第 36 卷第 3 期
2023 年 6 月
振 动 工 程 学 报
Journal of Vibration Engineering
Vol. 36 No. 3
Jun. 2023

一类双稳态复合材料层合板的簇发振荡现象分析

钱有华，杨 园

（浙江师范大学数学与计算机科学学院，浙江 金华 321004）

摘要： 针对一类参数激励下的双稳态复合材料层合板非线性系统，考虑了一个参数激励频率是另一个的整数倍的情形，并将参数激励视为慢变参数，利用“快慢分析方法”得到了多频参数激励系统的快子系统和慢子系统，分析了快子系统的分岔行为。在平衡点分岔分析中，分析出单模和双模平衡点下快子系统的Hopf和fold分岔条件；利用双参数分岔集，相图、时间历程曲线图、转换相图与平衡分支的叠加图，分析了不同参数下簇发振荡的产生机理及其动力学行为，观察到不同的参数条件下其簇发振荡现象可能与叉形分岔点无关。

关键词： 簇发振荡；快慢分析方法；叉形分岔；转换相图；慢变参数

中图分类号： O322 **文献标志码：** A **文章编号：** 1004-4523(2023)03-0612-11

DOI：10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2023.03.003

引 言

多时间尺度效应通常表现为大幅振荡与微幅振荡的交替出现，这种现象称为簇发振荡。簇发振荡通常表现为两种方式：一种是时域上的耦合；另一种是频域上的耦合[1]。本文考虑频域上的耦合，即外激励频率与系统固有频率有一个量级上的差异。对于频域上的簇发振荡已经有许多学者进行了研究。比如：张晓芳等[2]以一类典型的混沌系统为例，引入参外联合激励，考虑了两激励频率在严格共振和非共振两种情形下的动力学特性。夏付兵等[3]以非自治Duffing-van der Pol振子为例，讨论了频域上不同尺度的快慢耦合效应，揭示了不同形式的簇发振荡行为。Wei等[4]报告了在一个参数和外部激励机械系统中复杂的簇发振荡动力学行为，研究结果丰富了复合簇发振荡的动力学途径。夏雨等[5]以修正的四维Chua电路为例，通过引入两个频率不同的周期电流源，建立了双频1∶2周期激励两尺度动力学模型，当两激励频率之间存在严格的共振关系时，分析了两尺度下的耦合行为。吴天一等[6]以经典的Chua系统为例，构建存在频域两尺度耦合的非对称动力系统模型，重点分析了三种不同周期激励幅值下典型的非对称簇发振荡及吸引子结构，揭示其相应的产生机理。

文献[7-8]引入了快慢分析方法，将不同尺度耦合系统分解为相互耦合的快慢两子系统，即快子系统(FS)和慢子系统(SS)，并将慢变量视为分岔参数，可以清楚地解释其簇发机理。当所有变量表现出小振幅振荡或保持不变时，快子系统处于静止状态(QS)，当所有变量表现出大振幅振荡时，快子系统对应于一个尖峰状态(SP)，当慢子系统影响快子系统在静止态和尖峰态之间转换时，产生簇发振荡。

近年来，许多学者研究了非光滑领域中的簇发振荡现象。比如Bi等[9]研究了在激励频率与固有频率之间有间隙的参数激励动力系统中簇发振荡的演化。Zhang等[10-11]在典型Chua系统的基础上，建立了一个具有两个时间标度的非光滑动力系统，探讨簇发振荡现象及其机理。Qu等[12]探讨了具有参数和外部周期激励的filippov型系统的簇发振荡和非光滑动力学行为的模式。Zhang等[13]在混沌磁场模型的基础上，引入非光滑因子来研究多时间尺度系统的复杂动力学行为。Peng等[14]研究了频域含两个时间尺度的filippov型系统的混合模式振荡和分岔机理。Wang等[15]以典型Chua电路为基础，通过引入非线性分段电阻和谐波变源，建立了频域两尺度耦合的修正非光滑模型，探讨两个尺度的耦合对非光滑动力系统动力学的影响。Huang等[16]提出了一种多吸引子共存的三维混沌系统，其中不同的常数控制参数可以使混沌行为由单涡吸引子演化为双涡吸引子，当控制项被激励频率远小于固有频率的周期谐波激励所取代时，混沌运动可能会消失，而发生周期性的振荡。Mao等[17]对非自治Murali-Lakshmanan-Chua(MLC)电路的振荡行为进行了详细的研究，在MLC电路中，分岔值的确定与非光滑的两个边界有关。Wang等[18]以一个典型的Chua电路为研究对象，研究

