

热环境下功能梯度圆柱壳振动特性分析

石先杰¹, 左 朋^{1,2}

(1. 中国工程物理研究院总体工程研究所, 四川 绵阳 621999;
2. 中国科学技术大学工程科学学院近代力学系, 安徽 合肥 230026)

摘要: 应用谱几何法研究了热环境下功能梯度圆柱壳自由振动和瞬态振动特性。采用边界弹簧技术模拟圆柱壳结构的任意经典或者弹性边界约束条件, 并结合一阶剪切变形理论建立了考虑温度场作用的功能梯度圆柱壳结构能量泛函。采用谱几何法与周向傅里叶谐波函数乘积和的形式描述圆柱壳的位移容许函数, 以克服不同边界条件下壳体位移函数微分在边界上存在的不连续问题。在此基础上, 将位移容许函数代入至结构能量泛函, 并采用 Ritz 法获得结构振动分析模型。数值分析结果表明, 所构建分析模型能够快速准确预测功能梯度圆柱壳结构的振动特性。研究了幂律指数、温度、载荷等参数对功能梯度圆柱壳振动特性的影响规律, 为其他数值分析方法研究提供参考。

关键词: 自由振动; 功能梯度圆柱壳; 热环境; 谱几何法; 瞬态响应

中图分类号: O326 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2023)02-0526-08

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2023.02.024

引 言

功能梯度圆柱壳是一种材料特性沿一个或多个方向呈现连续梯度变化的多功能复合材料结构, 这类结构通常由两种或者多种材料复合而成。自 20 世纪 80 年代功能梯度材料概念被提出以来, 国内外专家学者对功能梯度圆柱壳结构的动力学特性进行了广泛的研究, 提出了一系列的分析方法, 如波动法^[1-2]、改进傅里叶级数法^[3-6]、广义微分求积法^[7]、幂级数法^[8]、瑞利-里兹法^[9-13]以及辛方法^[14-15]等。

功能梯度材料的主要优点是具有良好的高温热承载能力, 由其制成的圆柱壳结构通常被应用于服役条件恶劣的工程领域, 例如航天飞行器舱体、热交换器管、聚变反应堆等离子体表面和发动机部件等。国内外专家学者对热环境下功能梯度圆柱壳结构动力学特性开展了研究工作。考虑到材料特性与温度环境的相关性, Haddadpour 等^[16]使用伽辽金方法求解了简支功能梯度圆柱壳自由振动特性。Malekzadeh 等^[17-18]采用微分求积法研究了热环境下旋转功能梯度圆柱壳自由振动问题。Zhang 等^[19]采用高阶剪切变形理论对功能梯度磁电热弹性圆柱壳进行了屈曲和振动特性分析。Li 等^[20]利用特征正交多项式来求解功能梯度阶梯圆柱壳的热振特性。

综上所述, 热环境下功能梯度圆柱壳振动特性

研究已取得了一定成果, 但大部分研究局限于自由振动, 对于热环境下功能梯度圆柱壳的瞬态振动响应特性研究相对匮乏。同时, 现有研究工作大多考虑经典边界条件, 弹性边界条件涉及较少。而在实际工程应用中, 复杂边界约束圆柱壳结构通常会受到各种形式的瞬态载荷作用, 使得结构产生复杂的振动现象。因此, 研究圆柱壳瞬态振动特性可为其结构设计和振动控制提供有益的指导。为此, 采用谱几何法^[21]和傅里叶谐波函数来描述圆柱壳结构位移容许函数, 并引入辅助函数来消除结构边界处存在的位移容许函数微分不连续问题。在此基础上, 基于一阶剪切变形理论构建了考虑任意边界约束和热环境影响的功能梯度圆柱壳的自由振动和瞬态振动分析模型, 并以文献解和有限元数值解为参考来验证所建立预测模型的准确性。此外, 还研究了功能梯度参数、边界条件以及温度场等参数对功能梯度圆柱壳瞬态振动响应的影响。

1 理论推导

1.1 结构模型描述

热环境下功能梯度圆柱壳结构模型如图 1 所示。R, L 和 h 分别表示圆柱壳的半径、长度和厚度; T 为温度值。正交坐标系 (x, θ , z) 位于圆柱壳结构的中面上, x, θ 和 z 分别表示圆柱壳的轴向、周向和

径向方向。壳体在 x, θ 和 z 方向上的位移分别用 $U(x, \theta, z, t)$, $V(x, \theta, z, t)$ 和 $W(x, \theta, z, t)$ 表示,其中符号 t 表示时间变量。此外,通过在圆柱壳结构两端均匀设置边界约束弹簧来模拟不同的结构边界约束条件,符号 k_{hu} , k_{hv} 和 k_{hw} 表示约束圆柱壳平移位移的约束弹簧刚度,符号 k_{bx} 和 $k_{b\theta}$ 表示约束壳体旋转位移的约束弹簧刚度。下标“0”和“L”分别代表圆柱壳 $x=0$ 和 $x=L$ 的端面。

