

采用向量式有限元的拉索参数振动模拟

段元锋¹, 黄嘉思², 邓南¹, 王素梅³, 应祖光⁴, 何闻⁵

(1. 浙江大学建筑工程学院, 浙江 杭州 310058; 2. 中国电建集团华东勘测设计研究院有限公司, 浙江 杭州 311122; 3. 国家轨道交通电气化与自动化工程技术研究中心(香港分中心), 香港 999077; 4. 浙江大学航空航天学院力学系, 浙江 杭州 310027; 5. 浙江大学浙江省先进制造技术重点实验室, 浙江 杭州 310027)

摘要: 拉索的参数振动主要是由连接拉索端部的结构振动引起的, 当端部振动频率与拉索的自振频率满足一定倍数关系时, 拉索端部激励容易激发较大拉索参数振动。由于参数振动存在复杂的非线性振动特征, 传统的解析方法难以应用于实际工程。本文发展了模拟拉索参数振动的向量式有限元方法, 对斜拉索在动边界条件下的振动进行分析, 对比控制方程的数值解以验证结果的准确性。并基于向量式有限元模型对端部支座轴向运动激励下产生的主共振区和主参数共振区特性进行讨论, 分别研究了拉索倾角、阻尼比以及风荷载协同作用对参数振动的影响。研究结果表明向量式有限元可以有效模拟复杂工况下的拉索参数振动, 有利于实际工程应用。

关键词: 斜拉索; 参数振动; 振动模拟; 向量式有限元; 数值解

中图分类号: U448.27 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2023)01-0188-08

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2023.01.020

引言

随着大跨度斜拉桥的发展, 拉索的长度不断增加。拉索作为斜拉桥的主要受力构件, 由于其具有柔度大、质量轻、阻尼小等特点, 在工程中极易受到风、雨等荷载或者端部支座运动等激励而引发大幅振动, 对桥梁的安全性能和日常运营构成很大威胁。在实际工程中, 当桥梁结构的自振频率与拉索的自振频率满足一定倍数关系时, 任意微小的扰动将会激发较大振幅的拉索参数振动, 其往往表现为剧烈拍振, 容易引发拉索疲劳、断裂等问题。

国内外对拉索参数振动的主要研究手段分为理论分析和试验验证。Tagata^[1]对无垂度拉索的第一阶参数振动进行研究, 导出了无量纲的 Mathieu 方程; Takahashi^[2]针对多自由度参数振动系统, 提出了系统稳定性分析的解析法, 并通过研究水平悬索的参数振动响应, 得到了不同垂跨比和多模态耦合时拉索不稳定区的变化规律; Perkins^[3]应用多尺度法求解了拉索面内、外一阶模态的响应, 并通过实验验证了面内振动能够激发面外大幅振动的现象; Rega^[4-5]采用理论和实验方法对参数振动展开研究, 对在不同激励幅值和激励频率的端部激励下水平悬索的动力特性进行探究, 分析了斜拉

索垂度对参数振动的影响; Ying 等^[6]建立了由上端水平激励与下端竖向激励的斜拉索模型, 分析了拉索分别在简谐激励和随机激励下的稳定性, 讨论了不同斜拉索参数下的稳定区面积变化情况; 亢战等^[7]将桥面简化为质量弹簧系统, 拉索简化为一个集中质量, 建立了索-桥耦合双自由度模型, 采用多尺度法求解主参数共振结果, 阐述了参数振动具有明显的拍振现象; Zhao 等^[8-9]建立了单索-梁、双索-梁、多索-梁和索-拱的运动学控制方程, 应用数值方法分析了拉索非线性振动存在的分岔和混沌现象; 陈水生等^[10]考虑了拉索垂度和几何非线性的影响, 对斜拉索在轴向激励作用下的非线性振动方程进行求解, 研究了面内参数振动响应特性; 汪峰等^[11]建立了阻尼器-斜拉索-塔梁组合结构体系的耦合参数振动模型, 研究了黏滞阻尼器相关参数对参数振动的影响规律; 孙测世^[12]对单索-梁模型进行了实验研究, 观测到斜拉索在端部激励频率变化下的“跳跃”过程、面内外振动耦合以及“气圈”运动等现象。然而, 现有方法对拉索参数振动问题的简化条件较多, 解析方法繁冗, 难以进行实际工程应用。

丁承先等^[13]提出的向量式有限元法 (Vector Form Intrinsic Finite Element method, VFIFE) 将结构形态离散为一个用无质量单元相互连接的质点

收稿日期: 2021-04-28; 修订日期: 2021-11-30

基金项目: 国家重点研发计划项目(2019YFC1509503, 2018YFE0125400, 2019YFE0112600); 国家自然科学基金资助项目(U1709216, 52078459); 浙江省自然科学基金资助项目(LHZ23E080003)。

群,以物理模式来描述结构的力学行为。向量式有限元无需组集整体刚度矩阵,适用于柔性结构的大变形、弹塑性、断裂等复杂的非线性或不连续问题的分析,可实现对整体结构真实行为的仿真模拟。倪秋斌等^[14]应用向量式有限元建立了斜拉索-阻尼器系统模型,准确地模拟阻尼器对斜拉索的振动控制作用;Duan等^[15-16]和Wang等^[17]对三维车-轨-桥系统的耦合振动问题进行研究,搭建基于向量式有限元的风-车-轨-桥耦合系统计算平台,分析了斜拉桥在移动列车和风载作用下的动力特性以及列车的脱轨风险;Duan等^[18-21]基于向量式有限元开展了裂纹扩展的模拟研究;采用纤维单元建立了斜拉桥全桥模型,模拟了斜拉桥倒塌全过程;提出了基于向量式有限元和FPGA硬件的实时混合试验框架,针对斜拉索阻尼器系统进行了虚拟实时混合试验;利用二维拱桥VFIFE模型进行数据训练,并采用卷积神经网络完成了吊杆损伤识别。向量式有限元的求解步骤可以集成为简单且系统化的程序,还被广泛应用于高层建筑^[22]、复杂空间结构^[23-26]以及船舶工程^[27]等各个领域。然而,采用向量式有限元方法对拉索参数振动的模拟研究尚未开展。因此本文通过对比向量式有限元和运动控制方程对拉索参数振动的求解结果,验证向量式有限元模拟的准确性,并基于向量式有限元模型,对拉索倾角、阻尼系数及风荷载对参数振动的影响进行讨论,表明了向量式有限元方法对参数振动模拟的高效性和便捷性。