收稿日期： 2021-12-01；**修订日期：** 2022-01-20

基金项目： 国家自然科学基金资助项目(12172333，11572288)；浙江省自然科学基金资助项目(LY20A020003)。

了分段光滑动力系统中簇发振荡的动力学机制。Shen等[19]通过在四维激光系统中引入非光滑项和周期外部激励,得到一个两尺度 filippov型系统,并研究了这个系统的复杂动力学行为和机理。

近年来,对簇发振荡的模式和路径的研究也得到了很多学者的关注。比如 Yu 等[20]研究了多时滞控制振荡器中一些新的簇发模式的产生,给出了周期激励项缓慢变化的对称余维1和余维2爆破图。Han 等[21]基于参数驱动的 Lorenz 系统,提出了一种混沌簇发路径。Yu 等[22]证明了经典的受控 Lu 系统中周期性和混沌簇发的新路径。Han 等[23]针对多频率参数激励的 Duffing 系统,提出了两种爆破模式,探讨了两种爆破方式之间的关系。Han 等[24]发现平衡环和极限环都能表现出与系统参数变化相关的脉冲型急剧定量变化,即脉冲型爆破(PSE)。Wang 等[25]从解析和数值两方面研究了双参数机械振子在振幅调制力作用下的 Melnikov 阈值转换和相应的快慢动力学。Han 等[26]报道了一种近似方法——频率截断快慢分析,用于分析参数和外部激励系统的快慢动力学与两个慢不适应激励频率。Wei 等[27]研究了多频率慢激励下的 Rayleigh 振子的动力学,得到了与双稳脉冲型爆炸有关的两种不同的爆破模式。Ma 等[28]基于一个带有两个慢变周期激励的修正 Rayleigh-Duffing 系统,研究了系统解趋近于无穷的机理。Jiang 等[29]提出了一种 2:1 内共振来扩大振动能量采集的频带宽度。Wei 等[30]提出了一种基于外部激励和参数激励的 Rayleigh 系统进行 PSE 的方法。

本文基于一类两自由度双稳态复合材料层合板进行研究。第1节对系统的平衡点进行分岔分析,得到了 Hopf 和 fold 分岔的条件;第2节主要对不含有叉形分岔点的参数进行簇发振荡分析,得到了不同参数条件下的簇发振荡类型;第3节主要在叉形分岔参数条件下对系统进行簇发振荡分析,得到了不同参数下的簇发振荡类型;第4节对全文进行总结。

本文研究参数和外激励同时作用下的系统[31]:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=\mu_1x_2-\omega_1^2x_1+m_1\left(x_1+x_3\right)^2+\\ \qquad m_2\left(x_1+x_3\right)^3+p_1\cos\left(\Omega_1t\right)x_1+\\ \qquad f_1\cos\left(\Omega_2t\right)\\ \dot{x}_3=x_4\\ \dot{x}_4=\mu_2x_4-\omega_2^2x_3+n_1\left(x_1+x_3\right)^2+\\ \qquad n_2\left(x_1+x_3\right)^3+p_2\cos\left(\Omega_1t\right)x_3+\\ \qquad f_2\cos\left(\Omega_2t\right)\end{cases} \tag{1}$$