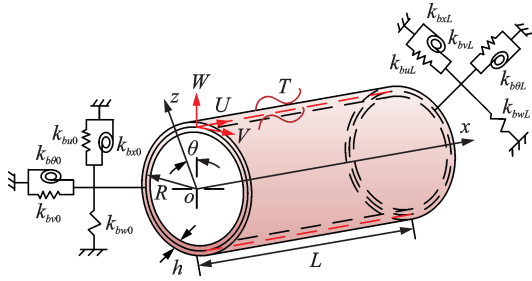


图1 热环境下功能梯度圆柱壳结构模型示意图

Fig.1 Schematic diagram of the structural model of a functionally graded cylindrical shell under thermal environment

文中所研究的功能梯度材料在热环境中具有温度依赖性,其材料属性 P (包括弹性模量 E 、泊松比 ν 、质量密度 ρ 、热膨胀系数 α)在温度 T 影响下有着如下的关系^[16]:

$$P(T) = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \quad (1)$$

式中 P_0, P_{-1}, P_1, P_2 和 P_3 分别表示材料的温度相关系数。用 P_1 和 P_0 来表示壳体内外表面的材料属性,则其在厚度方向 z 呈现梯度变化^[22]:

$$P(T, z) = [P_0(T) - P_1(T)] \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + P_1(T) \quad (2)$$

式中 p 表示材料的幂律指数。

文中研究了均匀、线性和非线性三种温度分布。用 T_0 表示参考温度,则在均匀温度分布下的温度变化表达式为^[23]: $dT = T - T_0$,其中 $T_0 = 300$ K。线性和非线性温度分布表示沿圆柱壳厚度方向温度是可以变化的, T_1 和 T_0 分别表示结构的内部和外部温度值,则温度分布函数可描述为^[22, 24]:

$$\text{线性分布: } T = T_1 + (T_0 - T_1) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right) \quad (3)$$

$$\text{非线性分布: } T = T_1 + (T_0 - T_1) \eta(z),$$

$$\eta(z) = \int_{-\frac{h}{2}}^z \frac{1}{\kappa(z)} dz \Big/ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{\kappa(z)} dz \quad (4)$$

式中 κ 为热导率。

1.2 能量方程及求解

功能梯度圆柱壳结构位移场分量 $U = (U, V, W)^T$ 可描述为:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中 $u = (u, v)^T$ 描述圆柱壳中表面上任意一点沿 x 和 θ 方向的平移位移分量; w 为沿 z 方向的平移位移分量; $\varphi = (\varphi_x, \varphi_\theta)^T$ 为关于 θ 和 x 方向的旋转位移分量。

根据一阶剪切变形理论假设,圆柱壳结构应变和位移之间的关系为:

$$\epsilon = (\epsilon_x \quad \epsilon_\theta \quad \epsilon_{x\theta})^T = \epsilon_0 + z\chi \quad (6)$$

$$\gamma = (\gamma_{xz} \quad \gamma_{\theta z})^T = \gamma_0 \quad (7)$$

式中 $\epsilon_x, \epsilon_\theta$ 和 $\epsilon_{x\theta}$ 为圆柱壳上任意一点的结构膜应变; γ_{xz} 和 $\gamma_{\theta z}$ 表示结构横向剪切应变; ϵ_0, χ 和 γ_0 分别代表圆柱壳壳体中表面处的膜应变向量、曲率变化向量和横向剪切应变向量,它们可以由圆柱壳结构中面处的位移向量得到,参见文献[20]。

根据广义胡克定律,圆柱壳结构的应变和应力关系描述为:

$$\begin{bmatrix} \sigma \\ \tau \end{bmatrix} = Q_{5 \times 5} \begin{bmatrix} \bar{\epsilon} \\ \gamma \end{bmatrix},$$

$$\bar{\epsilon} = \epsilon - (T_0 - T_1)\alpha [1 \quad 1 \quad 0]^T \quad (8)$$

式中 σ 为正应力向量; τ 为切应力向量; $Q_{5 \times 5}$ 表示弹性常数矩阵,它是温度值 T 和厚度坐标 z 的函数,其详细描述可见文献[20]。

对应力在厚度方向进行积分,可以得到结构的合力向量 N ,合力矩向量 M 以及横向剪切应力向量 N_s :

$$[N \quad M \quad N_s]^T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\sigma \quad z\sigma \quad \bar{\kappa}\tau]^T dz \quad (9)$$

式中 $\bar{\kappa}$ 表示剪切修正系数,在一阶剪切变形理论中,其值通常取为5/6。

将式(6)~(8)代入式(9),可以获得热环境下功能梯度圆柱壳结构的本构方程:

$$[N \quad M \quad N_s]^T = D_{8 \times 8} [\epsilon_0 \quad \chi \quad \gamma_0] \quad (10)$$

式中 $D_{8 \times 8}$ 为刚度矩阵,具体表达式可见文献[20]。

根据建立的本构关系和参考文献[19],考虑热环境影响后功能梯度圆柱壳的应变能 $\bar{U}$ 可描述为:

$$\bar{U} = U_s + U_T,$$

$$U_s = \frac{R}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^L (N^T \epsilon_0 + M^T \chi + N_s^T \gamma_0) dx d\theta dz,$$

$$U_T = -\frac{R}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^L \frac{EadT}{1-\nu} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx d\theta dz \quad (11)$$