1 拉索参数振动控制方程

根据斜拉索的材料特性和受力情况,忽略斜拉索的抗弯刚度、扭转和剪切效应,假定变形的本构关系服从胡克定律,建立两端为动边界条件下的斜拉索数值模型,如图1所示。图1中, L 表示斜拉索长度, f 表示斜拉索垂度, θ 表示斜拉索倾角。整体坐标系用XYZ表示,局部坐标系用xyz表示; $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ 分别表示端部水平、竖向和面外位移; $U(t)$, $W(t)$, $V(t)$ 分别表示端部轴向、横向和面外位移;

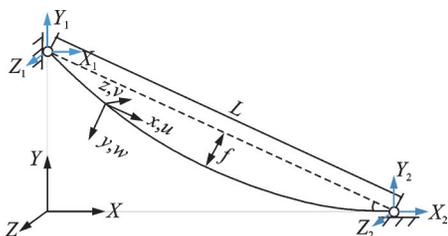


图1 两端为动边界条件下的斜拉索模型

Fig. 1 Stayed cable model under the dynamic boundary condition in both ends

$u(x, t)$, $w(x, t)$, $v(x, t)$ 分别表示斜拉索轴向、横向和面外的动位移。

根据拉索微元受力平衡,推导拉索的运动控制方程,将斜拉索的振动分为两个部分:由端部激励引起的准静态运动和各阶模态参与的模态运动。因此,拉索的横向动位移 $w(x, t)$ 和面外动位移 $v(x, t)$ 可以表示为:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \Phi q_w + \Psi_y A_y, v(x, t) = \Phi q_v + \Psi_z A_z \quad (1) \\ \Phi &= \sqrt{2} \times [\sin(\pi x), \sin(2\pi x), \dots, \sin(N\pi x)], \\ q_w &= [q_{w1}, q_{w2}, \dots, q_{wN}]^T, \\ q_v &= [q_{v1}, q_{v2}, \dots, q_{vN}]^T, \\ \Psi_y &= [(x-1)\sin\theta, -(x-1)\cos\theta, -x\sin\theta, x\cos\theta], \\ \Psi_z &= [1-x, x], \\ A_y &= [X_1, Y_1, X_2, Y_2]^T, \\ A_z &= [Z_1, Z_2]^T \end{aligned} \quad (2)$$

式中 Φ 为拉索振动的模态矩阵; q_w 和 q_v 分别为面内和面外振动的广义时间坐标矩阵; Ψ_y 和 Ψ_z 分别为面内和面外端部激励的振动模态矩阵; A_y 和 A_z 分别为面内和面外端部激励的广义时间坐标矩阵。

采用 Galerkin 法得到拉索的无量纲离散控制方程^[12]:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_w + c_y \dot{q}_w + (1/\pi^2 + a) p_1 q_w + a p_6 &= f_1, \\ \ddot{q}_v + c_z \dot{q}_v + (1/\pi^2 + a) p_1 q_v &= f_2 \end{aligned} \quad (3)$$

其中:

$$\begin{aligned} p_1 &= \int_0^1 \Phi'^T \Phi' d\bar{x}, p_6 = \int_0^1 \Phi'^T \bar{y}' d\bar{x}, \\ p_2 &= \int_0^1 \Phi^T \Psi_y d\bar{x}, p_3 = \int_0^1 \Phi^T \Psi_z d\bar{x}, \\ p_4 &= \int_0^1 \Psi_y'^T \Psi_y' d\bar{x}, p_5 = \int_0^1 \Psi_z'^T \Psi_z' d\bar{x}, \\ f_1 &= -p_2 \ddot{A}_y - c_y p_2 \dot{A}_y, f_2 = -p_3 \ddot{A}_z - c_z p_3 \dot{A}_z, \\ a &= \frac{\alpha}{\pi^2} \left(A_x + a_1 + \frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{2} a_3 \right) \end{aligned} \quad (4)$$

其中:

$$\begin{aligned} a_1 &= p_6^T q_w + \int_0^1 \bar{y}' \Psi_y' d\bar{x} \cdot A_y, \\ a_2 &= q_w^T p_1 q_w + A_y^T p_4 A_y + 2q_w^T \int_0^1 \Phi'^T \Psi_y' d\bar{x} \cdot A_y, \\ a_3 &= q_v^T p_1 q_v + A_z^T p_5 A_z + 2q_v^T \int_0^1 \Phi'^T \Psi_z' d\bar{x} \cdot A_z, \\ y &= -\frac{mgL^2 \cos\theta}{2T_0} \cdot \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L} \right) \cdot \\ &\quad \left[1 - \frac{mgL \sin\theta}{3T_0} \left(1 - 2\frac{x}{L} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_x &= (X_2 - X_1) \cos\theta - (Y_2 - Y_1) \sin\theta, \\ U &= X \cos\theta - Y \sin\theta. \end{aligned}$$

