mathrm{i}\omega)|$

Fig. 4 Calculation values of $|H_1(\mathrm{i}\omega)|$ of the upper structure frequency response function

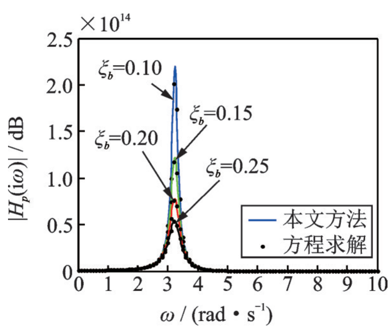

图 5 阻尼器受力频率响应函数模 $|H_p(\mathrm{i}\omega)|$

Fig. 5 Calculation values of $|H_p(\mathrm{i}\omega)|$ of damper's force frequency response function

6.2.3 响应分析算例

某 10 层框架隔震结构，结构第一振型阻尼比 $\xi_1=0.05$，结构参数如表 1 所示。隔震层质量 $m=3.75\times10^5$ kg，等效阻尼比为 $\xi_b=0.2$，隔震层刚度 $k=9.04\times10^7$ N/m。隔震层设置带支撑的 Maxwell 阻尼器 $P_G(t)$，阻尼器参数为：平衡刚度 $k_0=0.36\times10^5$ N/m， $k_1=42.08\times10^5$ N/m； $c_1=0.83\times10^5$ N•s/m，支撑刚度为 $k_b=3k$。

平稳地震动 $\ddot{x}_f(t)$ 谱密度函数取为 Kanai-Tajimi 谱：

$$S_{\ddot{x}_f}(\omega)=\frac{{\omega_f}^4+4{\xi_f}^2{\omega_f}^2\omega^2}{(\omega^2-{\omega_f}^2)^2+4{\xi_f}^2{\omega_f}^2\omega^2}\cdot S_0 \quad (183)$$

表 1 耗能隔震结构的上部结构参数

Tab. 1 The upper structural parameters of energy dissipation isolated structure

楼层	质量/(10^3 kg)	层间刚度/(10^5 N•m^{-1})
1	282.17	8691
2	282.17	8691
3	280	7891
4	242.25	7289
5	242.25	6301
6	240.67	5746
7	207.73	4756
8	206.87	3374
9	178.6	2264
10	168.17	1084.2

式中 S_0 为地震动谱强度；ω_f 和 ξ_f 分别为场地土的卓越频率和阻尼比，$\omega_f=19$ rad/s，$\xi_f=0.65$。

Shinzuka-Sato 型均匀调制函数：

$\alpha_1=0.045\pi$，$\alpha_2=0.05\pi$，$S_0=0.01573$ m^2/s^3。

Spanos-Solomos 型非均匀调制函数：

$$\alpha(\omega)=\frac{1}{2}\left(0.15+\frac{\omega^2}{25\pi^2}\right),\varepsilon(\omega)=\frac{\omega}{5\pi}\sqrt{2},$$

$S_0=0.01554$ m^2/s^3。

完全非平稳模型取 1940 年 El Centro 地震动[33]模型。

在 Shinozuka-Sato 型均匀调制非平稳地震激励作用下，多层隔震结构系统的位移、速度，隔震层阻尼器受力、受力速率，隔震层支撑位移、速度，隔震层阻尼器位移、速度响应方差如图 6～13 所示。

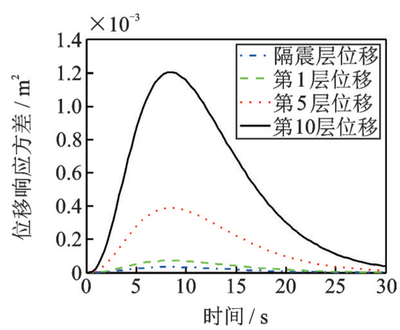

图 6 Shinozuka-Sato 型地震激励下结构位移响应方差

Fig. 6 Variance of structural displacement response under Shinozuka-Sato seismic excitation

在 Spanos-Solomos 型非均匀调制非平稳地震激励作用下，多层隔震结构系统的位移、速度，隔震层阻尼器受力、受力速率，隔震层支撑位移、速度，隔震层阻尼器位移、速度响应方差如图 14～21 所示。

