

采用高斯展开法分析组合式开口矩形 Mindlin 板的 弯曲自振特性

杨舟¹, 冯青松¹, 邓杰², 张凌¹, 郭文杰¹

(1. 华东交通大学轨道交通基础设施性能监测与保障国家重点实验室, 江西 南昌 330013;

2. 西北工业大学海洋声学信息感知重点实验室, 陕西 西安 710129)

摘要: 基于 Mindlin 板理论, 将高斯展开法引入到组合式开口矩形板弯曲振动问题研究中。选取高斯小波函数作为位移形函数, 其本身的局域化特性能够准确捕捉到局部开口处的特征, 提高计算效率; 定义了高斯函数的伸缩因子和平移因子, 通过伸缩和平移变换生成一系列用于拟合开口板位移场的基函数, 增大伸缩因子取值使得形函数具有更高的分辨率, 进而能更精确地模拟更高频的振动场; 以能量法为基本框架, 建立了开口板的拉格朗日能量泛函, 并引入人工弹簧模型模拟各种边界条件, 将边界条件以弹性势能的方式附加到开口板的能量泛函之中。通过与有限元软件的计算结果对比, 验证了该方法的准确性与适用性。

关键词: 弯曲振动; 组合式开口矩形板; Mindlin 板理论; 高斯展开法; 能量法

中图分类号: O327; TB123 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2022)05-1130-08

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2022.05.010

引言

在铁道工程、船舶、航空航天及建筑等领域中, 含开口的矩形板是一种常见的结构。例如铁道工程中的地铁内置式钢弹簧浮置板结构^[1], 为了便于钢弹簧的安装, 往往需要在轨道板相应位置进行开口。由于开口的存在, 降低了原有板结构的整体刚度并改变了原有板的振动特性, 而振动特性的改变会直接影响到板结构向周围环境辐射噪声的特性, 进而可能会引起相应的噪声问题。因此, 研究开口板的振动特性对实际工程具有较为重要的意义。

目前针对开口板振动问题, 无论是解析法、半解析法还是数值方法, 国内外已有较多的研究且已经取得了较多的成果。数值方法以有限元法为主, 因其固有的特点, 更容易地应用于开口结构的计算中。邱昌林等^[2]以钢制平板为研究对象, 采用有限元法并结合了边界元理论, 分析了圆形开口对钢板在水下自振频率的影响, 并进一步研究了圆形开口对钢板在水下的声辐射特性的影响, 研究表明开口可显著改变平板水下振动与声辐射特性。张媛等^[3]利用有限元法对具有不同开口尺寸和形状的薄板结构的自振特性进行了详细研究, 发现开口尺寸变化不会影响薄板的模态振

型。Chang 等^[4]采用子空间迭代算法, 建立了一种多节点的高精度矩形单元有限元模型, 计算了开口厚板的固有频率并有效地降低了计算量。尽管数值方法对于不同结构均有良好的适用性, 但无论从检验数值法准确性的角度, 还是从揭示复杂系统振动机理的角度, 解析或半解析方法不可或缺。

能量法具有将求解微分方程边值问题转化为泛函极值问题的优点, 故而在结构动力学分析中被广泛使用。已有研究基于能量变分原理和剪切变形理论开展了梁、板、壳以及各种组合结构振动特性研究, 衍生出改进傅里叶级数法^[5]、区域能量分解法^[6]、雅克比-里兹法^[7-8]等一系列新的方法。与此同时, 能量法在单开口结构振动问题的求解中也有较为广泛的应用。Lam 等^[9]使用改进的 Rayleigh-Ritz 法, 并引入正交多项式作为位移函数研究了开口矩形板的弯曲振动问题。Huang 等^[10]考虑了一种具有 V 型切口的平板结构, 选取了两组位移形函数对 V 型切口特征进行了准确描述, 分析了 V 型切口对平板自振特性的影响。Larrondo 等^[11]研究了变厚度矩形开口板结构自振特性, 将开口数由单开口拓展到多个开口, 详细分析了开口位置, 开口大小对开口板固有频率的影响。张俊等^[12]、邱永康等^[13]利用改进傅里叶级数方法, 分别研究了复杂边界条件下单开口和多开口矩形板的自振特性。

收稿日期: 2021-03-08; **修订日期:** 2021-04-19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51878277, 52068029, 52178423); 江西省学科学术和技术带头人培养计划(20194BCJ22008); 江西省重点研发计划(20192BBE50008)。

形函数的选取与能量法的求解精度有着直接的关系。现有研究中,位移形函数的选取多以改进傅里叶级数^[5,12-13]、具有梁函数特性的特征正交多项式^[14]以及 Chebyshev 多项式级数^[15]为主,事实上,像改进傅里叶级数这类全局性的函数在分析具有单一规则开口的板结构时具有较好的收敛性,但在分析内部开口形式比较复杂,如组合式开口、不规则曲边开口问题时,尤其是针对高频振动的研究,可能需要大量的级数项来进行拟合以达到求解精度,导致计算成本提高。因此,需要找到一种能够准确捕捉到开口板结构局域化特性的形函数,进而实现对开口板位移场的准确描述,提高计算效率。同时,现有研究对象大多集中在具有单一开口形状的薄板结构,对于组合式开口板的相关研究还较少,且 Kirchoff 薄板理论忽略了板的横向剪切变形和转动惯量的影响,会与实际工程情况产生一定的误差。