同时,功能梯度圆柱壳的动能表达式 $\bar{T}$ 可以根据方程(5)进一步表示为:

$$\bar{T} = \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & I_1 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & I_1 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix} dx d\theta, \quad (12)$$

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z, T) (1, z, z^2) dz$$

相应地,存储在圆柱壳两端均匀布置的边界约束弹簧中的能量可表示为:

$$U_B = \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (k_{bu0} u^2 + k_{bv0} v^2 + k_{bw0} w^2 + k_{bx0} \varphi_x^2 + k_{b\theta 0} \varphi_\theta^2)_{x=0} dz d\theta + \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (k_{buL} u^2 + k_{bvL} v^2 + k_{bwL} w^2 + k_{bxL} \varphi_x^2 + k_{b\theta L} \varphi_\theta^2)_{x=L} dz d\theta \quad (13)$$

假设外部激励荷载作用于圆柱壳的中面,外部激励荷载对圆柱壳所做的功可以表示为:

$$\bar{W} = \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{f}^T \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix} dx d\theta \quad (14)$$

式中 外部激励荷载向量 $\mathbf{f} = (f_u, f_v, f_w, m_x, m_\theta)$; f_u, f_v 和 f_w 分别表示沿 x, θ 和 z 方向的力分量; m_x 和 m_θ 分别表示绕 x 和 θ 方向的力矩分量。

为了克服不同边界条件下壳体位移函数微分在边界上存在的不连续问题,文中采用谱几何法和傅里叶正余弦函数来表示圆柱壳沿轴向方向和周向方向的位移容许函数:

$$q(x, \theta, t) = \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\lambda_m x) [A_{mn}^{q,c} \cos(n\theta) + A_{mn}^{q,s} \sin(n\theta)] + \sum_{l=-2}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\lambda_l x) [A_{ln}^{q,c1} \cos(n\theta) + A_{ln}^{q,s1} \sin(n\theta)] \right\} e^{i\omega t} \quad (15)$$

式中 $q = u, v, w, \varphi_x, \varphi_\theta$; $\lambda_m = m\pi/L$; m 和 n 分别为轴向和周向的半波数; $A_{mn}^{q,b}$ ($b=c, s$) 为位移变量未知展开系数; $A_{ln}^{q,b1}$ ($b1=c1, s1$) 为辅助函数的未知系数; ω 表示固有频率; $\sin(\lambda_l x)$ 代表在轴向积分域 $[0, L]$ 内足够光滑的辅助函数。

综上所述,热环境下功能梯度圆柱壳结构的能量泛函可以表示为:

$$\bar{L} = \bar{T} - \bar{U} - U_B + \bar{W} \quad (16)$$

在能量泛函基础上,结合圆柱壳结构位移容许函数进行求解,并采用 Ritz 法对位移容许函数未知

级数展开系数求偏导,可获得热环境下功能梯度圆柱壳的振动特征方程:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_C + \mathbf{K}_B)\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (17)$$

式中 $\mathbf{q}$ 表示圆柱壳的全局坐标向量; $\mathbf{K}_C$ 和 $\mathbf{K}_B$ 分别代表结构刚度矩阵和边界弹簧的刚度矩阵,其中温度的变化会影响 $\mathbf{K}_C$; $\mathbf{M}$ 为结构的质量矩阵; $\mathbf{F}$ 代表外界激励力向量矩阵,其中 $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ 时,式(17)简化为一个标准的特征值问题,可方便求解获取自由振动特性(固有频率及其对应的特征向量)。

2 振动求解与分析

在上述构建的振动分析模型基础上,本节对热环境下功能梯度圆柱壳的振动(包括自由振动和瞬态振动)问题进行分析 and 讨论。以在飞行器上有着广泛应用的功能梯度圆柱壳为例,设其尺寸为: $R = 1 \text{ m}$, $h = 0.1 \text{ m}$, $L = 5 \text{ m}$ 。后续数值算例分析中,默认选择外表面材料为 Si_3N_4 、内表面材料为 SUS304 的功能梯度圆柱壳结构为研究对象,而功能梯度材料属性的温度相关系数可根据文献[24]获得。文中研究算例包括自由(F)、简支(SS)、剪切(SD)和固支(C)等经典边界,以及 E^1, E^2, E^3, E^4, E^5 和 E^6 等弹性约束边界,它们均可通过修改相应的边界约束弹簧刚度值来获得,具体约束弹簧刚度值可参考文献[3]选取。此外,根据参考文献[21]的研究结果,圆柱壳位移容许函数在轴向和周向上选取相同的截断数 $M = N = 17$ 。