式中 c_1 和 c_2 分别为拉索面内和面外的阻尼系数。

2 向量式有限元拉索参数振动模型

2.1 模型建立

根据向量式有限元的定义,斜拉索离散为无量单元连接的质点群 $M=[m_1, m_2, \dots, m_n]$,拉索作为柔性构件,主要受轴向力作用,可以忽略抗弯刚度的影响,故采用杆单元作为质点间的连接,如图 2 所示。由牛顿第二定律,每个质点的平衡方程为:

$$m_i \ddot{u}_i = P_i + f_i \quad (5)$$

式中 m_i, \ddot{u}_i, P_i 和 f_i 分别为第 i 个质点的质量、加速度、外荷载和内力。

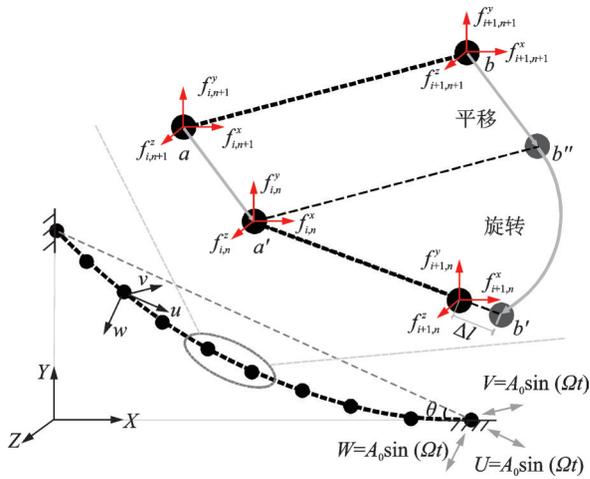


图 2 向量式有限元的斜拉索模型

Fig. 2 Stayed cable model based on VFIFE

将斜拉索振动轨迹用一组时间点 t_0, t_1, \dots, t_f 上的点值描述,并假设分析过程是一组连接的时段,如时段 $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ 称为一个途径单元。在途径单元内,假设杆单元从 t_{n+1} 时刻的位置经历一个虚拟的逆向刚体运动,从 ab 平移至 $a'b'$ 形态,再以 a' 为轴心逆向旋转,此时杆单元形态与 t_n 时刻 $a'b'$ 形态仅存在长度 Δl 的差异,由于途径单元中的杆单元几何变化小,小变形和小刚体运动的纯变形和内力可以用微应变和工程应力计算,杆单元内力的增量 Δf_e 为:

$$\Delta f_e = EA \frac{(l_{n+1} - l_n)}{l_n} = \frac{EA}{l_n} \Delta l \quad (6)$$

式中 EA 为拉索的轴向刚度; l_n 和 l_{n+1} 分别表示相应时刻下杆单元的长度。

拉索一般不承受压力,对连接单元内力迭代公式进行修正,在积分步长内,一旦计算的单元内力 f_e 出现负值,定义此刻的单元内力为 0。通常单元划分足够小时,就不会出现负值,即便出现,数值也很小。

$$f_{e,n+1} = \begin{cases} f_{e,n} + \Delta f_e \\ 0, f_{e,n} < -\Delta f_e \end{cases} \quad (7)$$

得到杆单元内力增量后,通过虚拟的正向运动使杆单元回到 t_{n+1} 时刻的位置,此时仅杆单元内力方向作转动,再通过力的平衡关系得到 t_{n+1} 时刻各杆单元作用于某质点 i 的内力 $f_{i,n+1}$:

$$f_{i,n+1} = \sum_e (-1)^j f_{e,n+1}, j=1, 2 \quad (8)$$

式中 $j=1$ 表示该质点为单元定义的起点; $j=2$ 表示该质点为单元定义的终点。

本文采用中央差分法作为向量式有限元的积分方法,在每个积分步长内求解都可以分为两个过程。

① 根据每个质点前一时刻的位置,通过中央差分法分别计算当前时刻各个质点的位置 $u_{i,n+1}$:

$$u_{i,n+1} = \frac{(P_{i,n} + f_{i,n})h^2}{m_i} + 2u_{i,n} - u_{i,n-1} \quad (9)$$

式中 h 表示相邻两个时刻间的时长,即积分步长。

② 根据当前时刻每个质点的位置,通过虚拟的逆向运动,平移和旋转单元求得纯变形,计算各个单元的内力,并组集每个质点所连接的单元内力,求解当前时刻各个质点所受的合内力。

2.2 对比验证

斜拉索的参数为:长度 $L=129.2$ m,截面积 $A=71.97$ cm²,单位质量 $\rho=58.9$ kg/m,弹性模量 $E=200$ GPa,初始索力 $T_0=3300$ kN;前 3 阶自振频率分别为: $\omega_1=5.84$ rad/s, $\omega_2=11.50$ rad/s, $\omega_3=17.28$ rad/s。通过对比控制方程数值解和向量式有限元求解得到的拉索位移时程图,验证向量式有限元在求解拉索在端部支座激励下振动的正确性。由于拉索的离散控制方程(方程(3))的数值迭代求解速率随模态矩阵维度的扩增呈指数增长,本文采用考虑前 10 阶模态进行计算。假设各个方向的初始速度均为 0,激励幅值 $A_0=0.05$ m,仅在水平拉索一端施加支座的轴向简谐运动激励 $U=A_0 \sin \Omega t$,得到拉索横向相对位移 $\Delta w(x, t)$ 的时程曲线,如图 3 所示。