基于此,本文以能量法为基本框架,引入高斯展开法研究了任意边界条件下的复杂组合式开口矩形 Mindlin 板弯曲振动特性。选取具有局域化特性高斯函数作为开口板的位移场形函数,以确保能够准确捕捉其开口位置处的局域化特征,进而提高计算效率。同时,引入人工弹簧模型模拟各种边界条件,将边界条件对平板振动的影响转化为弹性势能对刚度矩阵的影响。本文以几种不同类型的组合式开口矩形 Mindlin 板为例,对比本文方法计算结果与有限元结果,验证本文方法在计算组合式开口板问题时的准确性和适用性,为实际工程问题提供参考。

1 理论分析

1.1 组合式开口矩形板物理模型

本文研究的物理模型为内部含有组合式开口的矩形 Mindlin 板,本节以图 1 所示的交叉椭圆开口板为

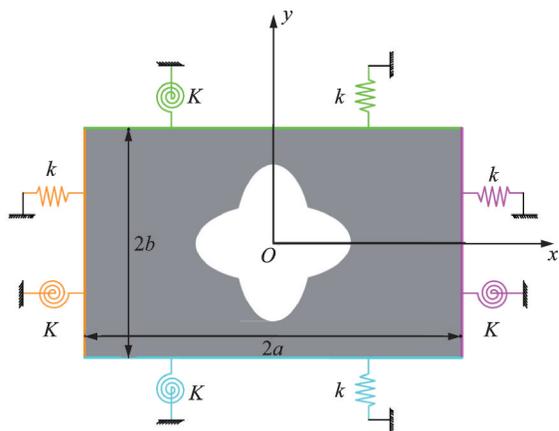


图 1 交叉椭圆开口矩形 Mindlin 板示意图

Fig. 1 Schematic diagram of rectangular Mindlin plate with crossed elliptical opening

例进行相关的理论分析。以矩形板中心作为坐标原点,建立如图 1 所示的笛卡尔坐标系。矩形板长为 $2a$, 宽为 $2b$, 椭圆开口的长半轴和短半轴分别为 $0.3a$, $0.15b$ 。在矩形板的外边界处装有与板平面垂直的位移约束线弹簧和转角约束线弹簧,刚度分别为 k, K 。对于各类边界条件的模拟,可以通过改变位移弹簧和转角弹簧的刚度取值实现^[16-17]。各类经典边界对应的弹簧刚度取值如表 1 所示,对于任意弹性边界的模拟,只需将两类弹簧刚度值取为与弹性边界相对应的值即可。此外,本文对边界条件做了相关的符号定义,具体为:固定边界 C,简支边界 S,对称边界 P,反对称边界 A,自由边界 F。对于图 1 所示的矩形板模型,假设边界条件为 S-F-C-A,则它对应的边界条件顺序为 $x = -a$ 处边界为简支 S, $y = -b$ 边界为自由 F, $x = a$ 边界为固定 C, $y = b$ 边界为反对称 A。

表 1 经典边界条件下人工弹簧刚度取值

Tab. 1 Stiffness value of artificial spring under classical boundary condition

边界条件	人工弹簧刚度	
	平动弹簧/ ($\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$)	转动弹簧/ ($\text{N}\cdot\text{rad}^{-1}$)
简支	∞	0
固定	∞	∞
自由	0	0
对称	0	∞
反对称	∞	0

1.2 位移形函数的选取

将 Mindlin 板的位移场表示为基函数 $\xi_i(x, y)$ 和一系列未知的权重系数 $a_i(t), b_i(t), c_i(t)$ 的组合,即:

$$\begin{cases} w(x, y, t) = \sum_i a_i(t) \xi_i(x, y) = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{a} \\ \theta_x(x, y, t) = \sum_i b_i(t) \xi_i(x, y) = \mathbf{b}^T \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{b} \\ \theta_y(x, y, t) = \sum_i c_i(t) \xi_i(x, y) = \mathbf{c}^T \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{c} \end{cases} \quad (1)$$

式中 $w(x, y, t), \theta_x(x, y, t), \theta_y(x, y, t)$ 分别表示板的垂向位移、板中面法线沿 xz 平面的转角、板中面法线沿 yz 平面的转角。

基函数向量 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta}$, \otimes 表示克罗内克积, $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 分别满足:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_i(x), \dots, \alpha_m(x)]^T \\ \boldsymbol{\beta} = [\beta_1(y), \beta_2(y), \dots, \beta_i(y), \dots, \beta_n(y)]^T \end{cases} \quad (2)$$

式中 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 分别表示 x 和 y 方向的基函数的列向量。本文选择具有局域化特性的高斯小波函数为开口矩形板的位移形函数。

高斯展开法在处理具有局域化特性声学黑洞问

题中体现出了惊人的准确性和高效性^[18-19]。将式(2)中的基函数 $\alpha_i(x)$ 和 $\beta_i(y)$ 定义为如下形式:

$$\begin{cases} \alpha_i(x) = 2^{\frac{p}{2}} \exp\left[-\frac{(2^p x - q)^2}{2}\right] \\ \beta_i(y) = 2^{\frac{k}{2}} \exp\left[-\frac{(2^k y - r)^2}{2}\right] \end{cases} \quad (3)$$

