# 几何非线性黏性阻尼隔振系统动力学特性研究

刘海超,金映丽,闫 明,孙自强,惠安民,王开平

(沈阳工业大学机械工程学院,辽宁沈阳110870)

摘要:针对舰船设备用隔振系统中普遍存在的非线性特性,建立了包含非线性刚度、库伦阻尼和几何非线性黏性阻 尼的非线性隔振系统数学模型,采用平均法进行解析求解,根据Routh-Hurwitz判据得到系统稳定性边界条件,综合 研究了线性阻尼、库伦阻尼和和几何非线性黏性阻尼对系统幅频响应和稳定性的影响规律;对非线性隔振系统进行 了避跳参数设计,分析了系统参数对避跳边界的影响;通过振动试验进行验证。结果表明:线性阻尼、库伦阻尼和几 何非线性黏性阻尼对降低软、硬隔振系统幅频响应峰值,提高系统稳定性都有积极作用,但由于库伦阻尼的"锁定" 特性导致硬特性隔振系统幅频响应出现"频率岛"现象,系统稳定性未能得到有效改善,但库伦阻尼有效降低了软特 性隔振系统幅频响应峰值,提高了系统稳定性;几何非线性黏性阻尼对降低幅频响应峰值,提高系统稳定性均具有 显著作用,同时不会出现"频率岛"现象。

关键词:非线性隔振;幅频响应;几何非线性黏性阻尼;避跳参数设计;振动试验
中图分类号:O328;TH703.63 文献标志码:A 文章编号:1004-4523(2022)06-1433-09
DOI:10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2022.06.015

# 引 言

随着中国舰船制造技术的快速发展,舰载设备 日益精密化、智能化,但其所处的工作环境却日益复 杂和严酷,这对舰载设备隔振装置的设计提出了更 高的标准与要求<sup>[1-2]</sup>。由于舰船上多为大型重载设 备,所以隔振器应具有更高的承载能力和更低的隔 振频率,显然线性隔振器已经不能满足工程实际需 求,因此,近年来国内外学者对非线性隔振系统展开 了广泛而深入的研究。

陆泽琦等<sup>[3]</sup>对近年国内外多种非线性隔振系统 的理论与应用进行了综述,非线性刚度能够有效解 决线性隔振系统承载能力不足的问题。Brennan 等<sup>[4]</sup>采用谐波平衡法求解了具有软化和硬化的 Duffing隔振系统响应方程,研究了跳降频率和跳升 频率与系统参数的关系。张小龙等<sup>[5]</sup>进一步推导了 Duffing型隔振系统跳跃频率和力传递率的计算公 式,分析了隔振系统主要参数对力传递率影响规律。 文献[6-10]采用了理论、仿真和试验的方法对准零 刚度隔振器的非线性动力学行为进行了研究,结果 表明,准零刚度隔振器的高静低动特性使隔振系统 具有更高的承载能力、更优的隔振带宽,但只适用于 小幅值振动。Li等<sup>[11-12]</sup>设计了一种双腔固液混合 (SALiM)隔振器,通过理论计算与振动试验对系统 非线性刚度和阻尼特性进行了研究,这种隔振器更 适合低频重型设备的隔振。Gao等<sup>[13]</sup>为低频重型设 备设计了一种具有高静态和低动态(HSLD)刚度的 新型油气近零频率(NZF)隔振器,该隔振器通过调 节气压改变承载能力,采用流体阻尼机构实现了阻 尼非线性。

相比线性隔振器,准零刚度隔振器虽然可以实 现较高的承载能力和较低的隔振频率,但由于刚度 的非线性常常会导致系统出现跳跃、分岔和混沌等 不稳定现象。目前常采用提高系统阻尼来改善隔振 系统的动力学性能。Kovacic等<sup>[14]</sup>对具有非线性阻 尼的三类 Duffing 隔振系统(渐软、渐硬和双稳)的动 力学特性进行研究,得出了幂函数非线性阻尼对分 岔结构和通向混沌途径的依赖与系统的非线性刚度 特征;并且对于渐软系统,随着激励幅值增加,下跳 频率对阻尼的非线性阶次较为敏感,因此可以通过 增加阻尼阶次提高系统的稳定性。Sharma 等<sup>[15]</sup>分 析了非线性阻尼对强迫 Duffing 系统的分岔与混沌 特性的影响,结果表明,非线性阻尼能够降低系统首 次进入混沌状态的临界值,增加发生混沌的参数空 间,影响系统进入混沌的通道。Ho等<sup>[16]</sup>首次采用输 出频响函数法分析了非线性刚度和非线性阻尼对 Duffing系统动态行为的影响,结果表明,非线性阻