控制方程数值迭代得到的拉索横向相对位移时程曲线均与向量式有限元求解得到的曲线拟合良好。控制方程数值求解对每一阶模态分开考虑,需要定义每阶模态对应的广义时间坐标的初始量;而向量式有限元的求解是对整个拉索系统综合考虑,仅需要定义拉索上各个质点的初始状态,即初始位移、速度和加速度。相比于应用控制方程解决高阶问题中需要考虑多阶模态而造成的求解效率降低及产生的初值敏感度等问题,向量式有限元对于模拟拉索在支座激励下的振动有着更佳的适用性,建模和初始条件的定义更符合实验和实际工程情况。

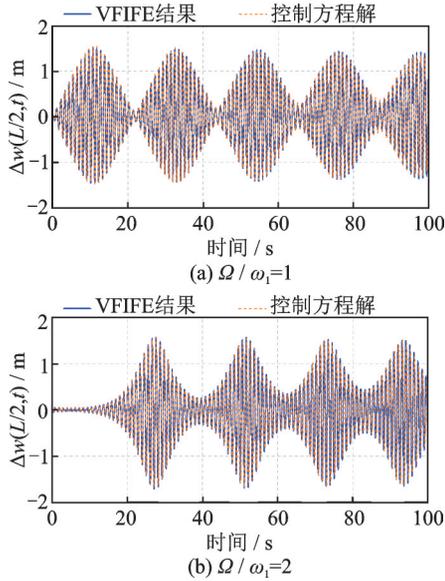


图 3 端部支座激励下拉索位移时程图
Fig. 3 The displacement time history curves of the cable under axial support excitation

2.3 支座轴向激励下的共振区研究

采用有垂度的水平拉索模型作为分析对象,拉索第一阶模态阻尼比取 $\xi_1=0.05\%$,仅考虑面内振动,对拉索的一端支座施加轴向简谐运动 $U=A_0\sin(\Omega t)$,通过改变激励频率 Ω 和激励幅值 A_0 ,得到拉索各个位置横向相对位移最大值 Δw_{\max} 的频响曲线,如图 4 所示。

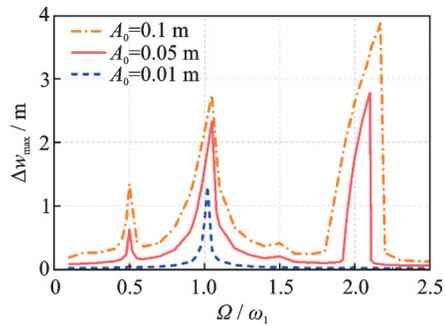


图 4 支座轴向运动下的频响曲线图
Fig. 4 The frequency response curves under axial support excitation

当激励频率 Ω 等于拉索一阶频率 ω_1 时,拉索出现大幅度振动,即使激励幅值仅为 0.01 m,也可以激发出约为 1.3 m 的幅值,一般将 $\Omega/\omega_1=1$ 附近频响曲线围成的面域定义为主共振区。当激励幅值较小时,主共振区最为显著,随着激励幅值的增大,其他的共振区域逐渐明显。与参数振动相关文献[10]和[28]中观察到的现象相同,增大激励幅值后, $\Omega/\omega_1=0.5$ 出现了峰值,对应的共振区域称为 2 倍超谐波共振区,其对应的 Δw_{\max} 小于主共振区,频率范围较窄,说明该共振区的激发条件较为苛刻。当激励幅值增

大至一定值后, $\Omega/\omega_1=2$ 时激发的共振区域出现,称为 1/2 亚谐波共振区,也称作主参数共振区,其频率范围更宽,且随激励幅值增大, Δw_{\max} 超过主共振区,逐渐占据主导,成为最主要的共振区域。

取激励幅值 $A_0=0.05$ m,研究主共振区和主参数共振区的拉索 1/4 跨的位移时程曲线,如图 5 所示。两种激励频率比下的拉索都出现拍振现象,采用包络线拟合波包轮廓,在主共振区中,波包形状较圆润,包络线与正弦曲线接近,包络线斜率随着振幅增大而减小,振幅缓慢增大至最大值后又缓慢减小;而在主参数共振区中,波包包络线与指数曲线接近,包络线斜

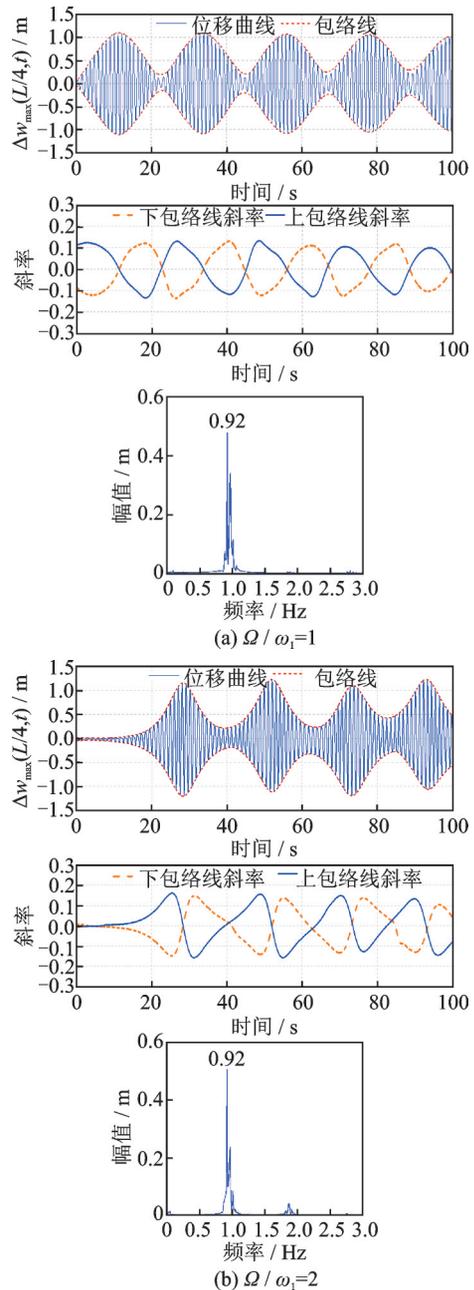


图 5 支座轴向运动下拉索位移及其包络线斜率时程图和傅里叶频率谱
Fig. 5 The time history curves and FFT spectrums of the cable displacement and the slope of envelope lines under axial support excitation