2.1 自由振动分析

表1列出了热环境下 C-C, C-F 和 SD-SD 功能梯度圆柱壳前8阶固有频率。材料的幂律指数 $p = 0$, 圆柱壳的长度为 $L = 4 \text{ m}$, 其余参数与默认参数保持一致。表1列出了 $dT = 0 \text{ K}$, 50 K 两种温度变化条件下的计算结果,相应的文献解^[20]也在表中列出。通过对比可以看出,两种方法的计算结果吻合良好,但文中基于谱几何法所构建的位移容许函数形式简洁统一,便于参数化研究。表2给出了具有不同幂律指数 $p = 0.5, 1$ 的热环境下 C-C, C-F 和 F-F 功能梯度圆柱壳前5阶固有频率。温度变化 $dT = 50 \text{ K}$, 圆柱壳的尺寸与默认参数保持一致。有限元法仿真计算结果作为参考解也列在表2中。从表2可以看出,文中计算结果与有限元法求解结果吻合良好,最大相对偏差不超过2%。计算偏差主要来源于两者不同的理论框架以及求解算法。综上所述,文中构建的分析模型可以有效、准确地预示热环境下功能梯度圆柱壳的自由振动特性。

表 1 不同温度条件下功能梯度圆柱壳固有频率对比/Hz

Tab. 1 Comparisons of natural frequencies of FG cylindrical shells with various temperature conditions/Hz

边界	dT/K	方法	阶数							
			1	2	3	4	5	6	7	8
C-C	0	文献[20]	392.29	392.29	499.59	499.59	607.12	607.12	728.85	728.85
		本文	392.19	392.19	499.59	499.59	606.88	606.88	729.06	729.06
	50	文献[20]	388.67	388.67	495.71	495.71	602.95	602.95	721.69	721.69
		本文	388.58	388.58	495.71	495.71	602.72	602.72	721.93	721.93
C-F	0	文献[20]	177.16	177.16	212.49	212.49	424.68	424.68	435.38	435.38
		本文	177.19	177.19	212.36	212.36	424.83	424.83	435.47	435.47
	50	文献[20]	174.92	174.92	210.53	210.53	421.91	421.91	429.75	429.75
		本文	174.95	174.95	210.40	210.40	422.06	422.06	429.84	429.84
SD-SD	0	文献[20]	281.25	281.25	459.87	459.87	501.55	501.55	657.60	657.60
		本文	281.00	281.00	459.43	459.43	501.40	501.40	656.31	656.31
	50	文献[20]	277.78	277.78	456.21	456.21	497.82	497.82	650.72	650.72
		本文	277.52	277.52	455.78	455.78	497.67	497.67	649.43	649.43

表 2 不同边界条件下具有不同幂律指数的功能梯度圆柱壳固有频率对比/Hz

Tab. 2 Comparisons of natural frequencies of FG cylindrical shells with different power law exponents under different boundary conditions/Hz

p	阶数	C-C			C-F			F-F		
		本文	有限元	偏差/%	本文	有限元	偏差/%	本文	有限元	偏差/%
0.5	1	182.07	183.98	1.04	89.439	89.777	0.38	88.027	89.519	1.67
	2	182.07	183.98	1.04	89.439	89.777	0.38	88.027	89.519	1.67
	3	274.31	279.26	1.77	96.207	97.592	1.42	94.117	95.264	1.20
	4	274.31	279.26	1.77	96.207	97.592	1.42	94.117	95.264	1.20
	5	286.83	286.87	0.02	196.82	198.27	0.73	224.69	225.65	0.43
1	1	208.54	209.35	0.39	102.52	102.45	-0.07	100.55	101.37	0.81
	2	208.54	209.35	0.39	102.52	102.45	-0.07	100.55	101.37	0.81
	3	313.56	316.42	0.91	110.03	110.61	0.53	107.78	107.90	0.11
	4	313.56	316.42	0.91	110.03	110.61	0.53	107.78	107.90	0.11
	5	328.57	327.27	-0.40	225.57	225.67	0.04	257.62	256.95	-0.26

2.2 瞬态振动响应分析

继续研究热环境下功能梯度圆柱壳瞬态振动响应特性。在数值分析前,对模型相关计算参数进行约定:1)文中用矩阵 $L_x=[l_0,l_1]$ 和 $L_q=[f_{q0},f_{q1}]$ 来分别表示外界激励力作用的轴向和周向位置,而 l_0,f_{q0} 和 l_1,f_{q1} 分别表示相应方向上的起始和结束位置。后续计算算例中默认的激励位置为 $L_x=[1,1]$ 和 $L_q=[0,0]$;2)矩阵 $f=(f_u,f_v,f_w,m_x,m_\theta)$ 表示力的大小和方向,在后续瞬态振动响应计算中将其取为 $f=(0,0,-1,0,0)$;3)文中采用 (x,θ) 来表达测点的位置,默认的测点为 $(2,0)$;4)在瞬态振动问题研究中,瞬态振动响应计算时间范围默认取为 $0\sim 0.02\text{ s}$,外力作用时间为 0.01 s 。除特别声明外,下面瞬态振动响应分析算例的参数均按上述默认参数设置。

图 2 给出了热环境下 C-C 功能梯度圆柱壳瞬态

振动位移响应对比情况。圆柱壳的尺寸取为默认尺寸参数,材料的幂律指数 $p=0.5$,温度变化 $dT=0\text{ K}$ 。考虑了半正弦、矩形、三角形和指数四种脉冲类型,相应的数学表达式见文献[20]。图 2 的对比结果表明,文中构建模型分析获得的瞬态振动位移响应特性与有限元法计算结果具有较好的一致性。相较于有限元法,谱几何法的主要优势为:1)有限元法中通过对结构厚度方向划分足够数量的层数(文中取 40 层),各层需赋予不同的材料属性以获得较为可靠的功能梯度模型,而谱几何法中则采用精确的定积分来考虑功能梯度材料在厚度上的连续梯度变化,建模过程更为简单高效,其模型也更为精确;2)就边界处理而言,文中方法仅需修改边界约束弹簧的刚度值即可获得任意边界约束,而有限元法建模中需要在边界节点的各方向施加对应的边界弹簧,建模过程较繁琐,不利于参数化分析。