收稿日期: 2021-05-13; 修订日期: 2021-07-08

基金项目:国防科技创新特区项目(20-163-00-TS-006-002-01);国家自然科学基金资助项目(51705337)。

尼对抑制隔振系统共振峰值,提高系统稳定性的效 果要远优于线性阻尼。Peng等<sup>[17]</sup>采用谐波平衡法 研究了立方阻尼对非线性隔振系统动力学特性的影 响,结果表明立方阻尼隔振器在一些特殊情况下才 具有优势。Laalej等<sup>[18]</sup>利用主动试验装置对立方阻 尼隔振系统进行了试验研究,结果充分说明了通过 在单自由度隔振系统中使用三次非线性阻尼可以获 得较好隔振效果。苏何先等<sup>[19]</sup>通过对非线性黏滞阻 尼器进行性能试验测试进一步明确了非线性阻尼器 的关键参数,有助于设计出更符合工程实际需求的 非线性阻尼器。

考虑舰载设备复杂的工作环境,被动隔振方式 依然是首要选择,为了提高非线性隔振系统的振动 性能,本文采用线性黏性阻尼器与隔振系统运动方 向垂直的布置形式实现了系统阻尼的几何非线性; 采用平均法求解了非线性隔振系统的主共振响应, 分析了线性阻尼、库伦阻尼和几何非线性黏性阻尼 对系统幅频响应、稳定性的影响规律,并且实现了隔 振系统参数的避跳设计;最后通过振动试验进一步 验证了几何非线性黏性隔振系统的特性规律。

## 1 建立隔振系统模型

#### 1.1 系统力学模型

几何非线性隔振系统力学模型如图1所示。M为设备的质量, $K_1$ 和 $K_2$ 分别为隔振器垂向线性刚度和非线性刚度系数, $C_1$ 为垂向线性黏性阻尼系数, $F_f$ 为垂向库伦阻尼力, $C_2$ 为水平线性黏性阻尼系数,D为水平阻尼器初始长度,Y(t)和X(t)分别代表基座和设备的绝对位移。



图1 几何非线性隔振系统力学模型

Fig. 1 Mechanical model of geometrically nonlinear vibration isolation system

#### 1.2 系统数学模型

几何非线性隔振系统随基础激励做受迫振动, 假设基础激励为谐波信号,即 $Y(t) = Psin(\omega t)$ ,定 义设备与基座的相对位移Z(t) = X(t) - Y(t)。 系统中的弹性力和阻尼力分别表示为:

$$F_k = K_1 Z + K_2 Z^3 \tag{1}$$

$$F_{c} = C_{1} \dot{Z} + F_{f} \operatorname{sgn}(\dot{Z}) + 2C_{2} \frac{Z^{2} Z}{Z^{2} + D^{2}}$$
(2)

当 Z≪0.2D 时,利用泰勒级数展开将式(2)简 化为:

$$F_{c} = C_{1} \dot{Z} + F_{f} \operatorname{sgn}(\dot{Z}) + 4C_{2} \frac{Z^{2} \dot{Z}}{D^{2}} \qquad (3)$$

田此,系统的初力学方程为:  

$$M\ddot{Z} + K_1Z + K_2Z^3 + C_1\dot{Z} + F_f \operatorname{sgn}(\dot{Z}) +$$
  
 $4C_2 \frac{Z^2\dot{Z}}{D^2} = MP\omega^2 \sin(\omega t)$ 
(4)

定义无量纲参数如下:

------

$$\omega_1^2 = \frac{K_1}{M}, \ \omega_2^2 = \frac{K_2}{M}, \ r = \frac{\omega}{\omega_1}, \ 2\xi_1\omega_1 = \frac{C_1}{M},$$
$$\rho = \frac{K_2Y^2}{K_1}, \ \eta = \frac{4C_2Y^2}{D^2M\omega_1}, \ \lambda = \frac{F_f}{M\omega_1}$$
(5)

$$z = \frac{Z}{P}, \ \dot{z} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}, \ \tau = \omega_1 t$$
 (6)

变换得到相对坐标系下动力学方程(4)的无量 纲形式为:

$$\ddot{z} + z + \rho z^3 + 2\xi_1 \dot{z} + \lambda \operatorname{sgn}(\dot{z}) + \eta z^2 \dot{z} = r^2 \sin(r\tau)$$
(7)

### 2 幅频响应特性分析

假设系统稳态响应的一次近似解为:

$$\begin{cases} z = u(\tau) \sin(\alpha(\tau)) \\ \dot{z} = u(\tau) r \cos(\alpha(\tau)) \end{cases}$$
(8)

式中  $u(\tau)$ 为无量纲振动幅值, $\alpha(\tau) = r\tau + \theta(\tau)$ ,  $\theta(\tau)$ 为无量纲相位角,由此推出:

$$\ddot{z} = \dot{u}r\cos\alpha - u\dot{\theta}r\sin\alpha - ur^2\sin\alpha \qquad (9)$$