在 Shinozuka-Sato 型均匀调制非平稳地震激励作用下，结构响应方差具有峰值效应，且均在 $t=$

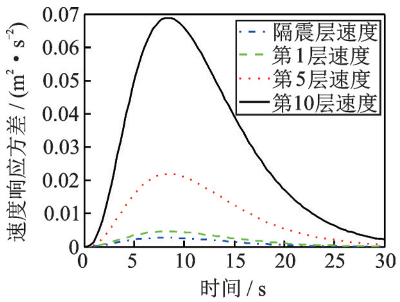

图 7　Shinozuka-Sato 型地震激励下结构速度响应方差

Fig. 7　Variance of structural velocity response under Shinozuka-Sato seismic excitation

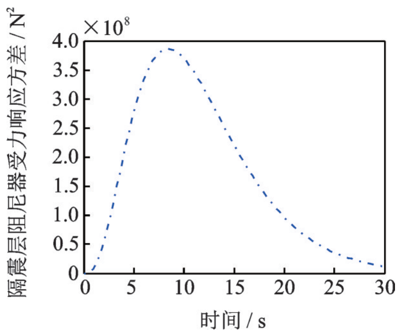

图 8　Shinozuka-Sato 型地震激励下隔震层阻尼器受力响应方差

Fig. 8　Variance of isolation layer damper force response under Shinozuka-Sato seismic excitation

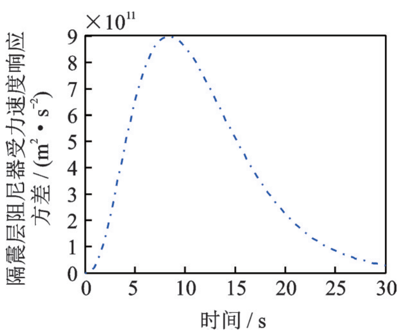

图 9　Shinozuka-Sato 型地震激励下隔震层阻尼器受力速度响应方差

Fig. 9　Variance of isolation layer damper force velocity response under Shinozuka-Sato seismic excitation

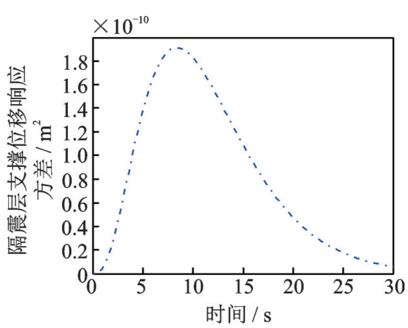

图 10　Shinozuka-Sato 型地震激励下隔震层支撑位移响应方差

Fig. 10　Variance of isolation layer brace displacement response under Shinozuka-Sato seismic excitation

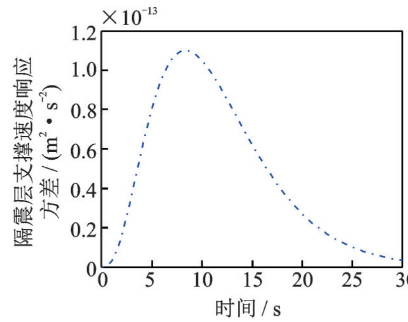

图 11　Shinozuka-Sato 型地震激励下隔震层支撑速度响应方差

Fig. 11　Variance of isolation layer brace velocity response under Shinozuka-Sato seismic excitation

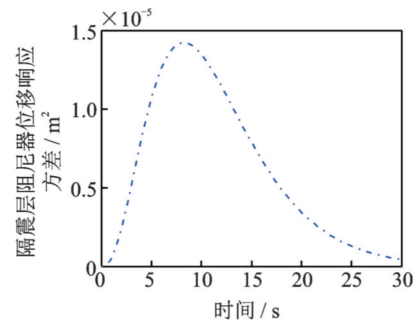

图 12　Shinozuka-Sato 型地震激励下隔震层阻尼器位移响应方差

Fig. 12　Variance of isolation layer damper displacement response under Shinozuka-Sato seismic excitation

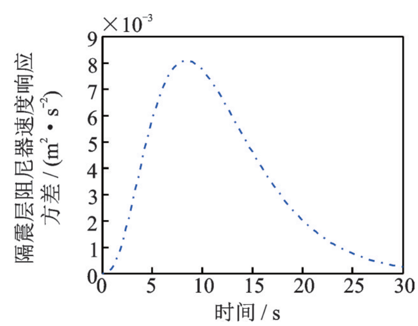

图 13　Shinozuka-Sato 型地震激励下隔震层阻尼器速度响应方差

Fig. 13　Variance of isolation layer damper velocity response under Shinozuka-Sato seismic excitation