式中 p, k 和 q, r 分别表示伸缩因子和平移因子。以 x 方向位移形函数的定义为例,结合图2对方程式(3)作进一步的说明。

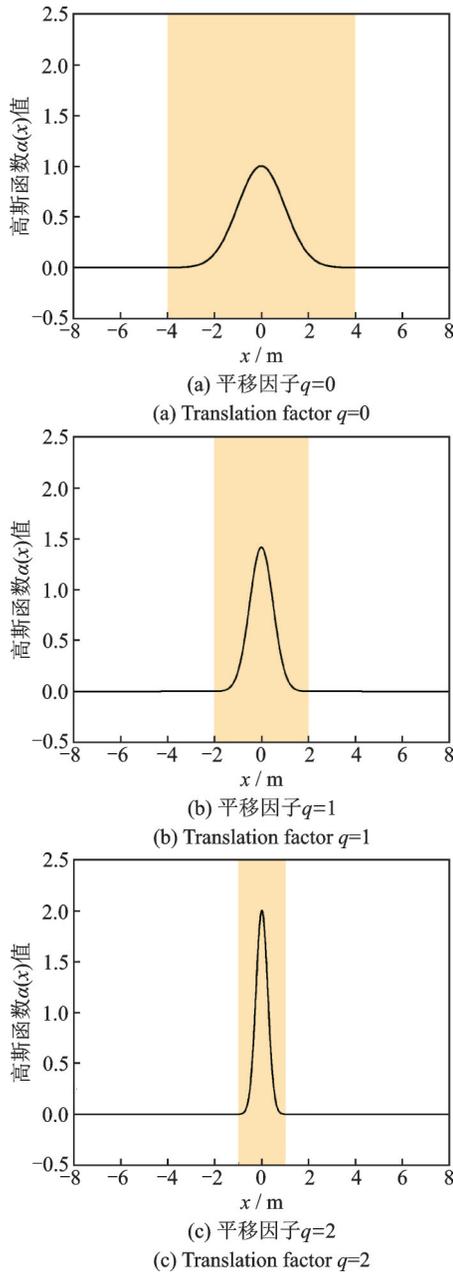


图2 不同伸缩因子对应的高斯小波曲线。阴影区域表示其相应的支撑区间:(a) $[-4, 4]$, (b) $[-2, 2]$, (c) $[-1, 1]$
 Fig. 2 Gaussian wavelet curves corresponding to different expansion factors. The shaded areas stand for their corresponding support ranges: (a) $[-4, 4]$, (b) $[-2, 2]$, (c) $[-1, 1]$

图2和3给出了不同伸缩、平移因子对应的高斯小波曲线图。可以看出,以原始高斯函数为母函数,通过改变方程式(3)中的伸缩因子和平移因子,进而再通过伸缩和平移变换来生成一系列线性无关的基函数,最终组成方程式(2)中的基函数向量 α 。伸缩因子 p, k 控制着解的精度,通过增大伸缩因子取值能够使形函数具有更高的分辨率(如图2所示),进而能更精确地模拟更高频的振动场,但同时需要耗费更多的计算资源。平移因子 q, r 由伸缩因子 p, k 决定,其取值大小控制着式(2)中 i 的取值范围,也就是形函数的个数和矩阵的维度。

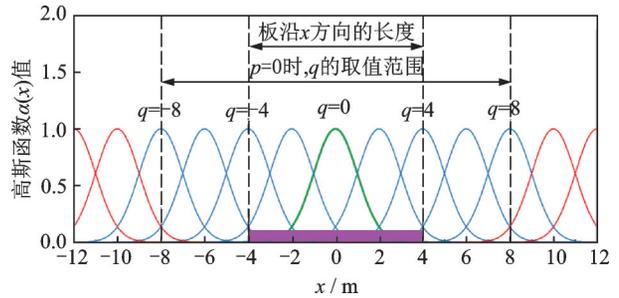


图3 高斯基函数平移因子的取值范围
 Fig. 3 Range of the translating parameter of Gaussian basis functions

需要注意的是,当结构的尺寸一定时,伸缩因子与平移因子的取值存在限制条件:

$$\begin{cases} p \geq \delta_x, \delta_x = \text{ceil}\left(\log_2 \frac{8}{2a}\right) \\ k \geq \delta_y, \delta_y = \text{ceil}\left(\log_2 \frac{8}{2b}\right) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} q = [-4 + \text{floor}(-2^p a), \text{ceil}(2^p a) + 4] \\ r = [-4 + \text{floor}(-2^k b), \text{ceil}(2^k b) + 4] \end{cases} \quad (5)$$

式中 $\text{ceil}(\ast)$ 表示最接近并大于 \ast 的整数; $\text{floor}(\ast)$ 表示最接近并小于 \ast 的整数。方程式(4)表示解的收敛性条件,它的数学含义为:基函数的支撑区间必须小于等于板的定义域,否则将无法产生足够的形函数个数从而无法得到收敛的解。方程式(5)表示解的稳健性条件,它的数学含义为:伸缩后的高斯函数可以在板的定义域内以整数平移因子滑动,但必须始终保持滑动后的形函数的支撑区间与板的定义域有交集,否则将导致矩阵病态。如图3所示,当 $p=0$,高斯函数的支撑区间为 $[-4, 4]$,因此平移因子取 $[-8, 8]$,超过此范围平移因子对应的高斯函数(图3中红色曲线)不可取。关于高斯函数的详细介绍可以参考文献[18-19]。