同时,利用傅里叶展开对 sgn 函数进行化简,有:

$$\operatorname{sgn}(\cos\alpha) \approx a_0 + a_1 \cos\alpha + a_2 \sin\alpha \approx \frac{4}{\pi} \cos\alpha \qquad (10)$$

将式(8)~(10)代人式(7)求出关于 *i* 和 *θ* 的方 程式为:

$$\dot{u}r = [(ur^{2} - u)\sin\alpha - \rho u^{3}\sin^{3}\alpha - (2\xi_{1}ur + \eta u^{3}r\sin^{2}\alpha + \frac{4\lambda}{\pi})\cos\alpha + r^{2}\sin(\alpha - \theta)]\cos\alpha \qquad (11)$$
$$u\dot{\theta}r = [(-ur^{2} + u)\sin\alpha + \rho u^{3}\sin^{3}\alpha + \eta u^{3}\cos^{3}\alpha + \eta$$

$$(2\xi_1 ur + \eta u^3 r \sin^2 \alpha + \frac{4\lambda}{\pi}) \cos \alpha - r^2 \sin(\alpha - \theta)] \sin \alpha$$
(12)

π

# 其中,根据三角函数化简关系有:

$$\sin\left(\alpha - \theta\right) = \sin\alpha\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta \quad (13)$$

$$\sin^3 \alpha \approx \frac{3}{4} \sin \alpha \tag{14}$$

将式(13)和(14)代入式(11)和(12)整理得到:

$$\dot{u}r = \left[ \left( ur^2 - u - \frac{3}{4} \rho u^3 - r^2 \cos \theta \right) \sin \alpha - \left( 2\xi_1 ur + \eta u^3 r \sin^2 \alpha + \frac{4\lambda}{\pi} - r^2 \sin \theta \right) \cos \alpha \right] \cos \alpha$$
(15)

$$u\dot{\theta}r = [(-ur^{2} + u - r^{2}\cos\theta)\sin\alpha + \rho u^{3}\sin^{3}\alpha + (2\xi_{1}ur + \eta u^{3}r\sin^{2}\alpha + \frac{4\lambda}{2} + r^{2}\sin\theta)\cos\alpha]\sin\alpha \qquad (16)$$

由于*i*和*θ*为随时间缓慢变化的周期量,因此采 用平均法求得一个周期内的平均值为:

$$2\pi \dot{u}r = -0.5\pi (4\xi_1 ur + 0.5\eta u^3 r + 2r^2 \sin\theta + 4\lambda)$$
(17)

$$2\pi u \dot{\theta} r = \pi \left[ (r^2 - 1)u + \frac{3}{4} \rho u^3 - r^2 \cos \theta \right] \quad (18)$$

系统稳态解满足 $\dot{u}=0, \dot{\theta}=0$ 时,则有:  $r^{2}\sin\theta=-2\xi_{1}ur-0.25\eta u^{3}r-2\lambda$  (19)

$$r^{2}\cos\theta = (r^{2}-1)u + \frac{3}{4}\rho u^{3}$$
 (20)

将式(19)和(20)两边平方求和,整理得到系统 幅频响应和相频响应方程:

$$r^{4} = (2\xi_{1}ur + 0.25\eta u^{3}r + 2\lambda)^{2} + \left[(r^{2} - 1)u + \frac{3}{4}\rho u^{3}\right]^{2}$$
(21)

$$\theta = \arctan\left(\frac{-2\xi_1 ur - 0.25\eta u^3 r - 2\lambda}{(r^2 - 1)u + \frac{3}{4}\rho u^3}\right) \quad (22)$$

由式(21)得到系统的骨干曲线方程:

$$(r^2 - 1)u + \frac{3}{4}\rho u^3 = 0 \tag{23}$$

如图2所示,分别绘制了线性隔振系统与Duffing隔振系统的无量纲幅频特性曲线,其中,骨干线 由式(23)绘制。图3~5分析了线性阻尼ξ<sub>1</sub>、库伦阻 尼λ和几何非线性黏性阻尼η对软、硬特性隔振系统 的幅频响应特性的影响规律。

由图2可知,与线性隔振系统相比,硬特性 Duffing隔振系统幅频特性曲线向右弯曲,并且响应 峰值大幅提高,系统出现明显的跳跃现象;软特性 Duffing隔振系统幅频特性曲线向左弯曲,响应峰值 大幅降低,同样出现非线性跳跃现象。同时,骨干曲 线能够较好地表示非线性隔振系统幅频响应曲线的 变化趋势。



图 2 线性与 Duffing 隔振系统幅频响应对比

Fig. 2 Comparison of amplitude-frequency responses between linear and Duffing isolation systems



图 3 参数 *ξ*1 对幅频特性曲线的影响

Fig. 3 The influence of parameter  $\xi_1$  on the amplitudefrequency characteristic curve