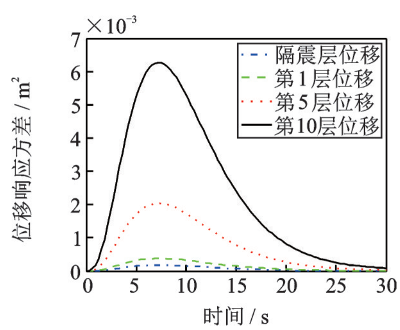

图 14　Spanos-Solomos 型地震激励下结构位移响应方差

Fig. 14　Variance of structural displacement response under Spanos-Solomos seismic excitation

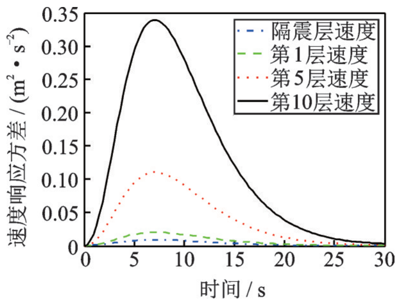

图 15　Spanos-Solomos 型地震激励下结构速度响应方差

Fig. 15　Variance of structural velocity response under Spanos-Solomos seismic excitation

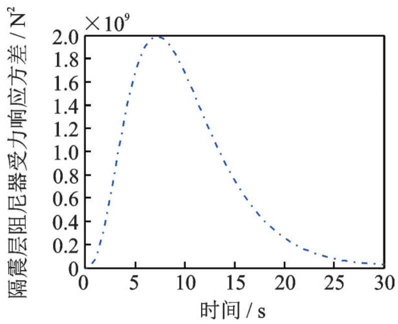

图 16　Spanos-Solomos 型地震激励下隔震层阻尼器受力响应方差

Fig. 16　Variance of isolation layer damper force response under Spanos-Solomos seismic excitation

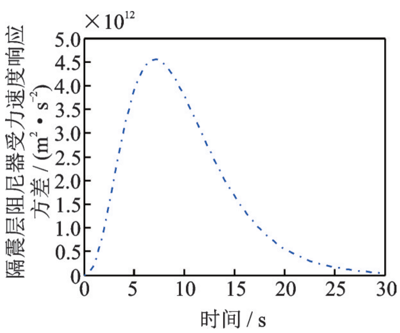

图 17　Spanos-Solomos 型地震激励下隔震层阻尼器受力速度响应方差

Fig. 17　Variance of isolation layer damper force velocity response under Spanos-Solomos seismic excitation

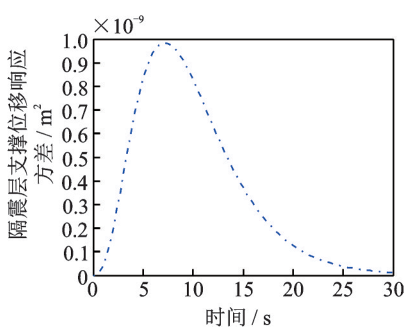

图 18　Spanos-Solomos 型地震激励下隔震层支撑位移响应方差

Fig. 18　Variance of isolation layer brace displacement response under Spanos-Solomos seismic excitation

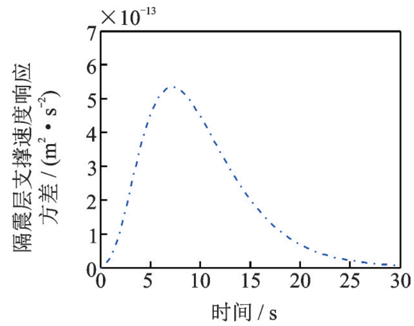

图 19　Spanos-Solomos 型地震激励下隔震层支撑速度响应方差

Fig. 19　Variance of isolation layer brace velocity response under Spanos-Solomos seismic excitation