1.3 运动方程的建立

矩形开口板的动能 E_{plate} 和应变能 U_{plate} 可表示为:

$$\begin{aligned}
E_{\text{plate}} &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \rho h \dot{w}^2 dx dy + \\
&\frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{\rho h^3}{12} (\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2) dx dy = \\
&\frac{1}{2} \dot{\mathbf{a}}^T \left[\int_{-a}^a \int_{-b}^b \rho h \xi \xi^T dx dy \right] \dot{\mathbf{a}} + \\
&\frac{1}{2} \dot{\mathbf{b}}^T \left[\int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{\rho h^3}{12} \xi \xi^T dx dy \right] \dot{\mathbf{b}} + \\
&\frac{1}{2} \dot{\mathbf{c}}^T \left[\int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{\rho h^3}{12} \xi \xi^T dx dy \right] \dot{\mathbf{c}} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\gamma}}^T \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{\text{plate}} &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b D(x, y) \left[\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right)^2 \right. \\
&\left. - 2(1-\nu) \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{1}{2}(1-\nu) \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 \right] \\
&dx dy + \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \kappa G h(x, y) \left[\left(\theta_x + \frac{\partial w_p}{\partial x} \right)^2 + \right. \\
&\left. \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{K}_{\text{plate}} \boldsymbol{\gamma} \quad (7)
\end{aligned}$$

式中 $\dot{\boldsymbol{\gamma}}^T = [\dot{\mathbf{a}}^T \ \dot{\mathbf{b}}^T \ \dot{\mathbf{c}}^T]$, $\boldsymbol{\gamma}^T = [\mathbf{a}^T \ \mathbf{b}^T \ \mathbf{c}^T]$; $\mathbf{M}, \mathbf{K}_{\text{plate}}$ 分别表示板的质量矩阵和应变能对应的刚度矩阵; $D(x, y) = Eh^3(x, y)/[12(1-\nu^2)]$ 表示轨道板的抗弯刚度; ρ, E, ν, κ, G 分别表示板的密度、弹性模量、泊松比、剪切系数、剪切刚度; $h(x, y)$ 表示开口矩形板的厚度分布函数, 对于图1所示的交叉椭圆开口矩形板, 定义:

$$h(x, y) = \begin{cases} h_u, & \frac{x_0^2}{(0.6a)^2} + \frac{y_0^2}{(0.3b)^2} \geq 1 \cup \\ & \frac{x_0^2}{(0.3b)^2} + \frac{y_0^2}{(0.6a)^2} \geq 1 \\ 0, & \frac{x_0^2}{(0.6a)^2} + \frac{y_0^2}{(0.3b)^2} \leq 1 \cup \\ & \frac{x_0^2}{(0.3b)^2} + \frac{y_0^2}{(0.6a)^2} \leq 1 \end{cases} \quad (8)$$

式中 x_0, y_0 分别表示图1所示开口板坐标系内任意一点的横坐标和纵坐标; h_u 表示板的标准厚度。增加的弹簧弹性势能可以表示为:

$$\begin{aligned}
U_{\text{edge}} &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a [k w^2(x, -b) + k w^2(x, b) + \\
&K \theta_y^2(x, -b) + K \theta_y^2(x, b)] dx + \\
&\frac{1}{2} \int_{-b}^b [k w^2(-a, y) + k w^2(a, y) + \\
&K \theta_x^2(-a, y) + K \theta_x^2(a, y)] dy = \\
&\frac{1}{2} \mathbf{a}^T \left\{ k \left[\int_{-a}^a \left(\xi \Big|_{y=-b} \xi^T \Big|_{y=-b} + \xi \Big|_{y=b} \xi^T \Big|_{y=b} \right) dx + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\left. \int_{-b}^b \left(\xi \Big|_{x=-a} \xi^T \Big|_{x=-a} + \xi \Big|_{x=a} \xi^T \Big|_{x=a} \right) dy \right\} \mathbf{a} + \\
\mathbf{b}^T \left[K \int_{-b}^b \left(\xi \Big|_{x=-a} \xi^T \Big|_{x=-a} + \xi \Big|_{x=a} \xi^T \Big|_{x=a} \right) dy \right] \mathbf{b} + \\
\mathbf{c}^T \left[K \int_{-a}^a \left(\xi \Big|_{y=-b} \xi^T \Big|_{y=-b} + \xi \Big|_{y=b} \xi^T \Big|_{y=b} \right) dx \right] \mathbf{c} = \\
\frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{K}_{\text{edge}} \boldsymbol{\gamma} \quad (9)$$

式中 \mathbf{K}_{edge} 表示边界势能对应的刚度矩阵。

自由振动条件下, 开口矩形板整体的拉格朗日量表示为:

$$L = E_{\text{plate}} - U_{\text{plate}} - U_{\text{edge}} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\gamma}}^T \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\gamma}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}^T (\mathbf{K}_{\text{plate}} + \mathbf{K}_{\text{edge}}) \boldsymbol{\gamma} \quad (10)$$