由图3可知,随着线性阻尼 *ξ*<sub>1</sub>增加,软、硬隔振 系统的幅频响应峰值都会大幅降低,跳跃区间迅速 减小,直到跳跃现象完全消失。

由图4可知,由于库伦阻尼力的"锁定"特性(即 由于库伦阻尼具有黏滞作用,当振动频率较低时,系 统具有保持初始静止状态的特性),幅频响应的曲线 起始频率(逃离频率)大于零,并随着λ的增大向右 移动。对硬特性非线性隔振系统,当库伦阻尼λ≪ 0.5时,库伦阻尼对幅频响应的影响较小,当库伦阻





Fig. 5 The influence of parameter  $\eta$  on the amplitudefrequency characteristic curve

尼 λ>0.5 时,幅频特性响应曲线逃离频率r>1.0, 此时幅频特性响应曲线出现独立封闭环形区域,即 "频率岛"现象<sup>[20]</sup>,并且"频率岛"内部区域均为不稳 定的跳变区,随着库伦阻尼的增大,"频率岛"缓慢减 小直到消失,此时系统才恢复稳定状态;对于软特性 非线性隔振系统,随着库伦阻尼的增大,幅频响应峰 值迅速衰减,跳跃现象消失,因此,增加库伦阻尼有 利于提高软特性非线性隔振系统的稳定性。

由图5可知,微量增加几何非线性黏性阻尼η, 软、硬特性隔振系统的幅频响应峰值大幅下降,跳跃 现象迅速消失,同时不会因为η的增加导致幅频响 应曲线出现"频率岛"现象。因此,几何非线性黏性 阻尼对降低软、硬特性隔振系统的幅频响应,提高系 统稳定性起到了十分重要的作用。

## 3 定常解稳定性分析

为了研究非线性隔振系统定常解的稳定性,将 表达式 $u=u_0+v(\tau)$ 和 $\theta=\theta_0+\varphi(\tau)$ 代入式(17)和 (18),考虑式(19)和(20)的定常解并进行线性化处 理得到扰动方程:

 $\begin{cases} 8r\dot{v} = -8\xi_{1}rv - 3\eta ru_{0}^{2}v - 4r^{2}(\cos\theta_{0})\varphi \\ 8ru_{0}\dot{\varphi} = 4(1-r^{2})v + 9\rho u_{0}^{2}v + 4r^{2}(\sin\theta_{0})\varphi \end{cases}$ (24)

其中:

$$\begin{cases} \sin\left(\theta_{0}+\varphi\right)\approx\sin\theta_{0}+(\cos\theta_{0})\varphi\\ \cos\left(\theta_{0}+\varphi\right)\approx\cos\theta_{0}-(\sin\theta_{0})\varphi \end{cases}$$
(25)

 $u_0$ 和 $\theta_0$ 为式(19)和(20)的定常解, $v(\tau)$ 和 $\varphi(\tau)$ 是两 个较小的扰动。

设方程(24)的解为 $v=v_0e^t$ 和 $\varphi=\varphi_0e^u$ ,得到特征方程为:

$$\begin{vmatrix} 8\pi rs + 8\xi_1 r + 3\eta r u_0^2 & 4r^2 \cos \theta_0 \\ 4r^2 - 4 - 9\rho u_0^2 & 8r u_0 s - 4r^2 \sin \theta_0 \end{vmatrix} = 0 (26)$$
  
展开行列式得:

$$64r^{2}u_{0}s^{2} + 8(8\xi_{1}r^{2}u_{0} + 3\eta r^{2}u_{0}^{3} - 4r^{3}\sin\theta_{0})s - 4r^{2}\sin\theta_{0}(8\xi_{1}r + 3\eta ru_{0}^{2}) + 4r^{2}\cos\theta_{0}(4 - 4r^{2} + 9\rho u_{0}^{2}) = 0$$
(27)

根据Routh-Hurwitz定理,定常解稳定的边界条件为:

$$4r^{2}\cos\theta_{0}(4-4r^{2}+9\rho u_{0}^{2})-$$
$$4r^{2}\sin\theta_{0}(8\xi_{1}r+3\eta r u_{0}^{2})=0 \qquad (28)$$

图 6 为不同激励幅值对系统幅频响应及稳定性 边界的影响,其中,定义实际施加的位移激励幅值 *p=nP*,*n*为倍数参数,图中阴影部分为不稳定区域。 图 7~9分别研究了线性阻尼ξ<sub>1</sub>、库伦阻尼λ和几何 非线性黏性阻尼η对软、硬特性隔振系统稳定性的 影响。

由图 6 可知,硬特性非线性隔振系统随激励幅值 增加,幅频响应曲线逐渐向右弯曲,共振频率右移,系 统隔振频宽减小;软特性非线性隔振系统随激励幅值 增加,幅频响应曲线逐渐向左弯曲,共振频率左移,提 高了系统隔振范围。但是,无论软、硬隔振系统,不稳 定区域的边界由系统参数唯一确定,与激励幅值无 关。但随着激励幅值增大,幅频响应曲线落入不稳定 区域的部分增加,导致系统不稳定性增加。



