拉杆转子-轴承-密封系统接触刚度矩阵建立及 动力学特性分析

武祥林, 焦映厚, 陈照波

(哈尔滨工业大学机电工程学院机械设计及理论系,黑龙江哈尔滨150001)

摘要:周向拉杆转子结构在燃气轮机中非常常见,而转子结构中普遍存在的拉杆及接触层对转子-轴承-密封系统的 动力学特性具有非常重要的影响。在本研究中,建立了周向分布拉杆的力学模型和表征轮盘之间接触效应的非线 性接触刚度矩阵,该接触刚度矩阵由七个刚度系数组成,这七个刚度系数可以综合表征接触层横向刚度,剪切刚度, 弯曲刚度,扭转刚度,并且该矩阵能够考虑转子变形对于刚度系数的影响。结合基于短轴承理论并且经过试验验证 的非线性油膜力模型和 Muszynska 密封力模型建立了周向拉杆转子-轴承-密封系统的动力学模型。采用了 Newmark-β法对动力学方程进行了求解,并采用三维频谱图分析了预紧力大小和预紧力不均对周向拉杆转子-轴承-密封系统的非线性动力学特性的影响规律。结果表明,接触刚度以及故障拉杆的相对位置对拉杆转子-轴承-密封系统的稳定性及频率成分影响明显。

关键词:周向拉杆转子;非线性接触刚度矩阵;预紧力;转子-轴承-密封系统;动力学特性 中图分类号:O347.6;O322; 文献标志码:A 文章编号:1004-4523(2022)06-1311-10 DOI:10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2022.06.002

1 概 述

拉杆转子是一种很常见的转子结构形式,它 具有启动快(重量轻),刚性好,以及加工制造方 便的优点。经过多年的发展,重型燃气轮机拉杆 转子的结构形式已经基本成熟。拉杆转子与传 统转子在结构上具有很大的不同,主要表现在转 子并非具有传统连续转子的结构形式,而是由一 系列轮盘通过拉杆提供的预紧力串联连接组成, 轮盘之间存在一些接触平面,如图1所示。实践 证明,转子的拉杆以及轮盘间的接触刚度都会对 拉杆转子的动力学特性产生重要影响。而由于 拉杆及轮盘接触所引起的一些故障也得到了较 多研究。

王荻等印报导了由于燃气轮机的启停频繁使转



图 1 拉杆转子结构示意图 Fig. 1 Schematic diagram of rod-fastening rotor structure

子承受着热应力的循环变化,引起了拉杆的预紧力 分布不均,进而导致了燃机转子的振动出现了不稳 定的现象。张旋洲^[2]报导了由于转子热变形导致的 轮盘端面接触不良引起的转子运行初期振动较强的 现象。

从这些工程中出现的拉杆转子的故障可以看 出,拉杆预紧力以及轮盘端面接触对于转子的动力 学特性具有重要影响。因此对于拉杆转子动力学特 性的研究具有重要意义。很多学者对含有接触端面 的拉杆转子的动力学特性进行了研究工作。

文献[3-4]完善了接触刚度的理论计算方法, 并针对周向拉杆转子建立了一种力学模型。计算 得到了拉杆转子的固有频率,并与实验测试结果 进行了对比,理论计算与实测结果吻合很好。文 献[5-7]计算得到了接触界面等效弯曲刚度,但是 弯曲刚度并不能表现出接触的全部特点。Hariri 等^[8]和 Nelias 等^[9]研究了粗糙表面的接触效应,他 们的研究表明接触效应能够明显地减小接触部分 的刚度。Isa 等^[10]应用一个分段线性刚度模型来 表征拉杆 Jeffcott转子接触端面在分离前和分离后 的等效弯曲刚度。Zhang 等^[11]设计了一个试验用 周向拉杆转子,研究表明拉杆转子固有频率随预 紧力的增加而提高,逐渐接近整体转子,轮盘表面

收稿日期: 2021-03-09;修订日期: 2021-06-11

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11672083);国家科技重大专项资助项目(2017-IV-0011-0047)。

越光滑,拉杆转子的固有频率越高。Meng等^[12]提 出了一种考虑轮盘端面齿接触效应的改进Riccati 传递矩阵法,计算得到了等效刚度修正系数,建立 了两端轴承支撑的中心拉杆转子动力学模型,计 算得到了拉杆转子横向振动的临界转速、振型、不 平衡响应等动力学特性。Klmopas^[13]和Liu等^[14] 的研究都表明预紧力不均会在转子中产生一个附 加力矩激励,使转子产生类似初始弯曲的振动 特性。

对于转子本身研究的工作虽然重要,但是还不 充足,研究考虑油膜力和密封激振力在内的转子系 统的动力学行为对于指导工程实际更有意义。

很多学者^[15-18]应用 Capone 非线性油膜力模型对转子轴承系统的动力学特性进行了分析。目前最著名的密封力模型就是 Muszynska^[19-20]密封力模型,该模型以一系列实验为基础,具有较高的准确性。以Muszynska模型为基础,一些学者^[21-22]研究了密封对转子动力学特性的影响规律。

本文首先提出一个由七个刚度系数组成的非 线性刚度矩阵来表征接触界面。在非线性接触刚 度矩阵中考虑了转子变形对刚度系数的影响以及 由于接触界面部分分离而引起的接触刚度降低。 然后,建立了周向拉杆转子-轴承-密封系统的动力 学模型,并使用频谱图分析了其非线性动力学 特性。

2 周向拉杆转子-轴承-密封系统 动力学模型的建立

周向拉杆转子的结构示意图如图2所示。该拉 杆转子由四个轮盘和多个轴段组成,其中四个轮盘 通过12根拉杆(如图3(a)所示)提供的预紧力连在 一起,每两个轮盘之间连接部分为接触端面,是一个 圆形平面。转子的两端由两个滑动轴承支撑。当采 用有限元法对该拉杆转子进行建模时,需要对拉杆、 接触层、轮盘以及转子轴段分别进行建模。下面介 绍各个部分的建模过程。