率随着振幅增大而增大。起振前经历一段小幅振动的累积过程后,振幅开始迅速增大,类似于不稳定发散,但其达到最大值后又迅速减小。对位移时程曲线进行快速傅里叶变换分析,结果显示:在两种不同激励频率下振动成分均为第一阶模态,说明了参数振动有别于强迫振动,2倍于拉索1阶自振频率的激励频率比同样能够激发拉索以1阶模态主导的大幅振动,当激励幅值不断增大,对应幅值甚至会超越主共振区的幅值。因此,在实际工程中,可以通过分析监测数据的波包形状和频谱成分判别参数振动的发生。

3 参数振动影响因素分析

3.1 拉索倾角对参数振动的影响

斜拉索的倾角影响着斜拉索的垂度值,而垂度会加强拉索的几何非线性,进一步影响横向振动。随着斜拉索倾角提高,拉索垂度不断减小,当倾角为 90° 时,垂直索相当于一根张紧弦。选取不同的倾角 θ 进行研究,在拉索中点施加5 mm的初始横向位移扰动,假定拉索底部支座始终沿拉索的轴向进行简谐运动 $U=A_0\sin(\Omega t)$,取激励幅值 $A_0=0.05$ m, $\xi_1=0.05\%$,选取激励频率比 $\Omega/\omega_1=0.5, 1$ 和 2 ,分别应用向量式有限元和控制方程数值解求解响应,提取每个激励频率下斜拉索各个位置横向相对位移的最大值 Δw_{\max} 绘制响应曲线,如图6所示。

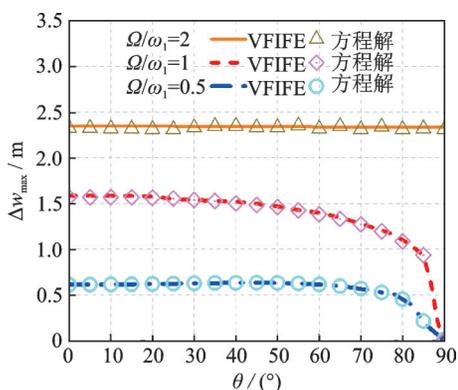


图6 支座轴向激励下不同倾角斜拉索的最大位移曲线
Fig. 6 The maximal displacement curves of the stayed cable with different inclination angle under axial support excitation

当激励频率比 $\Omega/\omega_1=0.5$ 和 1 时,拉索振动幅值与垂度值相关, $\Omega/\omega_1=1$ 时, Δw_{\max} 在 $\theta < 50^\circ$ 时,基本保持在一个水平,随着倾角继续增大,拉索垂度继续减小,拉索逐渐接近于张紧弦,初始扰动在该激励条件下无法被大幅激发, Δw_{\max} 迅速减小并逐渐趋于0;当激励频率比 $\Omega/\omega_1=2$ 时,即斜拉索处于参数共振区, Δw_{\max} 维持在一个常数值,不随倾角变化改变,

说明了拉索一旦满足参数振动条件,微小的扰动都会被激发为大幅振动,倾角对振动幅值的影响微弱。

3.2 阻尼比对参数振动的影响

采用有垂度的水平拉索模型进行阻尼比对参数振动的影响研究,选取拉索第1阶模态阻尼比 $\xi_1=0.5\%, 1\%, 1.5\%$ 和 2.5% ,计算激励频率比 $\Omega/\omega_1=1$ 和 2 时,拉索在支座轴向简谐运动下的各个位置横向相对位移最大值 Δw_{\max} ,并绘制 Δw_{\max} 与激励幅值 A_0 的关系曲线,如图7所示。结果表明向量式有限元的模拟结果与控制方程的数值解拟合较好。

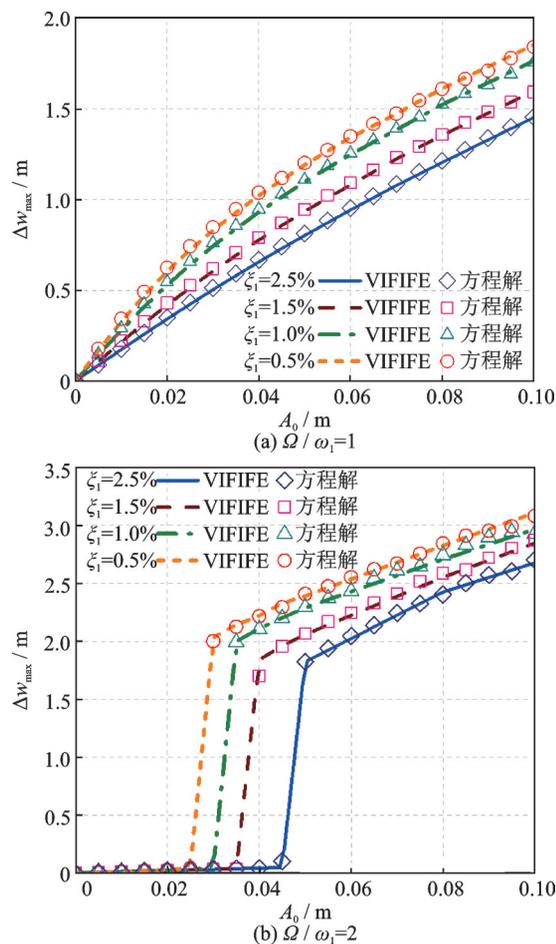


图7 支座轴向激励下不同阻尼比拉索的最大位移曲线
Fig. 7 The maximal displacement curves of the cable with different damping ratio under axial support excitation