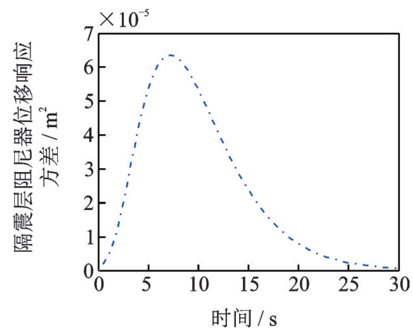

图 20　Spanos-Solomos 型地震激励下隔震层阻尼器位移响应方差

Fig. 20　Variance of isolation layer damper displacement response under Spanos-Solomos seismic excitation

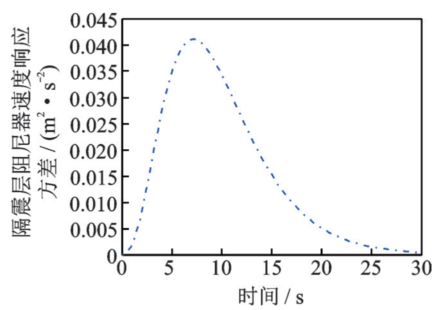

图 21　Spanos-Solomos 型地震激励下隔震层阻尼器速度响应方差

Fig. 21　Variance of isolation layer damper velocity response under Spanos-Solomos seismic excitation

8.4 s同一时刻出现峰值，在 $t=30$ s之后响应方差收敛趋近于0。由图6可得，结构第10层位移响应方差最大值仅为 1.204×10^{-3} m²，达到了很好的减震效果。Spanos-Solomos 型与 Shinzuka-Sato 型非平稳地震激励下，具有相似的性质：结构响应方差也具有峰值效应，且均在 $t=7.2$ s同一时刻出现峰值，在 $t=30$ s之后响应方差收敛趋近于0。由图14可得，结构第10层位移响应方差最大值仅为 6.268×10^{-3} m²，达到了很好的减震效果。

在完全非平稳地震激励作用下，多层隔震结构系统的位移、速度，隔震层阻尼器受力、受力速率，隔

震层支撑位移、速度，隔震层阻尼器位移、速度响应方差如图 22～29 所示。

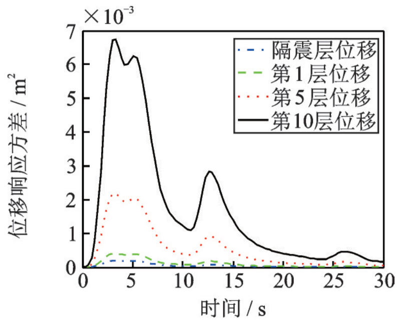

图 22　完全非平稳地震激励下结构位移响应方差

Fig. 22　Variance of structural displacement response under the fully non-stationary seismic excitation

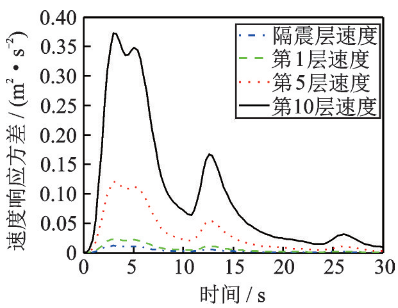

图 23　完全非平稳地震激励下结构速度响应方差

Fig. 23　Variance of structural velocity response under the fully non-stationary seismic excitation

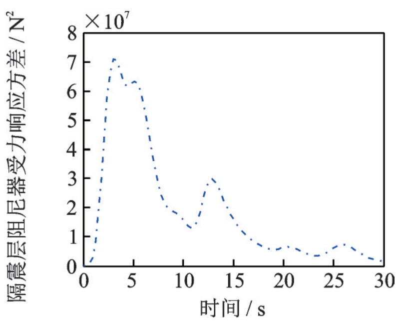

图 24　完全非平稳地震激励下隔震层阻尼器受力响应方差

Fig. 24　Variance of isolation layer damper force response under the fully non-stationary seismic excitation

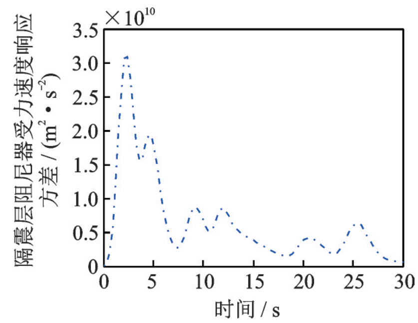

图 25　完全非平稳地震激励下隔震层阻尼器受力速度响应方差

Fig. 25　Variance of isolation layer damper force velocity response under the fully non-stationary seismic excitation