图6 不同激励幅值下的幅频响应及稳定边界









图 8 参数λ对不稳定区域的影响

Fig. 8 The influence of parameter  $\lambda$  on unstable region



Fig. 9 The influence of parameter  $\eta$  on unstable region

由图 7 可知,随线性阻尼 *ξ*<sub>1</sub>的增加,软、硬特性 非线性隔振系统的不稳定区域均逐渐减小,系统稳 定性增加。

由图 8 可知,增加库伦阻尼λ同样可以减小软、 硬特性非线性隔振系统的不稳定区域,提高系统稳 定性,但是作用效果远远弱于线性阻尼。结合图4, 增加库伦阻尼λ能够有效降低软特性非线性隔振系 统的幅频响应,而且不会导致"频率岛"现象的出现。 因此,在软特性非线性隔振系统中增加库伦阻尼有 利于提高系统的稳定性。

由图9可知,随几何非线性黏性阻尼η的增加, 硬特性非线性隔振系统不稳定区域快速减小,系统 稳定性大幅提高,但是软特性非线性隔振系统不稳 定区域变化不大,因此,几何非线性黏性阻尼η更适 合应用于硬特性非线性隔振系统减小其跳跃区间, 提高系统稳定性能。

#### 4 避跳参数设计

通过上述分析,在一定参数范围内会出现对系 统造成意外损坏的跳跃现象,故在设计隔振系统参 数时应该首先避免跳跃现象的产生。事实上,如果 能够保证系统的频率响应是唯一的就可以避免出现 跳跃现象<sup>[21]</sup>,因此,存在一个参数边界将单个和多个 幅值区分开,即将跳跃区与非跳跃区分开。结合式 (28)和(21)便可得到关于系统参数ρ,ξ<sub>1</sub>,λ和η的跳 跃区和避跳区的边界。

为了避免跳跃现象的产生,对某线性阻尼 $\xi_1$ = 0.05的软、硬隔振系统的 $\rho$ , $\lambda$ 和 $\eta$ 参数进行设计,由 满足式(28)和(21)的参数构成如图 10和11所示的 曲面图,其中曲面及以上的区域为避跳区域,曲面上 的星号(\*)点为满足避跳边界条件的曲面内插点。 图 12和13分别为硬、软特性隔振系统跳跃避免参数 的二维图。



Fig. 10 Jump avoidance boundary surfaces of the hard characteristic vibration isolation system





Fig. 11 Jump avoidance boundary surfaces of the soft characteristic vibration isolation system









Fig. 13 Two-dimensional diagram of jumping avoidance parameters of soft characteristic vibration isolation system

由图 12 可知,对于硬特性非线性隔振系统,随 着非线性刚度 $\rho$ 的增加,需要增加更多的几何非线 性黏性阻尼 $\eta$ 使系统处于避跳区域,即二者呈正相 关,并且增加库伦阻尼能够减小避跳所需的几何非 线性黏性阻尼 $\eta$ 值,增大系统稳定避跳区域。但是, 由于库伦摩擦阻尼的"锁定"特性导致了避跳参数设 计更加复杂。当 $\lambda \leq 0.5$ 时,由于库伦阻尼"锁定"频 率段较小,非线性刚度 $\rho$ 与几何非线性黏性阻尼 $\eta$ 近 似呈线性关系,这大大简化了避跳参数的设计;当  $\lambda > 0.5$ 时,随着库伦阻尼增大,逃离频率逐渐向右移 动,并且在"锁定"频率段内不需要提供几何非线性 黏性阻尼便可以避免跳跃,当频率超过"锁定"频率 范围,随着非线性刚度的增加,非线性阻尼会呈现先 快速上升(如图 12 中虚线圆圈包围的频率范围),然 后近似线性增长的变化趋势。

由图 13 可知,对于软特性非线性隔振系统,几 何非线性黏性阻尼  $\eta$ 随非线性刚度  $\rho$ 的增加近似线 性增加,并且随着库伦阻尼  $\lambda$ 的增加,避跳边界所需 的几何非线性黏性阻尼逐渐减小,跳跃区间随之减 小,系统稳定性增加。因此,对任一非线性刚度  $\rho$ , 增加几何非线性阻尼  $\eta$ 与库伦阻尼  $\lambda$ 均能够有效增 大避跳区域,提高软特性非线性隔振系统的稳定性。