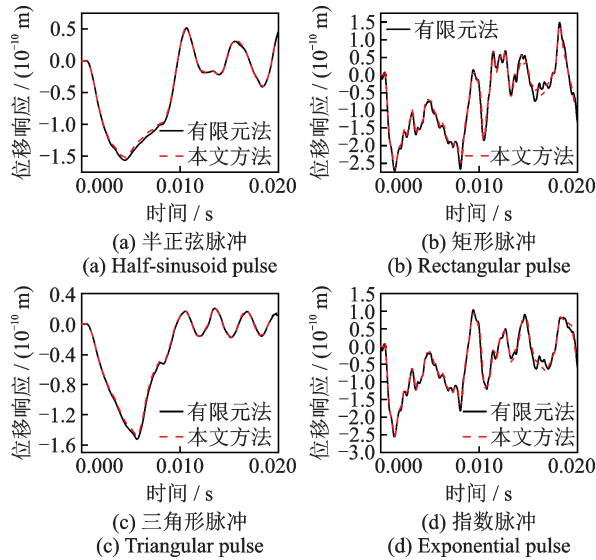


图2 热环境下功能梯度圆柱壳瞬态位移响应对比情况
Fig. 2 Comparisons of the transient displacement response of the functionally graded cylindrical shell under thermal environment

在验证了文中构建的瞬态振动分析模型的正确性和有效性的基础上,接下来分析特征参数对瞬态振动响应特性的影响。为简化分析工作,在接下来的研究中采用的脉冲类型均为指数脉冲。

图3给出了材料幂律指数 p 对热环境下功能梯度圆柱壳瞬态振动响应特性的影响。温度变化 $dT=$

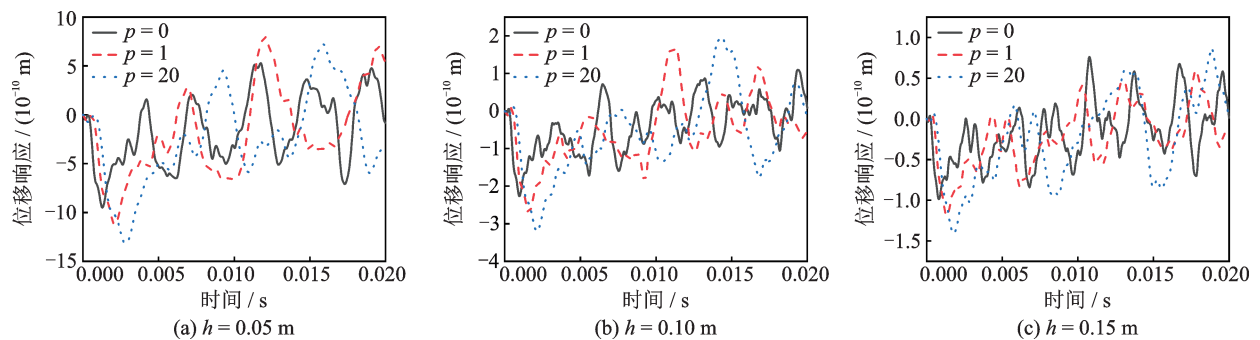


图3 幂律指数的变化对热环境下功能梯度圆柱壳瞬态位移响应的影响
Fig. 3 The influence of the change of the power law exponent on the transient displacement response of the functionally graded cylindrical shell under thermal environment

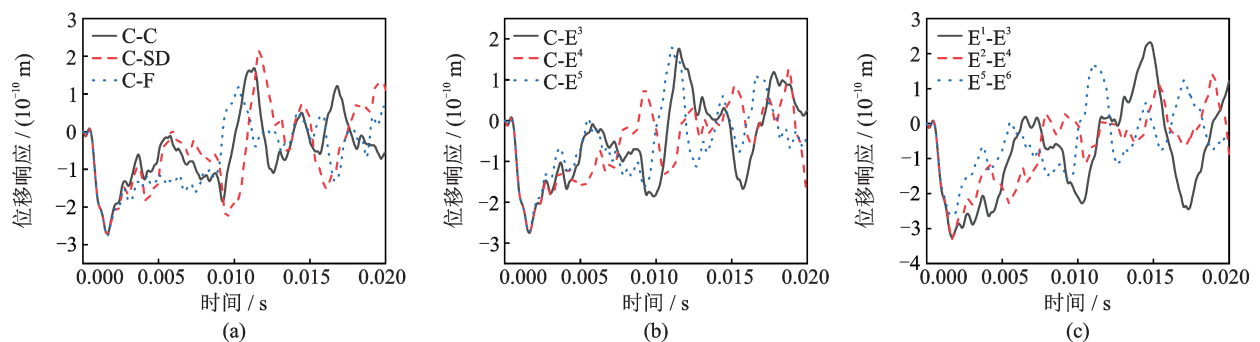


图4 不同边界条件对热环境下功能梯度圆柱壳瞬态位移响应的影响
Fig. 4 The influence of different boundary conditions on the transient displacement response of a functionally graded cylindrical shell under thermal environment