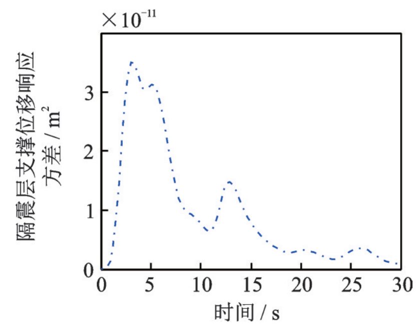

图 26　完全非平稳地震激励下隔震层支撑位移响应方差

Fig. 26　Variance of isolation layer support displacement response under the fully non-stationary seismic excitaton

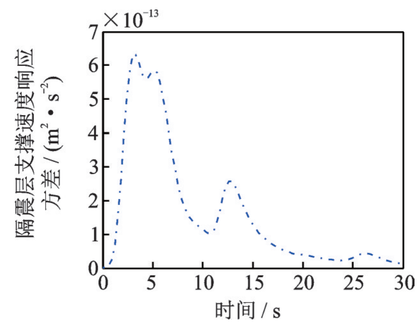

图 27　完全非平稳地震激励下隔震层支撑速度响应方差

Fig. 27　Variance of isolation layer support velocity response under the fully non-stationary seismic excitation

从以上结果可以看出：在 Shinozuka-Sato 型和 Spanos-Solomos 型调制非平稳地震激励作用下，系统的非平稳响应方差与调制函数曲线相似，呈单峰形状，即激励模型方差是单峰的。由于完全非平稳地震激励模型由多个均匀随机过程叠加而成，完全非平稳地震激励模型方差就是多峰的，并且完全非平稳地震激励模型既与时间相关又与频率相关，所以完全非平稳激励下，系统的响应方差会呈现多峰状，实际地震就是多峰的，更加符合工程实际意义。

在完全非平稳地震激励作用下，响应方差呈多峰状，取三次相对较大峰值进行分析，响应方差第一次出现峰值时间在 $t=3.0\sim3.3$ s，第二次出现峰值时间在 $t=5.1\sim5.4$ s，第三次峰值出现时间在 $t=12.6\sim12.9$ s，正是由于完全非平稳的特性导致出现峰值时间不是同一时刻，与 Spanos-Solomos 型和 Shinzuka-Sato 型不同。由图 22 可得，结构第 10 层位移响应方差最大值仅为 6.738×10^{-3} m^2，达到了很好的减震效果。

在三种非平稳地震激励条件下均有：随着层数的增加，结构的位移和速度响应方差也越大；第 10 层与第 5 层、第 5 层与第 1 层、第 1 层与隔震层响应方

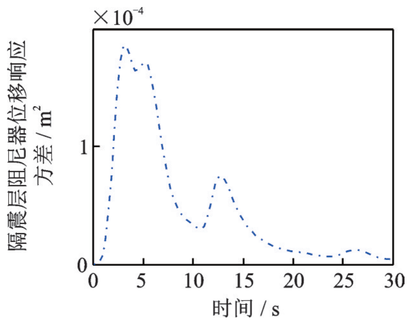

图 28 完全非平稳地震激励下隔震层阻尼器位移响应方差

Fig. 28 Variance of isolation layer damper displacement response under the fully non-stationary seismic excitation

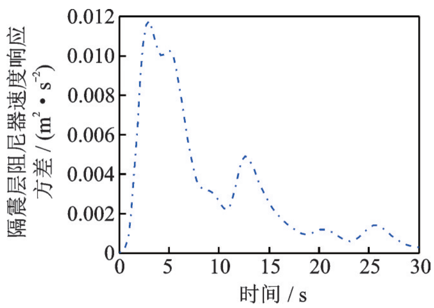

图 29 完全非平稳地震激励下隔震层阻尼器速度响应方差

Fig. 29 Variance of isolation layer damper velocity response under the fully non-stationary seismic excitation