#### 5 非线性隔振系统振动试验

#### 5.1 试验装置及工作原理

为了验证上述几何非线性黏性阻尼隔振系统的 动力学特性,设计制作了如图14所示的试验装置, 主要由基座、水平阻尼器支座、导向装置、传感器测 量装置、线性弹簧、垂向黏性阻尼器、质量块、水平黏 性阻尼器和磁性弹簧元件组成。该试验装置工作原 理为:由图14中的磁性弹簧元件提供非线性刚度, 其中磁性弹簧元件是由两对径向磁化的环形永磁体 组成,其结构形式如图15所示,具体参数如表1所 示。内磁体安装在竖直连杆上并与基座连接固定, 外磁体通过上、下端盖与质量块相连并随之运动,由 于内外磁体的磁化方向相反,因此,始终存在一个与 质量块运动方向相同的磁性力作用在质量块上。磁 性弹簧的工作原理、磁性力和磁刚度的计算方法详 见文献[22],由此得到了磁刚度*K*"的近似计算公式 如下:

$$K_m = K_{m1} + K_{m2} Z^2 \tag{29}$$

式中 K<sub>m1</sub>和K<sub>m2</sub>分别为常数项和二次项刚度系数。



图 14 几何非线性黏性阻尼隔振系统试验装置 Fig. 14 The test device of geometrically nonlinear viscous

damping vibration isolation system test device



表 1 磁弹簧参数 Tab. 1 Parameters of the magnetic spring

$R_1/mm$	$T_1/mm$	$2L_1/\text{mm}$	$R_2/\mathrm{mm}$	$T_2/\mathrm{mm}$	$2L_2/\text{mm}$
7.5	15.0	30.0	27.0	15.0	30.0

由图 14 中线性弹簧的线性刚度 K<sub>L</sub>和磁性弹簧 磁刚度的常数刚度 K<sub>m</sub>1共同提供线性刚度,由此可得:

$$K_1 = K_{m1} + K_L,$$
  
 $K_2 = K_{m2}$  (30)

由图 14 中垂向黏性阻尼器提供垂向阻尼 C<sub>1</sub>,由 水平阻尼器提供几何非线性阻尼 C<sub>2</sub>,由试验装置各 部件之间的干摩擦力提供库伦阻尼力 F<sub>f</sub>。并且采用 位移传感器、加速度传感器和数据采集仪采集与记 录试验数据。

采用垂向液压振动试验台进行振动试验,试验

台基本参数为:最大推力100 kN,正弦扫频范围 0.1~160 Hz,试验装置安装及试验系统组成如图16 所示。



图 16 试验装置安装图 Fig. 16 The installation diagram of test device

#### 5.2 振动试验及结果分析

以线性隔振系统和硬特性隔振系统为例进行了 定频振动试验,频率范围为0.6~15 Hz,频率间隔为 0.6 Hz,加载谱位移峰峰值为2 mm,非线性隔振系 统的参数如表2所示,试验结果与理论计算幅频响 应对比曲线如图17 所示。

表2 非线性隔振系统参数

 Tab. 2
 Nonlinear vibration isolation system parameters

隔振系统初期	隔振系统无量纲参数		
$K_1/(\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1})$	$1.28 \times 10^{4}$	$\omega_1$	37.70
$C_1 / [N \cdot (m \cdot s^{-1})^{-1}]$	33.93	$\hat{\mathcal{F}}_1$	0.050
$K_2/(\mathrm{N} \cdot \mathrm{mm}^{-1})$	$1.92 \times 10^{8}$	$\boldsymbol{\omega}_2$	4617.29
$C_2/[N \cdot (m \cdot s^{-1})^{-1}]$	83128.5	η	0.005
$F_{f}/N$	33.93	λ	0.10
D/mm	140	-	-
$m/\mathrm{kg}$	9.0	-	-

由图 17(a)可知,原系统参数下非线性隔振系 统具有硬刚度特性,幅频响应曲线向右弯曲,出现了 跳跃现象,并且理论计算与振动试验所得幅频响应 曲线具有较好的一致性,最大误差仅为2.5%。

采用第4节中避跳设计方法对非线性系统进行 避跳设计,在其他参数不变的条件下,几何非线性黏 性阻尼 $\eta$ =0.09为避跳临界参数(此时 $C_2$ =1.50×  $10^6$  N/(m/s)),因此水平黏性阻尼器阻尼系数调到 1.66×10<sup>6</sup> N/(m/s),即对应无量纲阻尼系数 $\eta$ = 0.10进行理论计算与振动试验,结果如图17(b) 所示。

由图 17 中(b)可知,当无量纲阻尼系数 η 超过避 跳临界阻尼系数 0.09 时,理论计算与振动试验幅频 响应曲线均未出现跳跃现象,这说明第4节中的避 跳设计方法具有一定的准确性与普适性,可以用于 非线性隔振系统参数设计。



Fig. 17 The comparative analysis of experimental results and theoretical calculations