0 K。圆柱壳的边界条件为C-C,且考虑了 $h=0.05$ m, 0.1 m, 0.15 m三种壳体厚度,其余尺寸为默认。从图3中可以看出, p 的增大使得瞬态振动响应特性曲线的峰值变高,而且出现明显向右移动的趋势。这是由于 p 的增大将导致结构的材料属性更加接近于内表面的金属成分,使其弯曲刚度降低,进而提高了功能梯度圆柱壳在热环境下瞬态位移响应的振幅和振荡周期。

图4给出了不同边界条件对圆柱壳瞬态响应的影响。除边界条件外,其参数与图2算例参数保持一致。从图4中可以看出,对于经典边界,SD边界的瞬态曲线有着更高的峰值,C边界居中,F边界的瞬态曲线的峰值最低。对于弹性边界,带有 E^4 的圆柱壳的瞬态位移响应峰值要普遍大于其他弹性边界条件。这是因为不同的边界条件,其边界约束弹簧刚度的取值也不相同,边界约束弹簧刚度值越大,结构的边界势能也会变大,导致功能梯度圆柱壳刚度增加,从而使得结构瞬态位移响应振幅降低。

图5给出了温度变化 dT 对热环境下功能梯度圆柱壳瞬态振动响应特性的影响。对于线性和非线性温度场, $dT=T_0-T_1$ 。边界条件为C-C,其余参数与图4算例参数保持一致。从图5中可以看出,随着

dT 的增大,三种温度场作用下的圆柱壳瞬态振动响应特性曲线都会向右偏移。均匀温度场下的偏移更为明显,而线性和非线性温度场的偏移不明显。显然 dT 的增大导致了功能梯度圆柱壳应变能的降低,从而使得结构在热环境下瞬态位移响应的振幅和振荡周期提高。

下面分析了热环境下C-C功能梯度圆柱壳不同

空间位置点的瞬态振动响应特性,相关结果如图6所示。轴向线力的激励位置为 $L_x=[1, 1.5]$ 和 $L_q=[0, 0]$;周向线力的激励位置为 $L_x=[1, 1]$ 和 $L_q=[0, \pi/2]$ 。其余参数与图4相关参数保持一致。从图6中可以发现,无论是点力、轴向线力还是周向线力,测点位置的向右变化都会使得结构的瞬态响应曲线向右移动,而且最靠近激励位置的测点振幅最大。

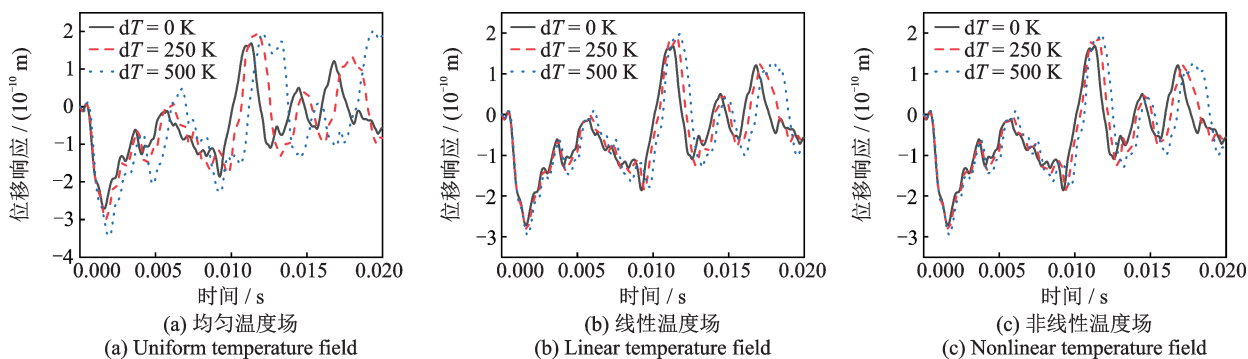


图5 不同温度变化对热环境下功能梯度圆柱壳瞬态位移响应的影响

Fig. 5 The effect of different temperature changes on the transient displacement response of the functionally graded cylindrical shell in thermal environment