进一步地, 定义未知的与时间相关向量 $\mathbf{d}(t) = \widehat{\mathbf{D}} e^{i\omega t}$, 结合 Euler-Lagrange 方程 $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{\gamma}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\gamma}} = 0$ 导出开口矩形板的运动方程为:

$$[(\mathbf{K}_{\text{plate}} + \mathbf{K}_{\text{edge}}) - \omega^2 \mathbf{M}] \widehat{\mathbf{D}} = 0 \quad (11)$$

方程式(11)是一个标准特征值方程问题, 通过求解方程式(11)就能得到开口矩形 Mindlin板的弯曲自振频率与振型。

2 算例分析

本节对不同边界条件下, 不同组合形式开口的矩形板的弯曲振动特性进行分析, 与有限元结果进行对比, 说明本文方法的精确性。下面给出的算例中开口矩形板的长度为 $2a=8$ m, 宽度为 $2b=6$ m, 板的标准厚度 $h_u=0.3$ m, 材料参数均为: 杨氏模量 $E=210$ GPa, 密度 $\rho=7800$ kg/m³, 泊松比 $\nu=0.3$, 剪切系数 $\kappa=5/6$ 。

2.1 收敛性分析

2.1.1 伸缩因子取值收敛性分析

由于在计算过程中存在着叠加求和, 因此计算结果的准确性受到伸缩因子 p, k 取值的影响。由方程式(4)可知, 对于图1所示的交叉椭圆开口矩形板结构, 它的伸缩因子取值只要满足 $p \geq 0, k \geq 1$, 解即收敛, 且理论上伸缩因子的取值无上限。为了证明这一结论, 对伸缩因子的取值进行了收敛性分析, 为了便于分析, 取 $p=k$ (实际分析中通常以短边的伸缩因子取值为基准值), 即 x 与 y 方向伸缩因子取值保持一致。将矩形板的四条外边界设为固支约束, 得到的固有频率变化如表2所示。

从表2可以看出, 当伸缩因子取 $p=k=1$ 时,

表2 开口板固有频率随伸缩因子取值的变化(单位:Hz)

Tab. 2 Variation of natural frequency of opening plate with expansion factors (Unit: Hz)

阶数	伸缩因子取值								
	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
1	3722.502	2384.016	111.077	88.468	89.047	85.708	83.314	83.311	83.309
2	5343.560	2563.6640	147.671	103.815	102.893	95.545	84.054	84.047	84.047
3	5401.801	2654.011	186.454	147.987	142.396	130.848	108.827	108.819	108.816
4	5412.313	2787.374	222.402	164.825	160.809	148.058	110.200	110.189	110.189
5	5413.846	3637.278	242.401	211.589	206.497	202.384	194.906	195.028	195.027
6	5437.452	4596.202	273.663	264.495	245.583	227.956	198.186	198.158	198.156
7	6211.013	5183.835	538.234	306.983	249.861	243.196	236.355	236.353	236.352
8	10086.179	5279.269	642.058	309.415	300.752	271.977	239.638	239.636	239.634

开口板的各阶固有频率值随着伸缩因子取值的增加变化很小,结果基本收敛,也证明了收敛性条件,即方程式(4)的合理性,后续计算中取 $p=k=1$ 。

2.1.2 人工弹簧刚度取值收敛性分析

由表1可以看出,当用人工弹簧模拟固支等经典边界条件时,人工弹簧刚度需要取为无穷,但在实际计算过程中需要取一个固定值,因此位移约束弹簧

和转角约束弹簧刚度的取值在很大程度上影响了计算结果的准确性,需要对人工弹簧刚度取值进行收敛性分析,找到收敛时的弹簧刚度取值,从而能够准确替代人工弹簧刚度取无穷这一情况。矩形板的四条外边界仍为固支约束,对弹簧刚度取值进行收敛性分析,取 $k=s$ N/m, $K=s$ N/rad, s 表示弹簧刚度取值,得到的固有频率变化如表3所示。

表3 开口板固有频率随弹簧刚度的变化(单位:Hz)

Tab. 3 Variation of natural frequency of opening plate with spring stiffness (Unit: Hz)

阶数	人工弹簧刚度取值									
	0	10^2	10^4	10^6	10^8	10^{10}	10^{12}	10^{14}	10^{16}	10^{18}
1	15.719	15.719	15.725	16.301	42.327	77.326	83.248	83.314	83.314	83.314
2	17.138	17.138	17.144	17.698	45.181	78.186	83.987	84.054	84.054	84.054
3	36.583	36.583	36.587	36.964	57.916	102.149	108.753	108.827	108.827	108.827
4	38.216	38.216	38.219	38.469	63.427	103.988	110.128	110.200	110.201	110.201
5	45.819	45.819	45.821	46.055	64.920	172.862	194.663	194.906	194.908	194.908
6	54.951	54.951	54.953	55.174	72.895	178.568	197.956	198.186	198.188	198.189
7	74.041	74.041	74.043	74.149	83.493	204.403	235.977	236.355	236.357	236.358
8	88.793	88.794	88.795	88.983	104.652	210.285	239.278	239.638	239.640	239.641

由表3可以看出,当弹簧刚度系数数值大于 10^{14} 时,得到的固有频率值已经趋于稳定,结果已收敛于固支边界。表明当模拟某些弹簧刚度系数取无穷的边界条件时,实际计算中只要将刚度的数值取为 10^{14} 时即可得到收敛的解。