当 $\Omega/\omega_1=1$ 时, Δw_{\max} 随着激励幅值的增大而平缓提高,增加拉索阻尼比时, Δw_{\max} 随之减小,阻尼比越大,减振效果越明显。当 $\Omega/\omega_1=2$ 时,曲线存在一个明显跳跃点,在激励幅值较小时,参数振动未被激发, Δw_{\max} 处于较小水平,而一旦激励幅值大于拐点对应的临界值,参数振动被激发, Δw_{\max} 急速增大,到达一定值后趋于平稳,这说明了在参数振动存在起振条件,只有激励幅值达到一定水平,才会激发出大幅振动;对比不同阻尼比下的响应曲线,增大系统阻

尼比同样可以减小 Δw_{\max} ,并且增大临界激励幅值,延缓参数振动的发生。

3.3 风荷载对参数振动的影响

桥梁的风致振动会引发拉索连接端的支座运动,从而进一步激发拉索参数振动,同时面外方向的风荷载常会引起拉索面内、外振动耦合。因此,需要研究斜拉索同时在风荷载和端部支座轴向运动作用下的振动情况。

对于面外风荷载作用于拉索上的力,本文仅考虑拖曳力 F_D 。假设斜拉索底端平均风速 $U=20\text{ m/s}$,采用考虑风速沿高度发生变化的 Kaimal 谱生成风速场。以 $\theta=45^\circ$ 的斜拉索为例,拉索第 1 阶模态阻尼比 $\xi_1=0.05\%$,斜拉索中点面外方向施加 5 mm 的初始位移扰动,对风场中的斜拉索在底部支座轴向简谐运动的主共振和主参数共振进行研究,激励幅值 A_0 取 0.03 m。

如图 8 所示,当 $\Omega/\omega_1=1$ 时,拉索在仅有底部支座轴向的激励下只发生面内大幅拍振,面内相对最大位移 Δw_{\max} 约为 1.25 m;当面外风荷载和底部支座轴向激

励同时作用时,面外进行小幅度振动,而面内的拍振被较好地抑制,振动较快地进入稳定状态, Δw_{\max} 约为 1.1 m,相较于仅底部支座轴向激励时略有减少。当 $\Omega/\omega_1=2$ 时,端部支座位移激励下发生主参数振动,面外微小扰动被激发且占据主导,面外相对最大位移 Δv_{\max} 约为 1.44 m;当与面外风荷载协同作用时,拉索面外拍振也同样被较好地抑制,面外振动更早地达到峰值, Δv_{\max} 约为 1.32 m,相较于仅底部支座轴向激励时的 Δv_{\max} 同样有所减小,同时面内振动的拍振消失,在振幅增大至 0.4 m 左右时,作稳幅振动。表 1 中计算了各工况下拉索跨中位移响应的均方根(RMS),通过对比,面外风荷载和底部支座轴向激励联合作用时,风荷载能够起到扰动效应,削弱支座激励下拉索的拍振,使振动更快地进入稳幅振动。这一现象与 Luongo 等^[29]应用多尺度法、李永乐等^[30]应用数值法对风雨振和索端激励联合作用得到的结果相一致。当进一步增加斜拉索底端平均风速时,研究发现风荷载的增大仅能抑制拍振,对于参数振动幅值的削弱十分有限,且在高风速状态下,拉索面外产生大变形,振动对结构安全性构成更大的威胁。

表 1 拉索跨中位移响应均方根(RMS)

Tab.1 The RMS of the displacement response at the mid-span of the cable

位移方向	RMS/m			
	仅支座轴向激励		风荷载联合作用	
	$\Omega/\omega_1=1$	$\Omega/\omega_1=2$	$\Omega/\omega_1=1$	$\Omega/\omega_1=2$
面内响应	0.56	0.29	0.54	0.21
面外响应	0.01	0.57	0.12	0.67

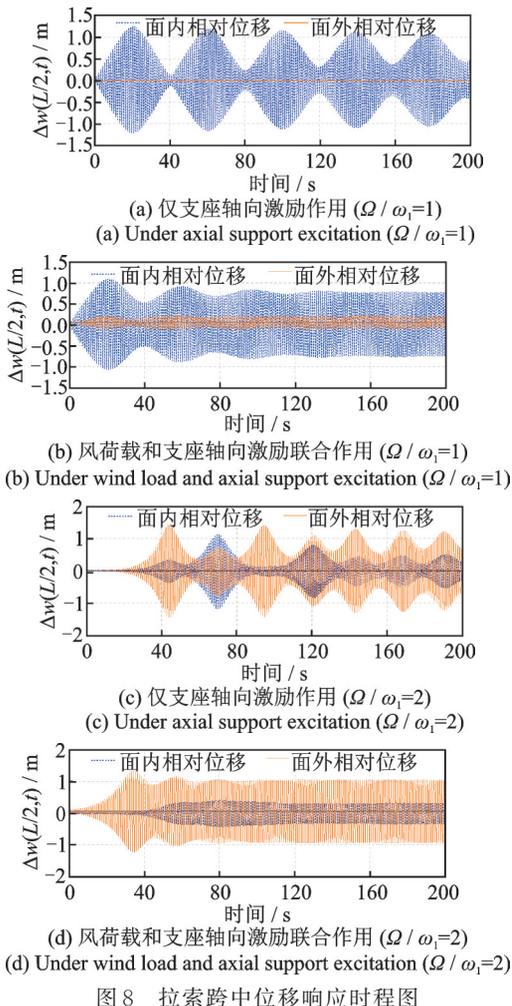


Fig. 8 The time history curves of displacement response at the mid-span of the cable