差的差值依次递减；从隔震层阻尼器受力响应方差来看，阻尼器起到了很好的耗能作用。

7 结 论

为建立设置支撑的一般黏弹性耗能结构阻尼器保护系统的抗震分析与设计方法，对设置支撑的一般黏弹性阻尼器耗能结构系统的瞬态响应模态叠加解析解进行了研究，并对其非平稳地震响应解析分析；获得了设置支撑的一般黏弹性耗能结构阻尼器保护系统（结构位移与速度、阻尼器受力与受力速度、以及支撑和阻尼器的位移与速度）瞬态响应的非正交模态叠加解析解，应用此解析解和随机振动频域分析法，建立了设置支撑的一般线性黏弹性耗能结构阻尼器保护系统在一般和多种（Shinozuka-Sato 型、Hsu-Bernard 型、Goto-Toki 型、Iyengar 型、分段连续型、余弦型、正弦型、Spanos-Solomos 型）均匀与非均匀非平稳激励以及完全非平稳地震功率谱模型下的响应解析分析。

采用两种典型结构系统（减震结构系统和隔震结构系统）的复模态法和频响函数法的理论验证分析，以及均匀、非均匀、完全非平稳算例响应分析，证明了本文方法的正确性、简易性和普适性。

本文对设置支撑的一般线性黏弹性耗能结构阻尼器保护系统进行了分析，并使得非平稳地震激励下响应分析应用更加广泛和高效。通过对一般线性黏弹性耗能结构及阻尼器保护系统的瞬态响应和非平稳地震响应的解析分析，一方面可对整体耗能系统各构件进行基于泊松假设的抗震动力可靠度分析，另一方面将为结构系统建立基于反应谱的模态叠加抗震设计提供分析路径。

参考文献：

[1] 建筑抗震设计规范：GB 50011—2010[S]. 北京：中国建筑工业出版社，2010.
Code for seismic design of buildings: GB 50011—2010[S]. Beijing: China Construction Industry Press, 2010.

[2] Christopoulos C, Filiatrault A, Bertero V V. Principles of Passive Supplemental Damping and Seismic Isolation[M]. IUSS Press, 2006.

[3] 周云. 粘弹性阻尼器减震结构设计[M]. 武汉：武汉理工大学出版社，2006：116-128.
Zhou Yun. Viscoelastic Damping Structure Design[M]. Wuhan: Wuhan University of Technology Press, 2006: 116-128.

[4] 祝英杰. 结构抗震设计[M]. 北京：北京大学出版社，2014.
Zhu Yingjie. Structural Seismic Design [M]. Beijing: Peking University Press, 2014.

[5] Koh C G, Kelly J M. Application of fractional derivatives to seismic analysis of base-isolated models[J]. Seismic Engineering and Structural Dynamics, 1990, 19(2): 229-241.

[6] Hwang J S, Ku S W. Analytical modeling of high damping rubber bearings[J]. Journal of Structural Engineering, 1997, 123(8): 1029-1036.

[7] Makris N, Constantinou M C, Dargush G F. Analytical model of viscoelastic fluid dampers[J]. Journal of Structural Engineering, 1993, 119(11): 3310-3325.

[8] 欧进萍，吴斌，龙旭. 结构被动耗能减振效果的参数影响[J]. 地震工程与工程振动，1998, 18(1): 60-70.
Ou Jinping, Wu Bin, Long Xu. Parameter analysis of passive energy dissipation systems[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 1998, 18 (1): 60-70.

[9] 翁大根，吕西林. 消能减震结构设计参数研究与试验验证[J]. 地震工程与工程振动，2004, 24(2): 150-157.
Weng Dagen, Lü Xilin. Study on design parameters of energy dissipation structures with experiment verification[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2004, 24(2): 150-157.

[10] 欧进萍，龙旭. 速度相关型耗能减振体系参数影响的

复模量分析[J]. 工程力学, 2004, 21(4): 6-12.
Ou Jinping, Long Xu. Parameter analysis of passive energy dissipation systems with velocity-dependent dampers[J]. Engineering Mechanics, 2004, 21 (4): 6-12.

[11] 常业军, 苏毅, 程文瀼, 等. 工程结构粘弹性消能支撑型式及设计参数的研究[J]. 地震工程与工程振动, 2007, 27(1): 136-140.
Chang Yejun, Su Yi, Cheng Wenrang, et al. Study on brace types and design parameters of engineering structures using viscoelastic dampers[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2007, 27 (1): 136-140.

[12] Fu Y, Kasai K. Comparative study of frames using viscoelastic and viscous dampers[J]. Journal of Structural Engineering, 1998, 124(5): 513-522.