2.2 准确性分析

2.2.1 椭圆交叉开口矩形板弯曲自振特性分析

以交叉椭圆开口为例,边界条件为SSSS, CSCS和FCFC,验证本文方法的准确性。

将本文方法的计算结果与有限元仿真结果进行对比,对比结果如表4所示,两者之间的误差计算公示为:

$$Error = \frac{|f_{Fem} - f_{Gem}|}{f_{Fem}} \times 100\% \quad (12)$$

式中 f_{Fem} 表示有限元仿真结果; f_{Gem} 表示本文的高斯展开法计算结果。此外,局域化基函数的选取可能会使计算效率降低,为了更好地说明本文方法的效率性,在表4中还给出了本文方法与有限元法的求解时间。同时为了进一步说明高斯展开法的准确性,给出了高斯展开法和有限元仿真计算得到的SSSS边界条件下交叉椭圆开口矩形板前4阶的振动模态,如图4所示。

由表4可以看出,本文方法与有限元计算结果吻合良好,计算的最大误差均小于3%,且图4中两种方法计算得到的开口矩形板的模态振型也基本一致,进一步说明了本文方法的准确性。同时,通过比较表4中两种方法的求解时间可以发现,在保证求解精度的前提下,本文方法具有较高的计算效率。

表 4 不同边界条件下交叉椭圆开口的矩形板固有频率(单位:Hz)

Tab. 4 Natural frequencies of rectangular plates with crossed elliptical openings under different boundary conditions (Unit: Hz)

阶数	SSSS			CSCS			FCFC		
	$f_{GEM}/$ 求解时间	$f_{FEM}/$ 求解时间	误差/%	$f_{GEM}/$ 求解时间	$f_{FEM}/$ 求解时间	误差/%	$f_{GEM}/$ 求解时间	$f_{FEM}/$ 求解时间	误差/%
	4.27 s	4.9 s		4.52 s	5.1 s		4.33 s	5.3 s	
1	33.549	34.151	1.762	51.269	51.763	0.948	47.478	47.347	0.278
2	46.223	46.405	0.392	66.257	66.944	1.025	47.525	47.381	0.307
3	64.486	65.072	0.901	68.105	68.657	0.803	87.877	88.268	0.443
4	81.898	82.029	0.160	87.132	87.975	0.958	89.014	89.126	0.126
5	133.057	133.662	0.451	162.959	163.922	0.586	103.881	103.463	0.407
6	154.404	155.780	0.883	186.313	186.990	0.362	104.812	104.430	0.366
7	174.311	176.661	1.330	201.613	203.631	0.991	141.533	141.510	0.016
8	188.642	190.370	0.908	220.054	221.160	0.500	142.496	142.380	0.081