Fig. 2 Schematic diagram of circumferential rod-fastening rotor structure

2.1 对周向拉杆的建模

沿周向均匀分布的拉杆如图 3(a)所示。由于 拉杆较细、质量较轻,所以在对拉杆进行动力学建模 的时候忽略了拉杆的质量以及结构阻尼,只考虑拉 杆的刚度,将拉杆等效为一个沿轴向伸缩变形的 弹簧^[14]。



(b) 拉杆变形(b) Deformation of rod-fastening图 3 拉杆变形以及位置分布示意图



如图 3(b)所示,将拉杆两端所在轮盘 a 和轮盘 d 端面的转角位移表示为(α_a β_a α_d β_d)^T,得到拉 杆所提供的轴向力可以表示为:

$$F_{ax} = F_{pre} + \frac{E_r A_d r}{L_0} \bullet$$
$$\sum_{i=1}^n \left[\left(\beta_d - \beta_a \right) \cos \theta_i - \left(\alpha_d - \alpha_a \right) \sin \theta_i \right] \quad (1)$$

式中 $F_{pre} = \sum_{i=1}^{n} F_{0}^{i}$ 表示总初始预紧力; F_{0}^{i} 表示每个 拉杆的初始预紧力。 E_{r} 表示拉杆的弹性模量; A_{d} 表 示拉杆的横截面积; L_{0} 表示拉杆的初始长度;r表示 拉杆所在圆环的半径; θ_{i} 表示第i个拉杆所在的相位 角(如图 3(a)所示);n表示拉杆的总数量。

拉杆所引入的刚度矩阵以及广义力矩可以分别 表示为:

$$\boldsymbol{K}_{\text{rod}} = \begin{bmatrix} K_1^r & -K_2^r & -K_1^r & K_2^r \\ -K_2^r & K_3^r & K_2^r & -K_3^r \\ -K_1^r & K_2^r & K_1^r & -K_2^r \\ K_2^r & -K_3^r & -K_2^r & K_3^r \end{bmatrix}, \boldsymbol{f}_{\text{rod}} = \begin{bmatrix} -M_1^r \\ M_2^r \\ M_1^r \\ -M_2^r \end{bmatrix}$$

其中

$$M_{1}^{r} = r \sum_{i=1}^{n} F_{0}^{i} \sin\left(\theta_{i} + \Omega t\right),$$

$$M_{2}^{r} = r \sum_{i=1}^{n} F_{0}^{i} \cos\left(\theta_{i} + \Omega t\right),$$

$$K_{1}^{r} = \frac{E_{r}A_{d}}{L_{0}} r^{2} \sum_{i=1}^{n} \sin^{2}\theta_{i}, K_{2}^{r} = \frac{E_{r}A_{d}}{L_{0}} r^{2} \sum_{i=1}^{n} \sin\theta_{i} \cos\theta_{i},$$

$$K_{3}^{r} = \frac{E_{r}A_{d}}{L_{0}} r^{2} \sum_{i=1}^{n} \cos^{2}\theta_{i} \qquad (3)$$

式中 Ω表示转子的转速。

2.2 对接触层的建模

Greenwood 等^[23]曾经引入了GW模型研究含有 高斯分布的微凸体的粗糙平面与水平刚性平面的接 触,由该模型可以得到单位面积接触平面的压力、垂 直接触刚度、剪切刚度为:

$$p = \frac{4}{3} D_{s} E' R_{s}^{\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{3}{2}} \int_{h}^{\infty} (s-h)^{\frac{3}{2}} \phi(s) ds,$$

$$k_{n} = 2D_{s} E' R_{s}^{\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{1}{2}} \int_{h}^{\infty} (s-h)^{\frac{1}{2}} \phi(s) ds,$$

$$k_{r} = \frac{2(1-\nu)}{2-\nu} k_{n} \qquad (4)$$

式中 p为接触面垂直压强; k_n 为单位面积上的垂直 接触刚度; k_r 为单位面积上的切向刚度; D_s 为单位名 义接触面积上微凸体的个数; R_s 为微凸体的曲率半 径; σ 为粗糙表面高度的标准差;s表示粗糙平面标 准化微凸体高度;E'为等效杨氏模量, $E' = [(1 - \nu_1^2)/E_1 + (1 - \nu_2^2)/E_2]^{-1}$,其中, ν 表示泊松比,下标1 和2针对的是形成接触对的粗糙表面1和2;h为标 准化接触间隙, $h = d_0/\sigma$,其中, d_0 为两个接触面的 平均接触间隙,即接触层的初始厚度; $\phi(s)$ 为标准 化峰值高度分布函数, $\phi(s) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-s^2/2}$ 。

公式(4)表明单位面积的垂直接触刚度是接触 压强的隐函数,他们的关系可以通过数值方法 求得。

研究一个具有圆形接触端面(如图4所示)的接触层,该接触层的初始厚度为d₀,并且该接触层可以 分为接触区域和分离区域两部分,两部分的边界为 一条直线,叫做分离线,如图4和5所示。

为了计算接触层的接触刚度,需要先建立三 个坐标系,如图4所示。第一个坐标系为*x*y*z**, 该坐标系的*x**轴平行于分离线,*y**轴的正向指向 接触区域压强增加的方向,*z**轴垂直于变形前的 接触面。第二个坐标系为全局坐标系*xyz*,该全局 坐标系由坐标系*x*y*z**绕*z**轴旋转角度β得到。 如果将全局坐标系*xyz*先沿着*x*轴平移位移*x*,再







图5 接触层微观变形示意图

Fig. 5 Schematic diagram of microscopic deformation of contact layer

沿 y 轴 平 移 位 移 \bar{y} 就 可 以 得 到 第 三 个 坐 标 系 x'y'z',其中 (\bar{x}, \bar{y}) 是接触区域在坐标平面 xoy 中 的形心。