4 结 论

本文发展了一种求解参数振动响应的向量式有限元方法,可以考虑拉索倾角、阻尼比的影响,以及风、支座激励等多种荷载的影响。发现了参数振动响应时程包络线区别于一般共振的斜率特征,为通过分析拉索振动监测数据的波包形状判定参数振动提供了一种判定方法及其理论依据。探明了倾角、阻尼比以及风荷载与制作激励协同作用对参数振动的影响规律。得出如下结论:

- (1) 增大拉索倾角仅影响主共振区的振动幅值,对主参数共振区的振动幅值影响微弱;
- (2) 增大拉索阻尼比可以减小主共振区和主参数共振区的振动幅值,同时提高了激发参数振动对应的临界激励幅值;
- (3) 面外风荷载的协同作用能够削弱支座激励下拉索的拍振现象,但随风荷载增大,会加剧拉索变形,对拉索的安全性能构成损害;

(4)与共振情况不同,参数振动响应时程包络线斜率随振幅增大而增大,可以据此通过分析拉索振动监测数据的波包形状判定参数振动;

(5)向量式有限元计算方法简单,与迭代运动方程进行数值求解方法相比,可根据需要灵活调整外荷载及材料特性,可以有效模拟支座运动和多种复杂荷载联合作用下的拉索振动。

参考文献:

- [1] Tagata G. Harmonically forced, finite amplitude vibration of a string [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1977, 51(4): 483-492.
- [2] Takahashi K. Dynamic stability of cables subjected to an axial periodic load [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, 144(2): 323-330.
- [3] Perkins N C. Modal interactions in the non-linear response of elastic cables under parametric/external excitation [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1992, 27(2): 233-250.
- [4] Rega G. Nonlinear vibrations of suspended cables-Part I: modeling and analysis [J]. *Applied Mechanics Reviews: an Assessment of the World Literature in Engineering Sciences*, 2004, 57(6): 443-478.
- [5] Rega G. Nonlinear vibrations of suspended cables-Part II: deterministic phenomena [J]. *Applied Mechanics Reviews: an Assessment of the World Literature in Engineering Sciences*, 2004, 57(6): 479-514.
- [6] Ying Z G, Ni Y Q, Duan Y F. Stochastic stability control analysis of an inclined stay cable under random and periodic support motion excitations [J]. *Smart Structures and Systems*, 2019, 23(6): 641-651.
- [7] 亢战, 钟万勰. 斜拉桥参数共振问题的数值研究 [J]. *土木工程学报*, 1998, 31(4): 14-22.
Kang Zhan, Zhong Wangxie. Numerical study on parametric resonance of cable in cable stayed bridge [J]. *China Civil Engineering Journal*, 1998, 31(4): 14-22.
- [8] Zhao Y Y, Wang L H, Chen D L, et al. Non-linear dynamic analysis of the two-dimensional simplified model of an elastic cable [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 255(1): 43-59.
- [9] 赵跃宇, 蒋丽忠, 王连华, 等. 索-梁组合结构的动力学建模理论及其内共振分析 [J]. *土木工程学报*, 2004, 37(3): 69-72.
Zhao Yueyu, Jiang Lizhong, Wang Lianhua, et al. The dynamical modelling theory and internal resonance of cable-beam composite structure [J]. *China Civil Engineering Journal*, 2004, 37(3): 69-72.
- [10] 陈水生, 孙炳楠, 胡隽. 斜拉索受轴向激励引起的面内参数振动分析 [J]. *振动工程学报*, 2002, 15(2): 144-150.
Chen Shuisheng, Sun Bingnan, Hu Jun. Analysis of stayed-cable vibration caused by axial excitation [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2002, 15(2): 144-150.
- [11] 汪峰, 彭章, 刘章军. 设置黏滞阻尼器的斜拉索参数振动模型及控制分析 [J]. *振动工程学报*, 2019, 32(6): 977-985.
Wang Feng, Peng Zhang, Liu Zhangjun. Parametric vibration model and control analysis of cable stayed dampers with viscous dampers [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2019, 32(6): 977-985.
- [12] 孙测世. 大跨度斜拉桥非线性振动试验研究 [D]. 长沙: 湖南大学, 2015.
Sun Ceshi. Experimental study of nonlinear vibrations of long-span cable-stayed bridge [D]. Changsha: Hunan University, 2015.
- [13] 丁承先, 段元锋, 吴东岳. 向量式结构力学 [M]. 北京: 科学出版社, 2012.
Ting E C, Duan Yuanfeng, Wu Dongyue. *Vector Mechanics of Structures* [M]. Beijing: Science Press, 2012.
- [14] 倪秋斌, 段元锋, 高博青. 采用向量式有限元的斜拉索振动控制仿真 [J]. *振动工程学报*, 2014, 27(2): 238-245.
Ni Qiubin, Duan Yuanfeng, Gao Boqing. Vector form intrinsic finite element (VFIFE) based simulation on vibration control of stay cables [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2014, 27(2): 238-245.
- [15] Duan Y F, Wang S M, Wang R Z, et al. Vector form intrinsic finite-element analysis for train and bridge dynamic interaction [J]. *Journal of Bridge Engineering*, 2018, 23(1): 4017126.
- [16] Duan Y F, Wang S M, Yau J D. Vector form intrinsic finite element method for analysis of train-bridge interaction problems considering the coach-coupler effect [J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2019, 19(2): 1-29.
- [17] Wang S M, Yau J D, Duan Y F, et al. Prediction of crosswind-induced derailment of train-rail-bridge system by Vector Mechanics [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2020, 146(12): 4020132.
- [18] Duan Y F, Wang S M, Wang R Z, et al. Vector form intrinsic finite element based approach to simulate crack propagation [J]. *Journal of Mechanics*, 2017, 33(6): 797-812.
- [19] Duan Y F, He K, Zhang H M, et al. Entire-process simulation of earthquake-induced collapse of a mockup cable-stayed bridge by vector form intrinsic finite element (VFIFE) method [J]. *Advances in Structural Engineering*, 2014, 17(3): 347-360.
- [20] Duan Y F, Tao J J, Zhang H M, et al. Real-time hybrid simulation based on vector form intrinsic finite element and field programmable gate array [J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2019, 26(1): e2277.
- [21] Duan Y F, Chen Q Y, Zhang H M, et al. CNN-based damage identification method of tied-arch bridge using