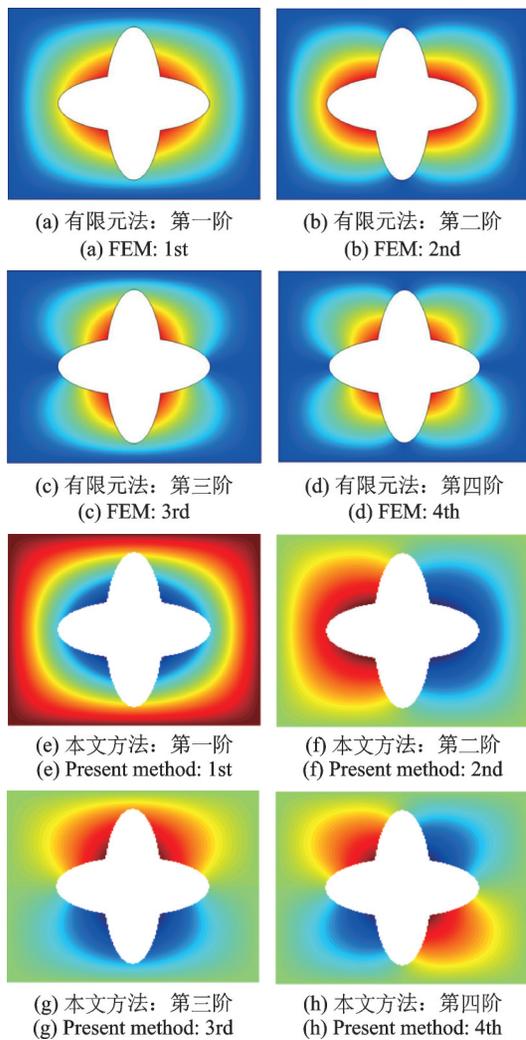


图 4 交叉椭圆开口矩形板模态图

Fig. 4 Modal diagram of rectangular plate with cross ellipse opening

2.2.2 不同组合类型开口矩形板弯曲自振特性分析

本节分析了固支边界条件下,图 5 所示的不同开口位置的矩形-矩形、矩形-椭圆以及椭圆-矩形三种组合式开口矩形 Mindlin 板的弯曲自振特

性。将本文方法计算结果与有限元结果进行了比较,比较结果如表 5 所示。表 5 中的结果对比再次说明了本文方法在分析组合式开口矩形

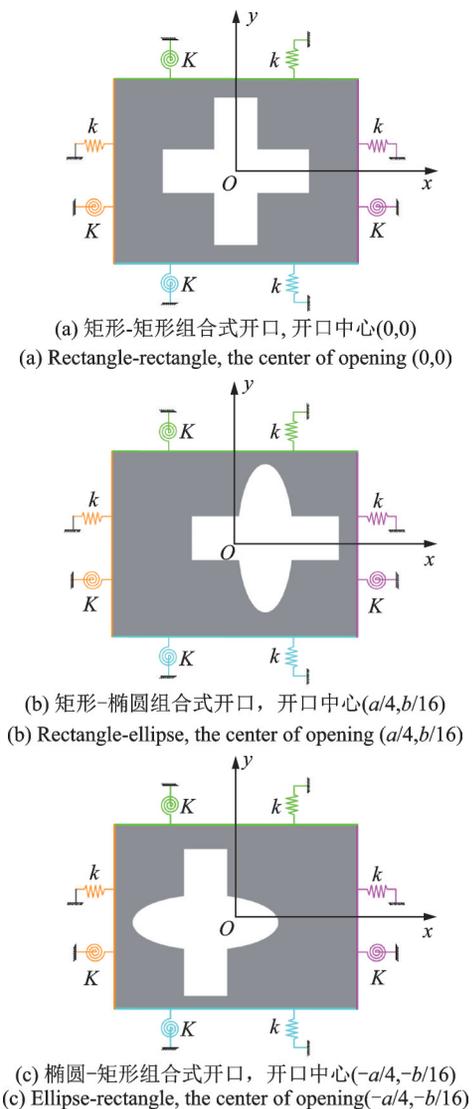


图 5 不同类型组合式开口矩形板分析示意图

Fig. 5 Schematic diagram of analysis of different types of rectangular plates with combined openings

板振动特性时具有较好的准确性及适用性,可以为工程中复杂组合式开口板振动问题提供参考。

表5 CCCC边界条件下不同类型组合式开口的矩形板固有频率(单位:Hz)

Tab. 5 Natural frequencies of rectangular plates with different types of combined openings under clamped boundary conditions (Unit: Hz)

阶数	矩形-矩形			矩形-椭圆			椭圆-矩形		
	f_{Gem}	f_{Fem}	误差/%	f_{Gem}	f_{Fem}	误差/%	f_{Gem}	f_{Fem}	误差/%
1	77.655	76.953	0.912	65.717	65.256	0.707	62.809	62.423	0.619
2	77.794	76.982	1.054	98.153	97.397	0.776	101.268	100.76	0.504
3	91.133	89.567	1.748	109.382	108.11	1.177	109.395	108.68	0.657
4	91.232	89.62	1.798	124.798	123.91	0.717	123.927	123.11	0.664
5	177.507	176.051	0.827	136.554	135.84	0.526	136.374	135.92	0.334
6	178.076	176.212	1.057	180.760	180.09	0.372	180.531	180.13	0.223
7	218.903	217.63	0.584	261.299	259.18	0.818	255.277	254.23	0.412
8	219.429	217.811	0.742	270.419	269.68	0.274	269.153	268.76	0.146

3 结论

本文以能量法为基本框架,将高斯展开法引入到组合式开口矩形 Mindlin 板弯曲振动问题研究中。本文主要结论如下:

(1) 伸缩因子的取值与高斯展开法的求解收敛性直接相关,即只有当基函数的支撑区间小于等于板的定义域时,解才收敛。在本文算例中,伸缩因子 p, k 不小于 1 时,即能满足计算精度要求。

(2) 基于高斯展开法的组合式开口矩形板弯曲振动分析结果与有限元计算结果吻合较好,最大相对误差不超过 1.8%,且本文方法准确性好的同时,还具有较高的计算效率。

(3) 本文方法可用于分析任意开口位置的矩形板结构的振动特性,具有较好的适用性。

参考文献:

- [1] 高世兵. 钢弹簧浮置板减振轨道在城市地铁中的应用[J]. 铁道工程学报, 2008, 25(3): 88-91.
Gao Shi-bing. Application of floating slab damping road-bed with steel spring in metro[J]. Journal of Railway Engineering Society, 2008, 25(3): 88-91.
- [2] 邱昌林, 陈志刚, 邓轶, 等. 开孔平板水下振动及声辐射特性[J]. 中国舰船研究, 2013, 8(6): 75-80.
QIU Chang-lin, CHEN Zhi-gang, DENG Yi, et al. The characteristics of vibration and sound radiation of underwater perforated plates [J]. Chinese Journal of Ship Research, 2013, 8(6): 75-80.
- [3] 张媛, 傅成, 孟春玲. 开孔对薄板振动频率影响的有限元分析[J]. 机械设计与制造, 2005(7): 127-128.

ZHANG Yuan, FU Cheng, MENG Chunling. Finite element analysis on the effect of cut-out to the natural frequencies of thin plate[J]. Machinery Design and Manufacture, 2005(7): 127-128.