首先,假设接触平面上的压强p为坐标x和y的 线性函数^[6]:

$$p(x, y) = ax + by + c \tag{5}$$

式中 a,b和c为待定系数。

轴向压力 P,接触层两端弯矩 M 可以在坐标 系 xyz 中表示为:

$$P = \iint_{A} p(x, y) dA = aS_{y} + bS_{x} + cA,$$

$$M_{x} = \iint_{A} p(x, y) y dA = aI_{xy} + bI_{x} + cS_{x},$$

$$M_{y} = \iint_{A} p(x, y) x dA = aI_{y} + bI_{xy} + cS_{y} \quad (6)$$

式中 A为名义接触面积; S_y 为接触面对x轴的静矩; S_x 为接触面对y轴的静矩; I_x 为接触面对y轴的 惯性矩; I_y 为接触面对x轴的惯性矩; I_{xy} 为接触面的 惯性积。它们的取值可以表示为:

$$A = A^*, \quad S_y = S_y^* \cos \beta - S_x^* \sin \beta,$$

$$S_x = S_y^* \sin \beta + S_x^* \cos \beta,$$

$$I = I^* \cos^2 \beta + I^* \sin^2 \beta - I^* \sin 2\beta.$$

$$I_{x} = I_{y}^{*} \sin^{2} \beta + I_{x}^{*} \cos^{2} \beta + I_{xy}^{*} \sin 2\beta,$$

$$I_{xy} = \frac{I_{y}^{*} - I_{x}^{*}}{2} \sin \beta + I_{xy}^{*} \cos 2\beta$$
(7)

式中 S_y^* 表示接触端面对 x^* 轴的静矩; S_x^* 为接触端面对 y^* 轴的静矩; I_y^* 为接触端面对 x^* 轴的惯性 矩; I_x^* 为接触端面对 y^* 轴的惯性矩; I_{xy}^* 为接触端面 的惯性积。它们的值可以通过如下公式求得:

$$S_{y}^{*} = \iint_{A^{*}} x dA^{*} = 0,$$

$$S_{x}^{*} = \iint_{A^{*}} y dA^{*} = 2R^{3} \int_{\tau_{0}}^{1} \tau (1 - \tau^{2})^{\frac{1}{2}} d\tau,$$

$$I_{y}^{*} = \iint_{A^{*}} x^{2} dA^{*} = \frac{2}{3} R^{4} \int_{\tau_{0}}^{1} (1 - \tau^{2})^{\frac{3}{2}} d\tau,$$

$$I_{x}^{*} = \iint_{A^{*}} y^{2} dA^{*} = 2R^{4} \int_{\tau_{0}}^{1} \tau^{2} (1 - \tau^{2})^{\frac{1}{2}} d\tau,$$

$$I_{xy}^{*} = \iint_{A^{*}} xy dA^{*} = 0, A^{*} = \iint_{A^{*}} dA^{*} = 2R^{2} \int_{\tau_{0}}^{1} (1 - \tau^{2})^{\frac{1}{2}} d\tau$$
(8)

其中,上述公式中的 $\tau = y/R, \tau_0$ 为:

$$\tau_{0} = \begin{cases} -1, \tau_{1} \ge 1 \\ -\tau_{1}, -1 < \tau_{1} < 1 \\ 1, \tau_{1} \le -1 \end{cases}$$
(9)

式中 $\tau_1 = c/(R\sqrt{a^2 + b^2}), |\tau_1|$ 的物理意义是分离 线距离接触端面圆心的无量纲距离。

 τ_1 是判断接触层接触状态的重要参数,当分 离线距离接触端面圆心的无量纲距离大于1,且接 触端面处于分离区域一侧时,有 $\tau_1 \le -1$,此时接 触层两接触面处于完全分离的状态,这种状态只 是一种极限情况,它表示本来接触的两轮盘已经 完全脱离,这种状态在实际情况中并不会发生;当 分离线距离接触端面圆心的无量纲距离大于1,且 接触端面处于接触区域一侧时,有 $\tau_1 \ge 1$,此时接 触层处于完全接触状态,当 $-1 < \tau_1 < 1$ 时,表示 分离线距离接触端面圆心的无量纲距离小于1,接 触层处于部分接触状态,这种状况经常发生在当 转子预紧力不足或者预紧力不均匀的情况下。上 述参数求出之后,就可以求出a,b和c:

 $a = \frac{D_1}{D}, b = \frac{D_2}{D}, c = \frac{D_3}{D}$ (10)

其中:

$$D = \begin{vmatrix} S_{y} & S_{x} & A \\ I_{xy} & I_{x} & S_{x} \\ I_{y} & I_{xy} & S_{y} \end{vmatrix}, D_{1} = \begin{vmatrix} P & S_{x} & A \\ M_{x} & I_{x} & S_{x} \\ M_{y} & I_{xy} & S_{y} \end{vmatrix},$$
$$D_{2} = \begin{vmatrix} S_{y} & P & A \\ I_{xy} & M_{x} & S_{x} \\ I_{y} & M_{y} & S_{y} \end{vmatrix}, D_{3} = \begin{vmatrix} S_{y} & S_{x} & P \\ I_{xy} & I_{x} & M_{x} \\ I_{y} & I_{xy} & M_{y} \end{vmatrix} \circ$$

并且接触面的压力*P*以及弯矩*M*_x和*M*_y可以通过 拉杆两端所在的轮盘端面的转角位移的差值和接触层 两端面的转角位移的差值表示出来,如下式所示:

$$P = F_{ax} = F_{pre} + \frac{E_r A_d r}{L_0} \cdot$$

$$\sum_{i=1}^n \left[\left(\beta_d - \beta_a \right) \cos \theta_i - \left(\alpha_d - \alpha_a \right) \sin \theta_i \right],$$

$$M_x = r \sum_{i=1}^n F_0^i \cdot \sin \left(\theta_i + \Omega t \right) + E_{eq} I_x \frac{\alpha^j - \alpha^{j+1}}{d_0} +$$

$$\frac{E_r A_d r^2}{L_0} \sum_{i=1}^n \left[\left(\beta^{j+1} - \beta^j \right) \sin \theta_i \cos \theta_i - \left(\alpha^{j+1} - \alpha^j \right) \sin^2 \theta_i \right],$$

$$M_y = r \sum_{i=1}^n F_0^i \cdot \cos \left(\theta_i + \Omega t \right) + E_{eq} I_y \frac{\beta^{j+1} - \beta^j}{d_0} +$$

$$\frac{E_r A_d r^2}{L_0} \left[\left(\beta^{j+1} - \beta^j \right) \cos^2 \theta_i - \left(\alpha^{j+1} - \alpha^j \right) \sin \theta_i \cos \theta_i \right]$$
(11)