式中 x_1,x_3表示两种模式的位移;μ_1,μ_2表示与结构阻尼有关的阻尼效应;$\omega_i,m_i,n_i(i=1,2)$为物理参数;$\Omega_i(i=1,2)$为激励频率;$p_i,f_i(i=1,2)$为激励振幅。

将 $\cos(\Omega_it)(i=1,2)$视为控制参数,利用快慢分析方法研究系统(1)的动力学机制,令 $\Omega_1=2\Omega_2$,设 $\cos(\Omega_2t)=\delta$,则系统(1)变为:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=\mu_1x_2-\omega_1^2x_1+\\ \qquad m_1\left(x_1+x_3\right)^2+m_2\left(x_1+x_3\right)^3+\\ \qquad p_1\left(2\delta^2-1\right)x_1+f_1\delta\\ \dot{x}_3=x_4\\ \dot{x}_4=\mu_2x_4-\omega_2^2x_3+\\ \qquad n_1\left(x_1+x_3\right)^2+n_2\left(x_1+x_3\right)^3+\\ \qquad p_2\left(2\delta^2-1\right)x_3+f_2\delta\end{cases} \tag{2}$$

式中 δ为一个控制参数。

1 分岔分析

1.1 单模平衡点下系统的分岔分析

在这一节中,考虑单模平衡点下系统(2)的分岔情形。分别考虑 $SM_1(x_3,x_4)$平面或者 $SM_2(x_1,x_2)$平面,即在 SM_1中,令 $x_3=x_4=0$;在 SM_2中,令 $x_1=x_2=0$。

首先考虑 SM_1:在 SM_1处的平衡点 $E_1(x_e,0,0,0)$满足以下条件:

$$\begin{cases}-\omega_1^2x_e+m_1x_e^2+m_2x_e^3+\\ \qquad p_1\left(2\delta^2-1\right)x_e+f_1\delta=0\\ n_1x_e^2+n_2x_e^3+f_2\delta=0\end{cases} \tag{3}$$

在 E_1处的稳定性由以下特征多项式决定:

$$\lambda^4-\left(\mu_1+\mu_2\right)\lambda^3+\left(-a_1-a_2+\mu_1\mu_2\right)\lambda^2+\left(a_1\mu_2+a_2\mu_1\right)\lambda-b_1b_2+a_1a_2=0 \tag{4}$$

式中 λ表示特征值;$a_1=-\omega_1^2+2m_1x_e+3m_2x_e^2+p_1(2\delta^2-1)$, $a_2=-\omega_2^2+2n_1x_e+3n_2x_e^2+p_2(2\delta^2-1)$,$b_1=2m_1x_e+3m_2x_e^2$,$b_2=2n_1x_e+3n_2x_e^2$。

则在 SM_1中,系统产生 fold 分岔的条件为:

$$-b_1b_2+a_1a_2=0$$

系统产生 Hopf 分岔的条件为:

$$\left(a_1\mu_2+a_2\mu_1\right)^2+\left(a_1\mu_2+a_2\mu_1\right)\cdot\left(-a_1-a_2+\mu_1\mu_2\right)\left(\mu_1+\mu_2\right)+(-b_1b_2+a_2a_2)(\mu_1+\mu_2)^2=0$$

其中,$\mathrm{Re}\left[\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\delta}\right]\Big|(\lambda=\mathrm{i}\omega_0)\neq0$,满足横截性条件。

其次考虑 SM_2,同样地,在 SM_2处的平衡点 $E_2(0,0,x_f,0)$满足以下条件:

$$\begin{cases} -\omega_1^2 x_f + n_1 x_f^2 + n_2 x_f^3 + \\ \quad p_2(2\delta^2 - 1)x_f + f_2\delta = 0 \\ m_1 x_f^2 + m_2 x_f^3 + f_1\delta = 0 \end{cases} \tag{5}$$

在 E_2 处的稳定性由以下的特征多项式决定：

$$\lambda^4 - (\mu_1 + \mu_2)\lambda^3 + (-a_3 - a_4 + \mu_1\mu_2)\lambda^2 + (a_3\mu_2 + a_4\mu_1)\lambda - b_3 b_4 + a_3 a_4 = 0 \tag{6}$$