- spatial-spectral information [J]. *Smart Structures and Systems*, 2019, 23(5): 507-520.
- [22] Zhang H M, Shan Y F, Duan Y F, et al. Vector mechanics-based simulation of large deformation behavior in RC shear walls using planar four-node elements [J]. *Structural Engineering and Mechanics*, 2020, 74(1): 1-18.
- [23] Yuan X F, Chen C, Duan Y F, et al. Elastoplastic analysis with fine beam model of vector form intrinsic finite element[J]. *Advances in Structural Engineering*, 2018, 21(3): 365-379.
- [24] 陈冲,袁行飞,段元锋,等.基于精细梁模型的向量式有限元分析[J].*土木建筑与环境工程*, 2015, 37(2): 1-7. Chen Chong, Yuan Xingfei, Duan Yuanfeng, et al. Vector form intrinsic finite element analysis based on fine beam model[J]. *Journal of Civil and Environmental Engineering*, 2015, 37(2): 1-7.
- [25] 向新岸,董石麟,冯远,等.基于向量式有限元的T单元及其在张拉索膜结构中的应用[J].*工程力学*, 2015, 32(6): 62-68. Xiang Xinan, Dong Shilin, Feng Yuan, et al. T-element based on vector form intrinsic finite element and its application to tensile cable-membrane structures [J]. *Engineering Mechanics*, 2015, 32(6): 62-68.
- [26] 朱明亮,董石麟.向量式有限元在索穹顶静力分析中的应用[J].*工程力学*, 2012, 29(8): 236-242. Zhu Mingliang, Dong Shilin. Application of vector form intrinsic finite element method to static analysis of cable domes[J]. *Engineering Mechanics*, 2012, 29(8): 236-242.
- [27] 胡狄,何勇,金伟良.基于向量式有限元的Spar扶正预测及强度分析[J].*工程力学*, 2012, 29(8): 333-339. Hu Di, He Yong, Jin Weiliang. VFIFE-based prediction and strength analysis on upending of spar[J]. *Engineering Mechanics*, 2012, 29(8): 333-339.
- [28] Liu M, Zheng L F, Zhou P, et al. Stability and dynamics analysis of in-plane parametric vibration of stay cables in a cable-stayed bridge with superlong spans subjected to axial excitation[J]. *Journal of Aerospace Engineering*, 2020, 33(1): 4019106.
- [29] Luongo A, Zulli D. Dynamic instability of inclined cables under combined wind flow and support motion[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 67(1): 71-87.
- [30] 李永乐,向活跃,何向东,等.索端激励对斜拉索风-雨致振动性能的影响[J].*工程力学*, 2012, 29(10): 218-224. Li Yongle, Xiang Huoyue, He Xiangdong, et al. Effects of excitation at cable ends on rain-wind-induced vibration of stayed cables [J]. *Engineering Mechanics*, 2012, 29(10): 218-224.

Vector form intrinsic finite element based simulation on parametric vibration of cables

DUAN Yuan-feng¹, HUANG Jia-st², DENG Nan¹, WANG Su-mei³, YING Zu-guang⁴, HE Wen⁵

(1.College of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China; 2.Huadong Engineering Corporation Limited, Power China, Hangzhou 311122, China; 3.National Rail Transit Electrification and Automation Engineering Technology Research Center (Hong Kong Branch), Hong Kong 999077, China; 4.Department of Mechanics, School of Aeronautics and Astronautics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China; 5.Zhejiang Province Key Laboratory of Advanced Manufacturing Technology, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: The parametric vibration is mainly caused by the vibration of the end supports connecting the cables. The cable is the main force component of the cable-stayed bridge. A small disturbance of the stayed cable will be motivated to oscillate with large amplitude once the natural frequency of cables meets a certain multiple relationship with that of support motion, which will cause security problems of bridges. As the complexity of nonlinear problems in the parametric vibration, the traditional analytical methods are unsuitable to be applied in engineering. Hence, the vibration analysis of the stayed cable under dynamic boundary conditions were conducted based on the Vector Form Intrinsic Finite Element method (VFIFE) in this paper and the accuracy of the results were validated by comparison with numerical solution of the governing equations. In addition, the characteristics of the main resonance regions and the main parameter resonance regions excited by axial support motion were discussed. The effects of the angle of inclination, damping ratio and the wind loads on parametric vibration were also analyzed, respectively. The results showed that the VFIFE method is enable to efficiently simulate the parametric vibration of cables under various conditions, which is benefit to engineering application.

Key words: stay cable; parametric vibration; vibration simulation; Vector Form Intrinsic Finite Element method; numerical solution

作者简介: 段元锋(1977—),男,博士,教授。电话:(0571)88208786; E-mail: ceifduan@zju.edu.cn。

通讯作者: 王素梅(1989—),女,博士,博士后研究员。电话:(00852) 95001255; E-mail: may.sm.wang@polyu.edu.hk。