式中 E_{eq} 为接触层等效的弹性模量; $\alpha^{i} - \alpha^{j+1}$ 表示接触层两个端面绕x轴的转角位移的差值; $\beta^{j+1} - \beta^{j}$ 表示接触层两个端面绕y轴的转角位 移的差值(如图5所示);j和j + 1表示接触层两 端的节点编号。

由公式(6)和(11)可以看出,接触端面上一点的 压强不仅与该点所在的位置有关,还由接触层两个 接触端面的转角位移差以及拉杆提供的预紧力决 定。而接触端面上一点的压强又决定该点的垂直接 触刚度以及切向刚度。因此,通过上述关系就可以 建立接触刚度与接触层两端面位移之间的联系。

可以在坐标系 x'y'z' 中得到接触端面上一点的 压强 p(x', y') 与该点的垂直接触刚度 k_a 的关系:

$$k_n(x',y') = f\left(p(x',y')\right) \tag{12}$$

剪切刚度与垂直接触刚度的关系如式(4)所示。 已知单位面积上的垂直接触刚度以及剪切刚度 后,可以求出接触刚度所引入的弹性势能,对于一个 微元接触平面,弹性势能可以表示为:

$$\Delta U = \frac{1}{2} k_n (z^{j+1} - z^j)_{x,y}^2 + \frac{1}{2} k_r (x^{j+1} - x^j)^2 + \frac{1}{2} k_r (y^{j+1} - y^j)^2$$
(13)

将式(14)向坐标系*x'y'z*'进行坐标变换,并在整 个接触平面上进行积分:

$$U = \iint_{A'} \Delta U \mathrm{d}A' = \frac{1}{2} q_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}} K_{\mathrm{c}} q_{\mathrm{c}} \qquad (14)$$

式中 $q_{\epsilon} = (x^{i}, y^{i}, \alpha^{i}, \beta^{i}, \gamma^{j}, x^{i+1}, y^{i+1}, \alpha^{i+1}, \beta^{i+1}, \gamma^{j+1})^{\text{T}}$ 为接触层两接触端面节点的位移向量; $x^{i,j+1}, y^{i,j+1}$ 表示的是全局坐标系中两接触端面节点在转子x, y轴 方向的位移, $\alpha^{i,j+1}, \beta^{i,j+1}, \gamma^{i,j+1}$ 表示的是两接触端面分 别绕全局坐标系x, y, z轴的转角;A'表示的是坐标 系x'y'z'中的面积微元; K_{ϵ} 为接触刚度矩阵,该矩阵 中的元素可以表示为:

$$\boldsymbol{K}_{c} = \begin{bmatrix} K_{1} & 0 & 0 & 0 & K_{6} & -K_{1} & 0 & 0 & 0 & -K_{6} \\ 0 & K_{1} & 0 & 0 & -K_{7} & 0 & -K_{1} & 0 & 0 & K_{7} \\ 0 & 0 & K_{3} & -K_{5} & 0 & 0 & 0 & -K_{3} & K_{5} & 0 \\ 0 & 0 & -K_{5} & K_{4} & 0 & 0 & 0 & K_{5} & -K_{4} & 0 \\ K_{6} & -K_{7} & 0 & 0 & K_{2} & -K_{6} & K_{7} & 0 & 0 & -K_{2} \\ -K_{1} & 0 & 0 & 0 & -K_{6} & K_{1} & 0 & 0 & 0 & K_{6} \\ 0 & -K_{1} & 0 & 0 & K_{7} & 0 & K_{1} & 0 & 0 & -K_{7} \\ 0 & 0 & -K_{3} & K_{5} & 0 & 0 & 0 & K_{3} & -K_{5} & 0 \\ 0 & 0 & K_{5} & -K_{4} & 0 & 0 & 0 & -K_{5} & K_{4} & 0 \\ -K_{6} & K_{7} & 0 & 0 & -K_{2} & K_{6} & -K_{7} & 0 & 0 & K_{2} \end{bmatrix}$$

$$(15)$$

其中:

$$K_{1} = \iint_{A'} k_{\tau} dA', K_{2} = \iint_{A'} k_{\tau} (x'^{2} + y'^{2}) dA',$$

$$K_{3} = \iint_{A'} k_{\pi} y'^{2} dA', K_{4} = \iint_{A'} k_{\pi} x'^{2} dA',$$

$$K_{5} = \iint_{A'} k_{\pi} x' y' dA', K_{6} = \iint_{A'} k_{\tau} y' dA',$$

$$K_{7} = \iint_{A'} k_{\tau} x' dA' \qquad (16)$$

在此需要说明,用上述方法所建立的接触刚度 矩阵为非线性接触刚度矩阵,该刚度矩阵可以考虑 接触层微变形所引起的刚度系数的变化,也可以考 虑拉杆轴向力的变化而引起的刚度系数的变化,如 果忽略上述两个因素,该接触刚度矩阵可以退化为 线性接触刚度矩阵。

2.3 转子-轴承-密封系统动力学模型的建立

除了上述建模,采用刚性轮盘以及每个节点具 有五个自由度的Timoshenko梁模型^[24]对拉杆转子 的轮盘和轴段进行建模,同时考虑上述所建立的拉 杆动力学模型、非线性接触刚度矩阵、非线性油膜力 模型和密封力模型,最后拉杆转子-轴承-密封系统 的动力学模型可以表示为:

其中:

$$M = M^{\mathrm{s}} + M^{\mathrm{d}}, G = G^{\mathrm{s}} + G^{\mathrm{d}} + C^{\mathrm{s}},$$

 $K = K^{\mathrm{s}} + K_{\mathrm{rod}} + K_{\mathrm{c}}, Q = Q^{\mathrm{d}},$
 $f = f_{\mathrm{rod}} + f_{\mathrm{oil}} + f_{\mathrm{seal o}}$

 $M\ddot{x} + G\dot{x} + Kx = Q + f$

(17)

式中 $M, G \cap K \mathcal{G} \cap M$, $G \cap K \cap M$, $G \cap K \cap M$, $G \cap$

质量矩阵和陀螺仪矩阵的组装与传统方法相同,但是刚度矩阵的组装在这里有所不同,因为接触 层和拉杆引入的刚度矩阵将在组装后改变刚度矩阵 的结构。刚度矩阵的组装规则如图6所示。