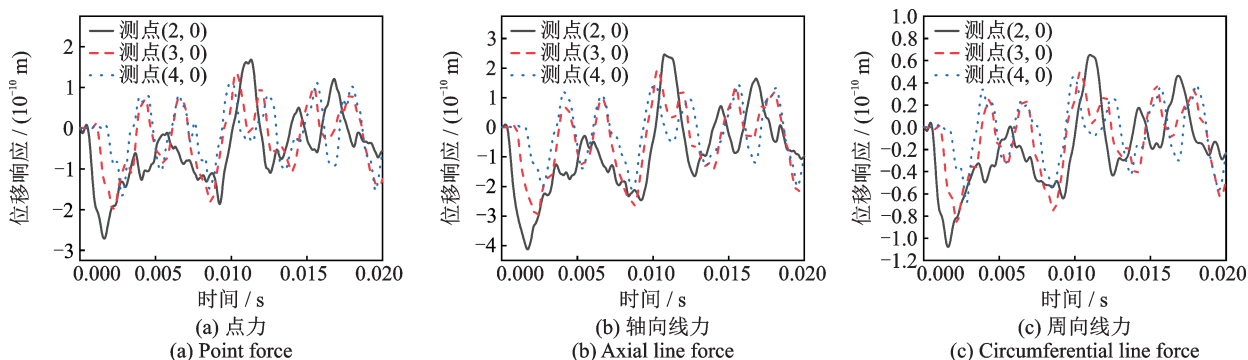


图6 热环境下功能梯度圆柱壳不同空间位置点的瞬态位移响应

Fig. 6 The transient displacement response of various measurement points for functionally graded cylindrical shell under thermal environment

3 结论

基于一阶剪切变形理论和谱几何法,文中构建了热环境下功能梯度圆柱壳振动特性分析模型。通过将文中计算结果与文献解以及有限元数值解进行对比,验证了所构建模型能够有效分析热环境下功能梯度圆柱壳自由振动和瞬态振动响应特性。通过参数化分析,探讨了幂律指数、温度变化、载荷参数等因素对热环境下功能梯度圆柱壳瞬态振动响应特性的影响规律,获得以下结论:

(1) 随着幂律指数的增大,圆柱壳结构弯曲刚度降低,结构在热环境下的瞬态位移响应的振幅和振荡周期均会明显提高;

(2) 在SD和 E^4 边界条件下,圆柱壳结构的边界

势能更大,其瞬态位移响应的振幅也更低;

(3) 温度变化值的增加使得圆柱壳结构刚度降低,进而增大了结构在热环境下瞬态位移响应的振幅和振荡周期,而且在均匀温度场下的影响更为明显;

(4) 越靠近激励位置,该测点所对应的瞬态响应曲线振幅会越显著。

参考文献:

- [1] Iqbal Z, Naeem M N, Sultana N. Vibration characteristics of FGM circular cylindrical shells using wave propagation approach[J]. Acta Mechanica, 2009, 208(3-4): 237-248.
- [2] 杨萌,李戎,梁斌. 基于Flügge理论的功能梯度圆柱壳自由振动响应均匀化转换计算方法[J]. 振动与冲击,

- 2020, 39(24): 63-68.
- YANG Meng, LI Rong, LIANG Bin. A homogenization transformation method for free vibration response of functionally graded cylindrical shells based on the Flügge theory [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2020, 39(24): 63-68.
- [3] Su Z, Jin G, Shi S, et al. A unified solution for vibration analysis of functionally graded cylindrical, conical shells and annular plates with general boundary conditions [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2014, 80: 62-80.
- [4] 李文达, 杜敬涛, 杨铁军, 等. 弹性边界约束旋转功能梯度圆柱壳结构自由振动行波特性分析 [J]. *应用数学和力学*, 2015, 37(7): 710-724.
- LI Wenda, DU Jingtiao, YANG Tiejun, et al. Traveling wave mode characteristics of rotating functional gradient material cylindrical shell structures with elastic boundary constraints [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, 37(7): 710-724.
- [5] 李文达, 杜敬涛, 杨铁军, 等. 基于改进傅里叶级数方法的旋转功能梯度圆柱壳振动特性分析 [J]. *哈尔滨工程大学学报*, 2016, 37(3): 388-393.
- LI Wenda, DU Jingtiao, YANG Tiejun, et al. Vibration characteristics analysis of the rotating functionally graded cylindrical shell structure using an improved Fourier series method [J]. *Journal of Harbin Engineering University*, 2016, 37(3): 388-393.
- [6] 陈金晓, 梁斌. 弹性边界条件下的功能梯度圆柱壳振动特性研究 [J]. *船舶力学*, 2017, 21(7): 880-887.
- CHEN Jinxiao, LIANG Bin. Study on the vibration of functionally graded material cylindrical shells under elastic boundary conditions [J]. *Journal of Ship Mechanics*, 2017, 21(7): 880-887.
- [7] Tornabene F. Free vibration analysis of functionally graded conical, cylindrical shell and annular plate structures with a four-parameter power-law distribution [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009, 198(37-40): 2911-2935.
- [8] Vel S S. Exact elasticity solution for the vibration of functionally graded anisotropic cylindrical shells [J]. *Composite Structures*, 2010, 92(11): 2712-2727.
- [9] 沙哈 A G, 曼穆德 T, 那姆 M N. 指数型体积分数功能梯度材料的薄壁圆柱壳振动 [J]. *应用数学和力学*, 2009, 30(5): 567-574.
- Shah A G, Mahmood T, Naeem M N. Vibrations of FGM thin cylindrical shells with exponential volume fraction law [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, 30(5): 567-574.
- [10] 梁斌, 李戎, 张伟, 等. 功能梯度材料圆柱壳的振动特性研究 [J]. *船舶力学*, 2011, 15(1-2): 109-117.
- LIANG Bin, LI Rong, ZHANG Wei, et al. Vibration characteristics of functionally graded materials cylindrical shells [J]. *Journal of Ship Mechanics*, 2011, 15(1-2): 109-117.
- [11] 项爽. 旋转功能梯度材料圆柱壳的振动特性研究 [D]. 洛阳: 河南科技大学, 2013.
- XIANG Shuang. Free vibration of rotating functionally graded cylindrical shells [D]. Luoyang: Henan University of Science and Technology, 2013.
- [12] Li H, Pang F, Chen H, et al. Vibration analysis of functionally graded porous cylindrical shell with arbitrary boundary restraints by using a semi analytical method [J]. *Composites Part B: Engineering*, 2019, 164: 249-264.
- [13] 庞福振, 高聪, 李玉慧, 等. 基于里兹法的圆柱壳振动特性分析 [J]. *华中科技大学学报(自然科学版)*, 2020, 48(7): 71-76.
- PANG Fuzhen, GAO Cong, LI Yuhui, et al. Vibration characteristics analysis of cylindrical shell based on Ritz method [J]. *Journal of Huazhong University of Science & Technology (Natural Science Edition)*, 2020, 48(7): 71-76.
- [14] 全真真. 弹性圆柱壳结构自由振动分析的辛方法 [D]. 大连: 大连理工大学, 2017.
- TONG Zhenzhen. Symplectic method for free vibration analysis of elastic cylindrical shell structures [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2017.
- [15] 肖笛, 王忠民. 基于辛方法的功能梯度圆柱壳振动特性分析 [J]. *应用力学学报*, 2019, 36(3): 704-710.
- XIAO Di, WANG Zhongmin. Analysis of vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells based on Symplectic method [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2019, 36(3): 704-710.
- [16] Haddadpour H, Mahmoudkhani S, Navazi H M. Free vibration analysis of functionally graded cylindrical shells including thermal effects [J]. *Thin-Walled Structures*, 2007, 45(6): 591-599.
- [17] Malekzadeh P, Heydarpour Y. Free vibration analysis of rotating functionally graded cylindrical shells in thermal environment [J]. *Composite Structures*, 2012, 94(9): 2971-2981.
- [18] Malekzadeh P, Heydarpour Y, Haghighi M R G, et al. Transient response of rotating laminated functionally graded cylindrical shells in thermal environment [J]. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2012, 98: 43-56.
- [19] Zhang Lang, Li Xuewu. Buckling and vibration analysis of functionally graded magneto-electro-thermo-elastic circular cylindrical shells [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, 37(4): 2279-2292.