[13] Xie L, Cao M, Funaki N, et al. Performance study of an eight-story steel building equipped with oil dampers damaged during the 2011 great east Japan seismic part 1: structural identification and damage reasoning [J]. Journal of Asian Architecture and Building Engineering, 2015, 14(1): 181-188.

[14] 建筑消能减震技术规程:JGJ 297—2013[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2013.
Technical specification for building energy dissipation: JGJ 297—2013[S]. Beijing: China Construction Industry Press, 2013.

[15] 瞿伟廉,吴斌,李爱群. 国家自然科学基金委员会工程与材料科学部. 学科发展战略研究报告——建筑、环境与土木工程Ⅱ(土木工程卷): 工程结构的振动控制理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2006: 456-475.
Qu Weilian, Wu Bin, Li Aiqun. National Natural Science Foundation of Engineering and Materials Science Department. Discipinary Development Strategy Research Report——Structure, Environmental and Civil Engineering (Civil Engineering Volume): Vibration Control Engineering Structure Theory and Its Applications[M]. Beijing: Science Press, 2006: 456-475.

[16] Fang T, Li J Q, Sun M N. A universal solution for evolutionary random response problems [J]. Journal of Sound & Vibration, 2002, 253(4):909-916.

[17] Fang T, Zhang T S. Non-stationary mean square response due to uniformly amplitude modulated random excitations[J]. Journal of Sound and Vibration, 1955, 182(3):369-379.

[18] 李创第, 柏大炼, 葛新广, 等. 隔震结构系统线性黏弹性液体阻尼器非平稳响应分析法[J]. 振动与冲击, 2019,38(2):234-246.
LI Chuangdi, BAI Dalian, GE Xinguang, et al. Non stationary response analysis of isolated structures with linear viscoelastic liquid dampers[J]. Journal of Vibration and Shock, 2019, 38(2): 234-246.

[19] Ou J P, Long X, Li Q S. Seismic response analysis of structures with velocity-dependent dampers[J]. Journal of Constructional Steel Research, 2007, 63 (5): 628-638.

[20] 李创第, 李暾, 尉霄腾, 等. Maxwell阻尼耗能结构非平稳地震响应解析分析[J]. 振动与冲击, 2016, 35(19):172-180.
Li Chuangdi, Li Tun, Wei Xiaoteng, et al. Response analysis of energy dissipation structures with Maxwell dampers under non-stationary seismic excitation [J]. Journal of Vibration and Shock, 2016, 35 (19): 172-180.

[21] 李创第, 李暾, 葛新广, 等. 一般线性黏弹性阻尼器耗能结构瞬态响应的非正交振型叠加精确解[J]. 工程力学, 2015, 32(11):140-149.
Li Chuangdi, Li Tun, Ge Xinguang, et al. Accurate solution of non-orthogonal mode superposition for transient response of general linear viscoelastic damper energy dissipation structures [J]. Engineering Mechanics, 2015, 32(11): 140-149.

[22] Gluck N, Reinhorn A M, Gluck J, et al. Design of supplemental dampers for control of structures[J]. Journal of Structural Engineering, 1996, 122(12): 1394-1399.

[23] Council B S S. Prestandard and commentary for the seismic rehabilitation of buildings[J]. Report FEMA-356, Washington, D.C., 2000.

[24] Liang Z, Lee G C, Dargush G F, et al. Structural Damping: Applications in Seismic Response Modification[M]. CRC Press, 2011.

[25] 方同. 工程随机振动[M]. 北京: 国防工业出版社, 1995.
Fang Tong, Engineering Random Vibration [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1995.

[26] PRIESTLEY M B. Power spectral analysis of non-stationary random processes[J]. Journal of Sound and Vibration, 1967, 6(1): 86-97.

[27] Housner G W. Characteristics of strong motion seismics [J]. BSSA, 1947, 37:19-31.

[28] Tajimi H. A statistical method of determining the maximum response of a building structure during a seismic [C]. Proceedings of the 2nd World Conference on seismic Engineering, 1960(2):781-796.

[29] Clough R W. Penzien J. Dynamics of Structures[M]. 2nd ed. New York: McGraw Hill, 1993.

[30] 李鸿晶, 陈辰. 一种平稳地震地面运动的改进金井清谱模型[J]. 工程力学, 2014, 31(2): 158-163.
Li Hongjing, Chen Chen. A modified Kanai-Tajimi spectral model for the stationary seismic induced ground motion process[J]. Engineering Mechanics, 2014, 31

(2): 158-163.