式中 $a_3 = -\omega_1^2 + 2m_1 x_f + 3m_2 x_f^2 + p_1(2\delta^2 - 1)$，$a_4 = -\omega_2^2 + 2n_1 x_f + 3n_2 x_f^2 + p_2(2\delta^2 - 1)$，$b_3 = 2m_1 x_f + 3m_2 x_f^2$，$b_4 = 2n_1 x_f + 3n_2 x_f^2$。

则在 SM_2 中，系统产生 fold 分岔的条件为：

$$-b_3 b_4 + a_3 a_4 = 0$$

系统产生 Hopf 分岔的条件为：

$$(a_3\mu_2 + a_4\mu_1)^2 + (a_3\mu_2 + a_4\mu_1)\cdot(-a_3 - a_4 + \mu_1\mu_2)(\mu_1 + \mu_2) + (-b_3 b_4 + a_3 a_4)(\mu_1 + \mu_2)^2 = 0$$

1.2 双模平衡点下系统的分岔分析

双模平衡点即 $x_2 = x_4 = 0$，也就是在 $E_3(x_i, 0, x_j, 0)$ 处，平衡点满足的条件为：

$$\begin{cases} -\omega_1^2 x_i + m_1(x_i + x_j)^2 + m_2(x_i + x_j)^3 + \\ \quad p_1(2\delta^2 - 1)x_i + f_1\delta = 0 \\ -\omega_2^2 x_j + n_1(x_i + x_j)^2 + n_2(x_i + x_j)^3 + \\ \quad p_2(2\delta^2 - 1)x_j + f_2\delta = 0 \end{cases} \tag{7}$$

在 E_3 处的稳定性由以下的特征多项式决定：

$$\lambda^4 - (\mu_1 + \mu_2)\lambda^3 + (-a_5 - a_6 + \mu_1\mu_2)\lambda^2 + (a_5\mu_2 + a_6\mu_1)\lambda - b_5 b_6 + a_5 a_6 = 0 \tag{8}$$

式中 $a_5 = -\omega_1^2 + 2m_1(x_i + x_j) + 3m_2(x_i + x_j)^2 + p_1(2\delta^2 - 1)$，$a_6 = -\omega_2^2 + 2n_1(x_i + x_j) + 3n_2(x_i + x_j)^2 + p_2(2\delta^2 - 1)$，$b_5 = 2m_1(x_i + x_j) + 3m_2(x_i + x_j)^2$，$b_6 = 2n_1(x_i + x_j) + 3n_2(x_i + x_j)^2$。

同理，在双模平衡点 E_3 处，系统产生 fold 分岔的条件为：

$$-b_5 b_6 + a_5 a_6 = 0$$

系统产生 Hopf 分岔的条件为：

$$(a_5\mu_2 + a_6\mu_1)^2 + (a_5\mu_2 + a_6\mu_1)\cdot(-a_5 - a_6 + \mu_1\mu_2)(\mu_1 + \mu_2) + (-b_5 b_6 + a_5 a_6)(\mu_1 + \mu_2)^2 = 0$$

2 不含有“叉形分岔点”的簇发振荡现象分析

本文固定参数 $\omega_1^2 = 1$，$m_2 = -1.25$，$p_1 = -1$，$f_1 = -0.5$，$\mu_2 = -1$，$\omega_2^2 = 1$，$n_1 = -0.5$，$n_2 = -1.25$，$p_2 = 1$，$f_2 = -1$。