- [20] Li Z, Zhong R, Wang Q, et al. The thermal vibration characteristics of the functionally graded porous stepped cylindrical shell by using characteristic orthogonal polynomials[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2020, 182: 105779.
- [21] 石先杰. 复杂边界条件下旋转结构统一动力学模型的构建与研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2014.
SHI Xianjie. The construction and analysis on unified dynamical model of revolve structures subjected to complex boundary conditions[D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2014.
- [22] Barati M R, Zenkour A M. Electro-thermoelastic vibration of plates made of porous functionally graded piezoelectric materials under various boundary conditions[J]. Journal of Vibration and Control, 2016, 24(10): 1910-1926.
- [23] Ebrahimi F, Barati M R. Electromechanical buckling behavior of smart piezoelectrically actuated higher-order size-dependent graded nanoscale beams in thermal environment[J]. International Journal of Smart and Nano Materials, 2016, 7(2): 69-90.
- [24] Zhou K, Huang X, Tian J, et al. Vibration and flutter analysis of supersonic porous functionally graded material plates with temperature gradient and resting on elastic foundation[J]. Composite Structures, 2018, 204: 63-79.

Vibration analysis of functionally graded cylindrical shell under thermal environment

SHI Xian-jie¹, ZUO Peng^{1,2}

(1. Institute of Systems Engineering, China Academy of Engineering Physics, Mianyang 621999, China;

2. Department of Modern Mechanics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: The spectro-geometric method is utilized to investigate the free and transient vibration characteristics of the functionally graded (FG) cylindrical shell under thermal environment. The boundary restraining spring technology is employed to simulate the arbitrary classical or elastic boundary support of the shell structure. The energy functional of FG cylindrical shell under thermal environment is established with the first-order shear shell theory. The displacement admissible functions of the cylindrical shell are characterized by the spectro-geometric method and circumferential Fourier harmonic function product sum to overcome the discontinuity problem of the shell boundary displacement function differential along the boundary edge of the shell structure. By substituting the displacement admissible function into the cylindrical shell energy functional, the Ritz approach is employed to construct the vibration analysis model. The numerical analysis results show that the current model can predict the vibration characteristics of FG cylindrical shells with high precision. The influence of power law exponents, thermal environment and load parameters on the vibration characteristics of FG cylindrical shells is studied. The new results presented in this study can be utilized as benchmark solution for other numerical method development.

Key words: free vibration; functionally graded cylindrical shell; thermal environment; spectro-geometric method (SGM); transient response

作者简介: 石先杰(1985—),男,博士,高级工程师,硕士生导师。电话:(0816)2493287;E-mail:411shixj@caep.cn。