[31] Rofooei F R, Mobarake A, Ahmadi G. Generation of artificial seismic records with a non-stationary Kanai-Tajimi model[J]. Engineering Structures, 2001, 23(7): 827-837.

[32] 李创第,黄天立,李暾,等. TMD控制优化设计及振动台试验研究[J]. 土木工程学报, 2006,39(7):19-25.
Li Chuangdi, Huang Tianli, Li Tun, et al. Optimal TMD design and shaking table test[J]. China Civil Engineering Journal, 2006,39(7):19-25.

[33] Conte J P, Peng B F. Fully non-stationary analytical seismic ground-motion model[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1997, 123(1):15-24.

[34] Palmeri A, Ricciardelli F, Luca A D, et al. State space formulation for linear viscoelastic dynamic systems with memory[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2003, 129(7): 715-724.

[35] Singh M P, Verma N P, Moreschi L M. Seismic analysis and design with Maxwell dampers[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2003, 129(3): 273-282.

[36] 张天舒,方同. 弹性-粘弹性复合结构系统的随机响应分析[J]. 工程力学, 2001, 18(5): 71-76.
Zhang Tianshu, Fang Tong. The random response analysis of elastic-viscoelastic combined systems[J]. Engineering Mechanics, 2001, 18(5): 71-76.

[37] 李创第,邹万杰,黄天立,等. 结构在水平与竖向地震同时作用的非平稳响应[J]. 土木工程学报, 2005, 38(6):25-34.
Li Chuangdi, Zou Wanjie, Huang Tianli, et al. Non-stationary random response of structures to horizontal-vertical seismic excitations[J]. China Civil Engineering Journal, 2005, 38(6):25-34.

[38] 李创第,柏大炼,邹万杰,等. 设置支撑的广义Maxwell阻尼器系统基于非平稳巴斯金谱的地震响应分析[J]. 应用力学学报,2018,35(5):1050-1057.
Li Chuangdi, Bai Dalian, Zou Wanjie, et al. Analytical method for non-stationary responses of dissipative system with brace-general Maxwell damper based on Baskin spectrum[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2018, 35(5): 1050-1057.

Analytical analysis of non-uniform and completely nonstationary seismic response of a general linear viscoelastic damper protection system

LI Chuang-di[1], *WANG Bo-wen*[2], *CHANG Ming-jing*[3]

(1.School of Civil Engineering and Architecture, Guangxi University of Science and Technology, Liuzhou 545006, China;
2. School of Mechanics and Civil Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China;
3.School of Civil Engineering and Architecture, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China)

Abstract: In order to establish the seismic design and a dynamic reliability analysis method of the damper protection system of general linear viscoelastic energy dissipation structure with braces, a general analytical solution of the response of the damper protection system of the general linear viscoelastic energy dissipation structure with braces under the non-uniform and completely nonstationary seismic excitation is proposed in this paper. The most general integral type analysis model with support viscoelastic damper is used to realize the non-extended order modeling of the general linear viscoelastic damping energy dissipation structure system with braces by using differential integral equations. The non-extended order mode superposition solution of the transient response of the damper protection system under arbitrary excitation and non-zero initial conditions is directly obtained by using the transfer matrix method. By using the analytical solution and the frequency domain analysis method of random vibration, the specific response analytical solutions of the damper protection system of energy dissipation structure are obtained under the general and eight classical uniform and non-uniform modulation filtered white noise seismic excitation and completely non-stationary seismic power spectrum models. The correctness, simplicity and universality of this method are proved by the theoretical verification analysis of the complex mode method and frequency response function method of two typical structures of vibration absorption and isolation, as well as the response analysis of uniform, non-uniform and completely non-stationary cases. The obtained analytical solutions of transient response and non-stationary seismic response can, on the one hand, carry out Poisson based analysis on the components of the overall energy dissipation system. On the other hand, it will provide an analysis path for the structural system to establish the mode superposition seismic design based on response spectrum.

Key words: energy dissipation structure system; viscoelastic damper; transient response; non-uniform and completely non-stationary response; analytical solution

作者简介: 李创第(1964—),男,博士,教授。E-mail: lichuangdi1964@163.com。