在这一节中用固定参数 $m_1 = -1$ 来研究其簇发振荡机理。如图 1 所示，考虑系统在慢变参数 $\cos(\Omega_2 t) = \delta$ 作用下，不同 μ_1 所产生的不同的簇发振荡行为。由图 1 可知，系统在 $\mu_1 \in (0, 1)$ 时，会产生有效的簇发振荡行为。系统在 $\mu_1 = 0.35$ 时可能存在两个 Hopf 点以及两个 fold 点，如图 2 所示。在 $\mu_1 = 0.5$ 时也有可能存在三个 Hopf 点以及两个 fold 点共存的行为，如图 3 所示。同时还发现了一种特殊的簇发振荡模式，虽然系统在 $\mu_1 = 0.1$ 时存在两个 Hopf 点以及两个 fold 点共存的行为，但事实上，真正起到作用的只有两个 fold 点，如图 4 所示。

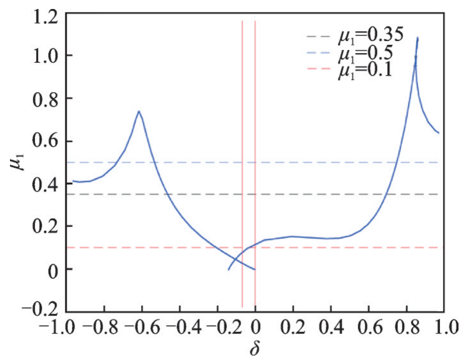


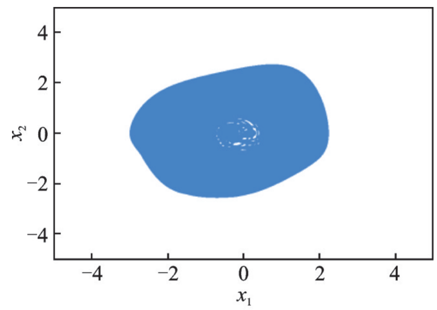
图 1 双参数分岔集(红色实线表示 fold 点，蓝色实线表示 Hopf 点)

Fig. 1 Two parameter bifurcation set (the red solid lines represent fold points, the blue solid lines represent Hopf points)

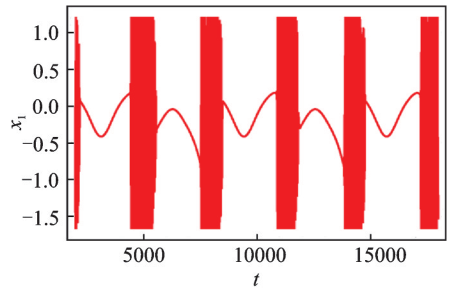
2.1 “延迟 Hopf/fold/Hopf/fold”型簇发振荡现象分析

在 $\mu_1 = 0.35$ 时，存在两个 Hopf 点记为 $H1(0.6913, -0.3816)$，$H2(0.4609, 0.1295)$，也存在两个折叠点，记为 $LP1(-0.06833, -0.8872)$ 和 $LP2(-4.556^{-9}, 4.903^{-5})$，如图 2 所示。在文中的转换相图和平衡分支叠加图中，红色实线代表稳定的平衡点，黑色实线代表不稳定的平衡点，绿色实心圆表示稳定极限环，蓝色空心圆表示不稳定极限环。

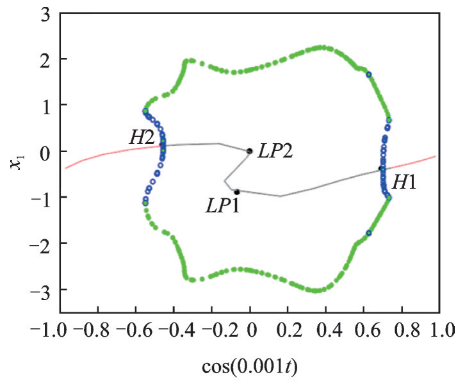
在图 2 中，系统一共受到四个不稳定平衡点的影响。系统在右上方沿着平衡点曲线图运动，首先碰到 $H1$，但并未直接开始大幅振荡，继续向前运动一段时间后，才开始进行簇发振荡，随着大幅振荡现象渐渐消退，由于 $LP2$ 的吸引，系统跳跃到上分支，并沿着上分支前进了一段时间，渐渐转移到了稳定平衡点分支，一直沿着稳定平衡点分支移动至最小值 -1 后，开始反向运动；同样地，系统先遇到 $H2$ 之后，进行簇发振荡，随着大幅振荡现象的渐渐消退，