需要说明的是,在陀螺矩阵中考虑了转子的结



Fig. 6 Schematic diagram of the assembly rules of the stiffness matrix

构阻尼,而在工程实际中,结构的阻尼通常假设为瑞利阻尼,也就是说阻尼矩阵可以表示为质量矩阵和 刚度矩阵的线性组合,这种能量耗散的模拟方法在 数值分析中具有很大的优势,能够满足一般结构动 力分析的需求。在本文中,采用瑞利阻尼表示转子 的结构阻尼,该阻尼可以通过如下公式表示:

$$C^{s} = \alpha^{s} M + \beta^{s} K \qquad (18)$$

$$\alpha^{s} = \frac{60(\omega_{n2}\xi_{1} - \omega_{n1}\xi_{2})\omega_{n1}\omega_{n2}}{\pi(\omega_{n2}^{2} - \omega_{n1}^{2})},$$

$$\beta^{s} = \frac{\pi(\omega_{n2}\xi_{2} - \omega_{n1}\xi_{1})}{15(\omega_{n2}^{2} - \omega_{n1}^{2})} \qquad (19)$$

式中 ω_{n1} 和 ω_{n2} 分别为第一阶和第二阶固有频率, 单位为r/min; ξ_1 和 ξ_2 分别为第一阶和第二阶模态阻 尼比。在本研究中,取 ξ_1 =0.02和 ξ_2 =0.04。

除此之外, f_{oit}表示的是油膜力向量, 在这里采 用了一种基于短轴承理论的非线性油膜力模型^[20], 该模型已经通过实验验证具有良好的精度, 并且该 模型也具有较高的计算效率:

$$\begin{cases} F_x^b(x_b, y_b, \dot{x}_b, \dot{y}_b) = \sigma f_x^b(x_b, y_b, \dot{x}_b, \dot{y}_b) \\ F_y^b(x_b, y_b, \dot{x}_b, \dot{y}_b) = \sigma f_y^b(x_b, y_b, \dot{x}_b, \dot{y}_b) \end{cases} (20) \\ \sigma = \mu_b \Omega R_b L_b \left(\frac{R_b}{h_b}\right)^2 \left(\frac{L_b}{2R_b}\right)^2 \qquad (21)$$

式中 μ_b 表示润滑油黏度; R_b , L_b 和 h_b 分别表示轴承 半径、轴承宽度和径向间隙。在本研究中上述参数 取值为: $\mu_b = 0.04 \text{ Pa•s}, R_b = 0.04 \text{ m}, L_b = 0.04 \text{ m},$ $h_b = 2 \times 10^{-3} \text{ m}_{\circ}$ 无量纲油膜力 f_x^b, f_y^b 表示如下: $\begin{cases} f_x^b(x_b, y_b, \dot{x}_b, \dot{y}_b) = -A(3x_bV - G\sin\alpha - 2S\cos\alpha) \\ f_y^b(x_b, y_b, \dot{x}_b, \dot{y}_b) = -A(3y_bV + G\cos\alpha - 2S\sin\alpha) \end{cases}$ (22)

上述公式中的函数A,V,S,G,和 a 在文献[22] 中有详细描述,这里不再赘述。另外,f_{seal}表示密封 激励力向量。在这里采用Muszynska模型来描述非 线性密封力,它不仅反映了密封力的非线性特征,而 且明确描述了密封力的物理含义。

$$\begin{bmatrix} F_x^s \\ F_y^s \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} K_f - m_f \tau_f^2 \omega^2 & \tau_f \omega D_f \\ -\tau_f \omega D_f & K_f - m_f \tau_f^2 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D_f & 2\tau_f m_f \omega \\ -2\tau_f m_f \omega & D_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_f & 0 \\ 0 & m_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}$$
(23)

式中 $K_f, m_f, D_f \pi \tau_f$ 分别表示当量刚度、当量质量、 当量阻尼和流体周向速度比。这些参数都是转子位 移的非线性函数,即:

$$K_f = K_0 (1 - e^2)^{-n}, D_f = D_0 (1 - e^2)^{-n}, n = \frac{1}{2} \sim 8;$$

 $\tau = \tau_0 (1 - e^2)^b, \quad 0 < b < 1; m_f = \mu_2 \mu_3 T_f^2$ (24)
式中 $e = \sqrt{x^2 + y^2} / Cr$ 为转子相对偏心位移,其
中, Cr为密封间隙; n, b和 τ_0 均为与迷宫密封结构相
关的经验系数, 一般 $\tau_0 < 1/2$ 。 K_f, D_f 以及 m_f 可以用
Childs提出的动力学计算公式计算得出:

$$K_f = \mu_3 \mu_0, \quad D_f = \mu_1 \mu_3 T_f$$
 (25)

其中:

$$\mu_{0} = \frac{2\sigma_{f}^{2}E_{f}(1-m_{0})}{1+\xi+2\sigma_{f}}, \ \mu_{1} = \frac{2\sigma_{f}E_{f}+\sigma_{f}^{2}B(\frac{1}{6}+E_{f})}{1+\xi+2\sigma_{f}}, \ \mu_{2} = \frac{\sigma_{f}(\frac{1}{6}+E_{f})}{1+\xi+2\sigma_{f}}, \ \mu_{3} = \frac{\pi R_{f}\Delta P}{\lambda}, \ \lambda = n_{0}R_{a}^{m_{0}} \left[1+\left(\frac{R_{v}}{2R_{a}}\right)^{2}\right]^{\frac{1+m_{0}}{2}}, \ R_{v} = \frac{\omega R_{f}Cr}{v}, \ R_{a} = \frac{2vCr}{v}, \ B = 2 - \frac{\left(\frac{R_{v}}{R_{a}}\right)^{2} - m_{0}}{\left(\frac{R_{v}}{R_{a}}\right)^{2} + 1}, \ E_{f} = \frac{1+\xi}{2(1+\xi+2\sigma_{f})^{\circ}}$$