# 6 结 论

(1)增加线性阻尼ξ1能够降低软、硬特性隔振系统幅频响应峰值,减小跳跃区间,提高系统的稳定性。

(2)增加库伦阻尼λ能够有效降低软特性隔振 系统的幅频响应峰值,减小跳跃区域,提高系统稳定 性;但库伦阻尼对硬特性隔振系统影响较为复杂:当 λ≪0.5时,库伦阻尼对系统的幅频响应及稳定性影 响较小;当λ>0.5时,幅频响应曲线会出现独立封闭 环形区域,即出现"频率岛",此时需要大幅提高库伦 阻尼才能使"频率岛"消失,而且对减小不稳定区域 的作用较小,因此,库伦阻尼更适合软特性隔振系统 参数设计。

(3)微量增加几何非线性黏性阻尼η就能使软、 硬特性隔振系统幅频响应峰值大幅降低,使硬特性 隔振系统不稳定区域迅速减小,而且不会出现"频率 岛"现象,但是几何非线性黏性阻尼对软特性隔振系 统不稳定区域的影响并不显著,因此,几何非线性黏 性阻尼更适合硬特性隔振系统参数设计。 (4) 通过对几何非线性黏性阻尼隔振系统进行 避跳参数设计,得到了避跳边界。同时,对于硬特性 隔振系统,当 $\lambda \leq 0.5$ 时,避跳边界上的非几何非线性 黏性阻尼 $\eta$ 与线性刚度 $\rho$ 近似呈线性关系;当 $\lambda > 0.5$ 时,由于"频率岛"等复杂的幅频特性导致避跳参数 变化规律十分复杂,因此,硬特性隔振系统最好在  $\lambda \leq 0.5$ 范围内进行避跳参数设计。对于软特性隔振 系统,避跳边界上的非几何非线性黏性阻尼 $\eta$ 与线 性刚度 $\rho$ 近似呈线性关系,并且随着 $\lambda$ 增加 $\eta$ 随之减 小,增大了系统稳定区域,因此,适当增加库伦阻尼  $\lambda$ 对软特性隔振系统避跳参数设计具有积极作用。

(5) 通过定频振动试验验证了理论计算的准确 性以及避跳设计方法的普适性,因此,上述计算得到 的几何非线性隔振系统非线性动力学特性规律以及 采用的避跳参数设计方法,对非线性隔振系统参数 设计具有重要的指导作用。

#### 参考文献:

- [1] 刘渊博,李明,何琳.船用气囊隔振系统的非线性动力 学特性[J].船舶力学,2015,19(11):1385-1392.
  Liu Yuanbo, Li Ming, He Lin. Nonlinear dynamics of the marine air-bag vibration isolation system[J]. Journal of Ship Mechanics, 2015,19(11):1385-1392.
- [2] 张春辉,曾泽璀,张磊,等.预紧式准零刚度隔冲器的 隔冲性能研究[J].振动工程学报,2019,32(5):767-777.

Zhang Chunhui, Zeng Zecui, Zhang Lei, et al. Research on the shock isolation performance of preload quasi-zerostiffness isolator [J]. Journal of Vibration Engineering, 2019,32(5): 767-777.

[3] 陆泽琦,陈立群.非线性被动隔振的若干进展[J].力学 学报,2017,49(3):550-564.

Lu Zeqi, Chen Liqun. Some recent progresses nonlinear passive isolations of vibrations [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2017, 49 (3) : 550-564.

- [4] Brennan M J, Kovacic I, Carrella A, et al. On the jump-up and jump-down frequencies of the Duffing oscillator[J]. Journal of Sound and Vibration, 2008: 318(4-5): 1250-1261.
- [5] 张小龙,东亚斌. Duffing型隔振的力传递率及跳跃现象的理论分析[J]. 振动与冲击,2012,31(16): 38-42.
  Zhang Xiaolong, Dong Yabin. Theoretical analysis on force transmissibility and jump phenomena of Duffing spring type vibration isolator [J]. Journal of Vibration and Shock,2012,31(16): 38-42.
- [6] Kovacic I, Brennan M J, Waters T P. A study of a

nonlinear vibration isolator with a quasi-zero stiffness characteristic [J]. Journal of Sound and Vibration, 2008, 315: 700-711.