- [4] Chang C N, Chiang F K. Vibration analysis of a thick plate with an interior cut-out by a finite element method [J]. Journal of Sound and Vibration, 1988, 125(3): 477-486.
- [5] LI W L. Free vibrations of beams with general boundary conditions [J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 237(4): 709-725.
- [6] Qu Y G, Chen Y, Long X H, et al. Free and forced vibration analysis of uniform and stepped circular cylindrical shells using a domain decomposition method[J]. Applied Acoustics, 2013, 74(3): 425-439.
- [7] 李海超, 庞福振, 张航, 等. 阶梯厚度圆柱壳自由振动特性分析[J]. 振动工程学报, 2020, 33(6): 1226-1233.
Li Hai-chao, Pang Fu-zhen, Zhang Hang, et al. Free vibration analysis of stepped cylindrical shells[J]. Journal of Vibration Engineering, 2020, 33(6): 1226-1233.
- [8] 李海超, 庞福振, 李玉慧, 等. 复杂边界条件圆柱壳自由振动特性分析[J]. 振动工程学报, 2020, 33(1): 56-63.
Li Hai-chao, Pang Fu-zhen, Li Yu-hui, et al. Free vibration characteristics analysis of circular cylindrical shell under complex boundary conditions[J]. Journal of Vibration Engineering, 2020, 33(1): 56-63.
- [9] Lam K Y, Hung K C, Chow S T. Vibration analysis of plates with cutouts by the modified Rayleigh-Ritz method[J]. Applied Acoustics, 1989, 28(1): 49-60.
- [10] Huang C S, Leissa A W, Liao S C. Vibration analysis of rectangular plates with edge V-notches[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2008, 50(8): 1255-1262.
- [11] Larrondo H A, Avalos D R, Laura P A A, et al. Vibrations of simply supported rectangular plates with varying thickness and same aspect ratio cutouts[J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 244(4): 738-745.

- [12] 张俊,李天匀,朱翔.多开口矩形板自由振动特性分析[J].振动与冲击,2020,39(14):142-147.
Zhang Jun, Li Tian-yun, Zhu Xiang. Free vibration characteristics analysis on a rectangular plate with multiple cutouts[J]. Journal of Vibration and Shock, 2020, 39(14): 142-147.
- [13] 邱永康,李天匀,朱翔,等.任意边界条件下中心开口矩形板自由振动特性分析[J].振动与冲击,2017,36(20):112-117.
Qiu Yong-kang, Li Tian-yun, Zhu Xiang, et al. The free vibration characteristics analysis of rectangular plate with central opening using in arbitrary boundary conditions[J]. Journal of Vibration and Shock, 2017, 36(20): 112-117.
- [14] Kim K, Kim B H, Choi T M, et al. Free vibration analysis of rectangular plate with arbitrary edge constraints using characteristic orthogonal polynomials in assumed mode method[J]. International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering, 2012, 4(3): 267-280.
- [15] 陆斌,陈跃华,冯志敏,等.基于 Chebyshev-变分法的复杂开口形状矩形薄板弯曲振动特性分析[J].振动与冲击,2020,39(2):178-187
Lu Bin, Chen Yuehua, Feng Zhimin, et al. Bending vibration characteristics analysis of a rectangular plate with complex-opening using Chebyshev-variational method[J]. Journal of Vibration and Shock, 2020, 39(2): 178-187.
- [16] Jin G, Ye T, Wang X, et al. A unified solution for the vibration analysis of FGM doubly-curved shells of revolution with arbitrary boundary conditions[J]. Composites Part B: Engineering, 2016, 89:230-252.
- [17] Ye T, Jin G, Chen Y, et al. Free vibration analysis of laminated composite shallow shells with general elastic boundaries[J]. Composite Structures, 2013, 106: 470-490.
- [18] Deng J, Zheng L, Zeng P, et al. Passive constrained viscoelastic layers to improve the efficiency of truncated acoustic black holes in beams[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2018, 118: 461-476.
- [19] Deng J, Zheng L, Guasch O, et al. Gaussian expansion for the vibration analysis of plates with multiple acoustic black holes indentations [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 131:317-334.

Flexural vibration analysis of rectangular Mindlin plate with combined openings using Gaussian expansion method

YANG Zhou¹, FENG Qing-song¹, DENG Jie², ZHANG Ling¹, GUO Wen-jie¹

(1.State Key Laboratory of Performance Monitoring and Protecting of Rail Transit Infrastructure, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China; 2. Key Laboratory of Ocean Acoustic and Sensing, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China)

Abstract: Gaussian expansion method is introduced into the study of flexural vibration of rectangular plates with combined openings based on the Mindlin plate theory. The localization characteristic of the Gaussian wavelet function can accurately capture the characteristics of the local opening and improve the computational efficiency by selecting the Gaussian wavelet function as the displacement shape function. The expansion factor and shift factor of the Gaussian function are defined, and the basis functions used to fit the displacement field of the plate with opening are generated by a series of expansion and shift transformations. The larger the expansion factor is, the higher the resolution of the shape function will be. It can accurately simulate higher-frequency vibration field. The Lagrangian energy functional of the plate with opening is established by taking the energy method as the basic framework. The artificial spring model is introduced into simulate various boundary conditions, and the influence of boundary conditions on vibration of plates is transformed into the influence of increased elastic potential energy on stiffness matrix. The accuracy and applicability of the method is verified by comparing the results of the research example with that of the finite element software, which provides a reference for practical engineering problems.

Key words: flexural vibration; rectangular plate with combined opening; Mindlin plate theory; Gaussian expansion method; energy method

作者简介: 杨舟(1994—),男,博士研究生。电话: 18702594012; E-mail: 693622619@qq.com。

通讯作者: 冯青松(1978—),男,教授、博士生导师。电话: 13517091075; E-mail: fqshdjtdx@aliyun.com。