式中 σ_f 为摩擦损失梯度系数; ξ 为密封介质周向进 口损失系数; l_f 为密封腔体宽度;v为当量轴向速度; R_f 为密封半径; ΔP 为气体通过密封后的当量压降; $m_0 \pi n_0$ 为Hirs湍流方程的系数; $R_a \pi R_v$ 分别为轴 向和周向 Reynolds数;v为气体动态黏度系数。上 述密封参数分别取值为: $Cr = 1 \times 10^{-3} \text{ m}, \xi = 0.1,$ $l_f = 0.04 \text{ m}, v = 10, R_f = 8.1 \times 10^{-3} \text{ m}, \Delta P = 1 \times 10^{6} \text{ Pa}, m_0 = 0.25, n_0 = 0.079, v = 1.5 \times 10^{-5}.$

为了求解方便,引入了无量纲因子∂,将动力学 方程进行无量纲处理:

$$X = \frac{x}{\delta}, \ \tau = \Omega t$$
 (26)

将上述公式代入到动力学方程中,得到无量纲 化的动力学方程为:

$$M\Omega^2 \frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}\tau^2} + G\Omega \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\tau} + KX = \frac{Q+f}{\delta} \quad (27)$$

公式(27)可以通过数值方法求解。本文采用 Newmark-β积分方法求解是因为它是一种在时域内求 解非线性方程的鲁棒算法。这里在求解动力学方程 (28)的每个子步骤中都需要判断接触层的接触状态, 然后根据判断出的接触状态,决定使用相应的策略计 算接触刚度矩阵K。。当完成所有计算步骤或接触层完 全分离时,终止计算过程,计算流程如图7所示。

3 计算结果及分析

在前面的研究中,首先对周向拉杆转子的拉杆以



Fig. 7 Schematic diagram of the calculation process

及接触端面进行了建模,在此基础上继续建立拉杆转 子-轴承-密封系统的动力学模型,并分析一些结构参数 对该系统动力学特性的影响规律。除了上述已经给出 的密封和轴承参数外,其余结构参数如表1所示。

表1 拉杆转子结构参数 Tab.1 Structure parameters of the rod-fastening rotor

类型	参数名称	值
拉杆	拉杆数n	12
	拉杆原始长度L ₀ /m	0.38
	每个拉杆的预紧力F ₀ /N	100~400
	拉杆圆环半径 r/m	0.06
	拉杆直径 $D_{\rm rod}/{\rm m}$	$6 imes 10^{-3}$
接触界面	接触面直径D _c /m	0.08
	微凸体密度 $D_s/(\uparrow \cdot m^{-2})$	$7.15 imes10^8$
	微凸体曲率半径 R _s /m	$1.1785 imes 10^{-5}$
	峰值高度分布标准差 o/m	$1.57 imes 10^{-6}$
转子材料	密度 $\rho/(kg\cdot m^{-3})$	7850
	弹性模量 E/Pa	$2.11 imes 10^{11}$
	泊松比ν	0.3
轴段	轴段直径 d _s /m	0.08
	轴段总长度L _s /m	1.1
轮盘	轮盘直径 D_d/m	0.16
	轮盘厚度 L_d/m	0.04

计算得到预紧力为1.2 kN时,拉杆转子的一阶临界转速为4558.3 r/min,二阶临界转速为10425 r/min;预紧力为4.8 kN时,拉杆转子的一阶临界转速为5050.7 r/min,二阶临界转速为10618 r/min,连续转子的一阶临界转速为5320.8 r/min,二阶临界转速为10678 r/min。

如图 8 所示,将拉杆转子离散为具有 14 个 Timoshenko梁单元、18 个节点、四个刚性轮盘的有限 元模型。周向分布拉杆的两端点分布在节点 5 和 14。在节点(6,7),(9,10)和(12,13)之间形成三个 接触界面。为了进行比较分析,同样建立了具有四



Fig. 8 Finite element model of two kinds of rotor-bearing-seal system

个刚性轮盘的连续转子-轴承-密封系统的有限元模型,该模型具有11个单元和12个节点。除拉杆和接触界面外,该转子与拉杆转子结构相同。两个转子的不平衡力都来自四个轮盘的质量偏心,设定为 $e_a = e_b = e_c = e_d = e = 1 \times 10^{-4} \, m_o$

3.1 预紧力的影响

首先分析了拉杆预紧力对拉杆转子-轴承-密封 系统动力特性的影响规律。提取了连续转子-轴 承-密封系统和具有12根拉杆且预紧力均匀分布的 拉杆转子-轴承-密封系统中左轴承处节点*x*方向的 频谱图,如图9所示,图中X表示无量纲频谱幅值。

在图 9(a),(b)中,总预紧力分别为 1.2 kN 和





4.8 kN。由图 9(a)可以看出,在低速范围内运行时 $(\Omega \leq 6000 \text{ r/min})$,拉杆转子-轴承-密封系统的振动 主要由转子的不平衡量引起的,频谱图中仅存在单 一的工频成分fr。随着转子转速的升高,当转子的 转速为 $\Omega = 6000 \text{ r/min}$ 的时候,0.5倍工频分量、1.5 倍工频分量和2倍工频分量同时出现;当转子转速 为 $\Omega = 12600 \text{ r/min}$ 的时候,0.5倍工频分量消失,并 且在此区间(Ω∈[6000 12600]r/min),0.5倍工频 占主导地位,此时可以知道,系统出现了油膜涡动。 当转子转速 $\Omega \in [6000 8400]$ r/min时,系统同时存 在四种频率成分的。随着转速的继续增加,当转速 Ω ≥ 12600 r/min 时,除了工频外,系统还出现了油 膜失稳频率fw2和气膜失稳频率fw1,以及与它们相关 的组合频率。此时系统的自激频率成分(fw)、系统 工频(f_r)以及他们的组合频率同时存在,且自激频 率成分占主导地位,而组合频率成分表明了油膜力 与密封力的耦合作用。