- [7] Liu Chaoran, Yu Kaiping. Accurate modeling and analysis of a typical nonlinear vibration isolator with quasi-zero stiffness [J]. Nonlinear Dynamics, 2020, 100(3): 2141-2165.
- [8] Wang Xiaojie, Liu Hui, Chen Yinqi, et al. Beneficial stiffness design of a high-static-low-dynamic-stiffness vibration isolator based on static and dynamic analysis[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2018, 142-143; 235-244.
- [9] Le T, Kyoung K. Active pneumatic vibration isolation system using negative stiffness structures for a vehicle seat [J]. Journal of Sound and Vibration, 2014, 333 (5): 1245-1268.
- [10] Lan Chaochieh, Yang Shengan, Wu Yi, et al. Design and experiment of a compact quasi-zero-stiffness isolator capable of a wide range of loads[J]. Journal of Sound and Vibration, 2014, 333(20): 4843-4858.
- [11] Li Fangshuo, Chen Qian, Zhou Junhui. Modeling and dynamic properties of dual-chamber solid and liquid mixture vibration isolator [J]. Journal of Sound and Vibration, 2016, 374: 61-76.
- [12] Li Fangshuo, Chen Qian, Zhou Junhui. Experimental study on the dynamic properties of the dual-chamber solid and liquid mixture vibration isolator[J]. Journal of Vibration and Control, 2018,22(24): 5302-5311.
- [13] Gao Xue, Teng Handong. Dynamics and isolation properties for a pneumatic near-zero frequency vibration isolator with nonlinear stiffness and damping[J]. Nonlinear Dynamics, 2020,102(4): 2205-2227.
- [14] Kovacic I, Brennan M J. The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and Their Behaviour [M]. UK: John Wiley & Sons, 2011.
- [15] Sharma A, Patidar V, Purohit G. Effects on the bifurcation and chaos in forced Duffing oscillator due to nonlinear damping [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012, 17(6): 2254-2269.
- [16] Ho C, Lang Z Q, Billings S A. A frequency domain analysis of the effects of nonlinear damping on the Duffing equation[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2014, 45(1): 49-67.
- [17] Peng Zhike, Meng Guang, Lang Ziqiang, et al. Study of the effects of cubic nonlinear damping on vibration isolations using Harmonic Balance Method [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2012,47(10): 1073-1080.
- [18] Laalej H, Lang Z, Daley S, et al. Application of nonlinear damping to vibration isolation: an experimental study [J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 69 (1-2): 409-

421.

- [19] 苏何先,潘文,兰香,等.非线性黏滞阻尼器性能试验
  [J].振动与冲击,2019,38(20):61-69.
  Su Hexian, Pan Wen, Lan Xiang, et al. A study on the performance of nonlinear viscous damper testing [J].
  Journal of Vibration and Shock,2019,38(20): 61-69.
- [20] Narimani A, Golnaraghi M F, Nakhaie J G. Sensitivity analysis of the frequency response of a piecewise linear system in a frequency island [J]. Journal of Vibration

and Control, 2004, 10(2): 175-198.

- [21] Gao Xue, Chen Qian. Nonlinear analysis, design and vibration isolation for a bilinear system with time-delayed cubic velocity feedback[J]. Journal of Sound and Vibration, 2014,333(6): 1562-1576.
- [22] Zheng Yisheng, Zhang Xinong, Luo Yajun, et al. Design and experiment of a high-static-low-dynamic stiffness isolator using a negative stiffness magnetic spring [J]. Journal of Sound and Vibration, 2016,360:31-52.

# Dynamic characteristics of geometrically nonlinear viscous damping vibration isolation system

LIU Hai-chao, JIN Ying-li, YAN Ming, SUN Zi-qiang, HUI An-min, WANG Kai-ping (School of Mechanical Engineering, Shenyang University of Technology, Shenyang 110870, China)

Abstract: Aiming at the nonlinear characteristics of the vibration isolation system for naval equipments, a mathematical model of the nonlinear vibration isolation system including nonlinear stiffness, Coulomb damping and geometric nonlinear viscous damping is established, and the average method is used for analytical solution, the system stability boundary conditions are obtained according to the Routh-Hurwitz criterion. The influence of linear damping, Coulomb damping and geometrically nonlinear viscous damping on the system's amplitude-frequency response and stability is comprehensively studied. The jump avoidance parameter design of the nonlinear vibration isolation system is carried out, and the influence of the system parameters on the jump avoidance boundary is an-alyzed. It is verified by vibration test. The results show that linear damping, Coulomb damping and geometrically nonlinear viscous damping have positive effects on reducing the amplitude-frequency response peaks and improving system stability of soft and hard vibration isolation system. Due to the "locking" characteristic of Coulomb damping, the amplitude-frequency response of the hard vibration isolation system appears "frequency island", and the system stability cannot be effectively improved. However, Coulomb damping effectively reduces the amplitude-frequency response peak of the soft vibration isolation system and improves system stability; Geometrically nonlinear viscous damping has a significant effect on reducing the peak amplitude and frequency response and improving the stability of the system without the phenomenon of "frequency island". The design of the jump avoidance parameters of the nonlinear vibration isolation system and the obtained change rule of the jump avoidance parameters have an important guiding role in the parameter design of the nonlinear vibration isolation system.

Key words: nonlinear vibration isolation; amplitude-frequency response; geometric nonlinear viscous damping; jumping avoidance parameter design; vibration test

作者简介:刘海超(1992—),男,博士研究生。电话:15524036960;E-mail:liu\_hc\_9206@163.com。 通讯作者:金映丽(1972—),女,博士,教授,博士生导师。E-mail:1276283871@qq.com。