对比图 9(a)~(c)可以发现,预紧力对拉杆转 子-轴承-密封系统的动力学特性影响很大,同时拉杆 转子与连续转子的动力学特性有很大区别。如图9 (a),(b)所示,随着预紧力由1.2 kN增加到4.8 kN,拉 杆转子-轴承-密封系统中0.5倍工频(0.5fr)出现的转 速下限值由 6000 r/min 降低为 5400 r/min, 并逐渐逼 近连续转子0.5倍工频(0.5fr)出现的转速下限值 4800 r/min;同样随着预紧力的增大,拉杆转子0.5倍 工频消失的转速上限值由 12600 r/min 增大为 15600 r/min,也逐渐逼近连续转子 0.5 倍工频(0.5f,) 消失的转速上限值17700 r/min。除此之外,预紧力的 增加同样改变了组合频率出现与消失的阈值。例如, 随着预紧力的增加,拉杆转子-轴承-密封系统1.5倍工 频(1.5f_r)出现的范围会变大,同样逐渐逼近连续转 子轴承密封系统的频率范围。在 $\Omega \in [0 \quad 30000]$ r/min转速范围内,随着拉杆转子预 紧力的增加,有些组合频率成分已经不在显示的范围 内。例如,随着预紧力的增加,组合频率成分5fm和 5fm2消失在了该范围内。上述现象表明,预紧力会影 响激振频率与组合频率出现与消失的阈值,随着预紧 力的继续增加,拉杆转子-轴承-密封系统的动力学特 性逐渐接近连续转子-轴承-密封系统的动力学特性。

这里还可以发现,连续转子出现油膜涡动(0.5f,) 的转速是低于拉杆转子出现油膜涡动的转速的,而 油膜涡动是引起转子系统失稳的一个重要原因,因 此可以认为,在结构参数相同时,拉杆转子-轴承-密 封系统的稳定性是高于连续转子-轴承-密封系统的。 同样,由于0.5倍工频(0.5f,)消失的转速上限值等于 转子出现自激振荡频率(f_w)的阈值,因此预紧力的增 加提高了转子出现自激振荡频率(fw)的阈值。

3.2 预紧力不均的影响

预紧力不均对拉杆转子-轴承-密封系统的动力 学特性的影响规律如图10所示。将相对位置不同的 两个故障拉杆的预紧力以及其弹性模量设置为0,目 的是为了模拟转子部分拉杆出现断裂导致预紧力出 现不均的情况,同时也研究故障拉杆的相对位置对 转子-轴承-密封系统的动力学特性的影响规律。对 比图10与图9(b),可以发现预紧力不均对于拉杆转 子-轴承-密封系统的动力学特性具有重要影响。

首先预紧力不均会导致系统出现新的频率成分,例如fus和fus4及其组合频率成分,并且故障拉杆





seal system under unevenly distributed preload

的相对位置会对于系统的组合频率成分产生重要影 响。当两故障拉杆的位置相邻时(如图10(c)所 示),自激振荡频率f_{w3}和f_{w4}并不明显,同时系统存 在组合频率成分3fw4,但不存在组合频率成分3fw3; 随着两故障拉杆由邻位(如图10(c)所示)向对位 (如图10(a)所示)变化,自激振荡频率fw3和fw4逐渐 变得明显,组合频率成分3fw3也从无到有,逐步变得 明显。由此可以通过频率成分的变化来判断故障拉 杆的相对位置,这对于拉杆转子-轴承-密封系统的 健康监测以及故障诊断有理论指导意义。除此之 外,接近邻位的故障拉杆更明显地降低了系统的稳 定性,当两故障拉杆处于对位时(如图10(a)所示), 系统在转子转速为 $\Omega = 5700 \text{ r}/\min$ 时出现了涡动频 率f_i;当两故障拉杆接近邻位时(如图10(c)所示), 系统在转子转速为 $\Omega = 3000 \text{ r} / \min$ 时出现了涡动频 率fi。因此可以得出结论,随着两故障拉杆由对位 向邻位变化,系统的稳定性降低。产生这种现象的 原因是,随着两故障拉杆由对位逐渐变为邻位,拉杆 所产生的不平衡弯矩会变大,同时预紧力不均导致 的接触层在两垂直方向上的弯曲刚度的差异也变 大,这导致了系统的稳定性明显降低。

4 结 论

本文首先建立了表征轮盘之间的接触效应的非 线性接触刚度矩阵,在非线性接触刚度矩阵中考虑 了转子变形对刚度系数的影响以及由于接触界面局 部区域的分离而引起的接触刚度降低。其次建立了 周向拉杆转子-轴承-密封系统的动力学模型。最后 用频谱图分析了不同预紧力和不均匀预紧力对拉杆 转子-轴承-密封系统的非线性动力学特性的影响规 律。得出结论如下:

(1)随着预紧力的增加,拉杆转子-轴承-密封系统的动力学特性逐渐接近连续转子-轴承-密封系统的动力学特性。相同结构参数下,拉杆转子-轴承-密封系统具有更高的稳定性。

(2)预紧力不均降低了拉杆转子-轴承-密封系统的稳定性。当两故障拉杆处于邻位时,拉杆转子-轴承-密封系统稳定性急剧降低。

(3)预紧力不均会导致系统出现新的自激振荡频 率成分,并且故障拉杆的相对位置对于系统的组合频 率成分也会有重要影响。随着两故障拉杆的相对位 置由邻位到对位变化,自激振荡频率f_{w3}和f_{w4}逐渐变 得明显,组合频率成分3f_{w3}也从无到有并且逐步变得 明显。由此可以通过自激振荡频率及其组合频率成 分的变化来诊断故障拉杆的相对位置。

参考文献:

- [1] 王萩,喻志强.MS6000B型燃气轮机组振动故障分析及处理[J].广东电力,2003,16(2):29-30.
 WANG Di, YU Zhiqiang. Analysis and treatment of vibration fault on MS6000B gas turbo-units [J]. Guang-dong Electric Power, 2003, 16(2):29-30.
- [2] 张旋洲. 燃气轮机运行故障及典型事故的处理[J]. 燃 气轮机技术, 2006, 19(1): 64-67.
 ZHANG Xuanzhou. Dealing with gas turbine operation failures and typical accidents[J]. Gas Turbine Technology, 2006, 19(1): 64-67.
- [3] 汪光明, 饶柱石, 夏松波, 等. 拉杆转子力学模型的研究[J]. 航空学报, 1993, 14(8): 419-423.
 WANG Guangming, RAO Zhushi, XIA Songbo, et al. The analysis of mechanical model of rod fastening rotor
 [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 1993, 14 (8): 419-423.
- [4] 饶桂石,夏松波,汪光明.粗糙平面接触刚度的研究
 [J].机械强度,1994,16(2):72-75.
 RAO Zhushi, XIA Songbo, WANG Guangming. A study of contact stiffness of flat rough surfaces[J]. Journal of Mechanical Strength, 1994, 16(2): 72-75.
- [5] Yuan Qi, Gao Rui, Feng Zhenping, et al. Analysis of dynamic characteristics of gas turbine rotor considering contact effects and pre-tightening force[C]. Proceedings of the ASME Turbo Expo 2008: Power for Land, Sea, and Air, 2008, 5: 983-988.
- [6] Gao Jin, Yuan Qi, Li Pu, et al. Effects of bending moments and pre-tightening forces on the flexural stiffness of contact interfaces in rod-fastened rotors[J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power-Transactions of the ASME, 2012, 134(10): 102503.
- [7] Yuan Qi, Gao Jin, Li Pu. Nonlinear dynamics of the rod-fastened Jeffcott rotor [J]. Journal of Vibration and Acoustics-Transactions of the ASME, 2014, 136: 021011.
- [8] Hariri A, Zu J W, Mrad R B. Modeling of elastic/plastic contact between nominally flat rough surfaces using an N-Point asperity model [J]. Journal of Tribology, 2006, 128(4): 873-878.
- [9] Nelias D, Boucly V, Brunet M. Elastic-plastic contact between rough surfaces: proposal for a wear or running-in model[J]. Journal of Tribology, 2006, 128 (2): 236-244.
- [10] Mat Isa A A, Penny J E T, Garvey S D. The dynamics of bolted and laminated rotors [J]. Proceeding of SPIE-The International Society for Optical Engineering, 2012, 4062; 867-872.
- [11] Zhang Y C, Du Z G, Shi L M, et al. Determination of

- [12] Meng Cheng, Su Ming, Wang Shaobo. An investigation on dynamic characteristics of a gas turbine rotor using an improved transfer matrix method [J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power-Transactions of the ASME, 2013, 135(12): 122505.
- [13] Klompas N. Effects of anomalous rotor joints on turbomachine dynamics [J]. Journal of Engineering for Power-Transactions of the ASME, 1983, 105 (4) : 927-934.
- [14] Liu Yi, Liu Heng, Yi Jun, et al. Investigation on the stability and bifurcation of a rod-fastening rotor bearing system[J]. Journal of Vibration and Control, 2015, 21 (14): 2866-2880.
- [15] Adiletta G, Guido A R, Rossi C. Nonlinear dynamics of a rigid unbalanced rotor in journal bearings, theoretical analysis [J]. Nonlinear Dynamics, 1997, 14 (1): 57-87.
- [16] Jing Jianping, Meng Guang, Sun Yi, et al. On the non-linear dynamic of a rotor-bearing system[J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 274(3-5): 1031-1044.
- [17] de Castro H F, Cavalca K L, Nordmann R. Whirl and whip instabilities in rotor-bearing system considering a

nonlinear force model[J]. Journal of Sound and Vibration, 2008, 317(1-2): 273-293.

- [18] Ding Q, Zhang K P. Order reduction and nonlinear behaviors of a continuous rotor system [J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 67: 251-262.
- [19] Muszynska A. Rotordynamics [M]. New York: CRC Taylor & Francis Group, 2005.
- [20] Muszynska A, Bently D E. Frequency-swept rotating input perturbation techniques and identification of the fluid force models in rotor/bearing/seal systems and fluid handling machines [J]. Journal of Sound and Vibration, 1990, 143(1): 103-124.
- [21] Li Zhonggang, Chen Yushu. Research on 1:2 subharmonic resonance and bifurcation of nonlinear rotor-seal system [J]. Applied Mathematics and Mechanics (English Edition), 2012, 33(4): 499-510.
- [22] Li Songtao, Xu Qingyu, Zhang Xiaolong. Nonlinear dynamic behaviors of a rotor-labyrinth seal system [J]. Nonlinear Dynamics, 2007, 47: 321-329.
- [23] Greenwood J A, Williams J B P. Contact of nominally flat surfaces [J]. Proceedings of The Royal Society of London A, 1966, 295(1442): 300-319.
- [24] Rao J S, Shiau T N, Chang J R. Theoretical analysis of lateral response due to torsional excitation of geared rotors [J]. Mechanism and Machine Theory, 1998, 33 (6): 761-783.

Establishment of contact stiffness matrix and analysis of dynamic characteristics of rod-fastening rotor-bearing-seal system

WU Xiang-lin, JIAO Ying-hou, CHEN Zhao-bo

(Department of Mechanical Design and Theory, School of Mechatronics Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: The circumferential rod-fastening rotor structure is very common in gas turbines, and the tie rods and contact layers commonly present in the rotor structure have a very important impact on the dynamic characteristics of the rotor-bearing-seal system. In this study, a mechanical model of the circumferentially distributed tie rods and a nonlinear contact stiffness matrix that characterizes the contact effect between the wheels are established firstly. The contact stiffness matrix is composed of seven stiffness coefficients , which can comprehensively characterize the lateral stiffness, shear stiffness, bending stiffness, and torsional stiffness of the contact layer, and the influence of rotor deformation on stiffness coefficients the matrix is considered in the matrix. Then, a dynamic model of the circumferential rod-fastening rotor-bearing-seal system is established by introducing the nonlinear oil film force model based on the short bearing theory and verified by experiments and the Muszynska sealing force model. The Newmark- β method is used to solve the dynamic equations, and the three-dimensional spectrogram is used to analyze the influence of the magnitude and uneven distribution of the pre-tightening force on the nonlinear dynamic characteristics of the circumferential rod-fastening rotor-bearing-seal system. The results show that the contact stiffness and the relative phase of failed tie rods have significant effects on the stability of the rod-fastening rotor-bearing-seal system.

Key words: circumferential rod-fastening rotor; nonlinear contact stiffness matrix; pre-tightening force; rotor-bearing-seal system; dynamic characteristics

作者简介:武祥林(1990一),男,博士,讲师。电话:18845073212; E-mail: wuxianglin@stdu.edu.cn。 通讯作者: 焦映厚(1962一),男,博士,教授。电话:(0451)86412057; E-mail: jiaoyh@hit.edu.cn。