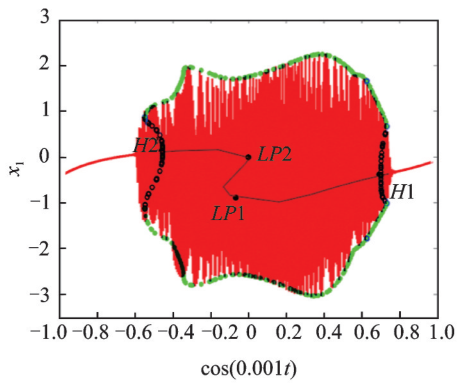
(a) 相图
(a) Phase portrait



(b) 时间历程曲线图
(b) Time history



(c) 平衡分支(cos(0.001t), x_1)
(c) Equilibrium branches on (cos(0.001t), x_1)



(d) 转换相图和平衡分支(cos(0.001t), x_1)的叠加图
(d) Overlap of the transformed phase portrait and equilibrium branches on (cos(0.001t), x_1)

图 2　$\mu_1=0.35$下的延迟 Hopf/fold/Hopf/fold 簇发振荡
Fig. 2　Delay Hopf/fold/Hopf/fold bursting oscillation for $\mu_1=0.35$

系统沿着不平衡点曲线运动,逐渐被 $LP1$ 吸引,跳跃到下分支,沿着下分支运动。至此,系统的一个周期已完全进行,称这种簇发振荡现象为“延迟 Hopf/fold/Hopf/fold”型。对应到实际的模型中,会观察到双稳态层合板在这组参数下产生“延迟 Hopf/fold/Hopf/fold”型簇发振荡。

2.2　"Hopf/fold/Hopf/Hopf/fold"型簇发振荡现象分析

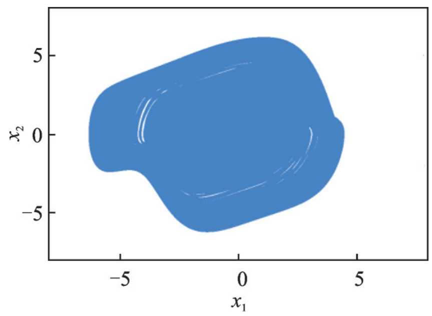
在图 3 中 $\mu_1=0.5$ 时,系统存在三个 Hopf 点,分别为 $H1(0.7474,-0.3307)$,$H2(-0.5315,0.1017)$,$H3(-0.7317,-0.01579)$,还存在两个 fold 点,分别为 $LP1(0.1146,0.782)$,$LP2(2.272^{-10},-2.186^{-5})$。

在图 3 中,系统受到五个不稳定平衡点的影响。系统在右上方沿着平衡点曲线图运动,碰到 $H1$ 之后,开始进行簇发振荡,大幅振荡现象渐渐消退之后,由于 $LP2$ 的吸引,系统跳跃到上分支,沿着上分支前进了一段时间后,遇到了分岔点 $H2$,也发生了簇发振荡现象,随着大幅振荡的逐渐消退,继续向左边前进,紧接着遇到了分岔点 $H3$,也开始出现簇发振荡现象,大幅振荡渐渐消退后,系统继续沿着不稳定平衡点分支向左边运动,直至到达最左边的最小值-1,随后开始反向运动;同样地,系统先遇到 $H3$ 之后,进行簇发振荡,随着大幅振荡现象的渐渐消退,系统沿着稳定平衡点曲线运动,随后碰到了分岔点 $H2$,也进行簇发振荡,随着大幅振荡的逐渐消退,系统逐渐被 $LP1$ 吸引,跳跃到下分支,一直沿着下分支运动,遇到了分岔点 $H1$,类似地,发生了簇发振荡现象,直至系统到达最右边 1 处才完成了一个完整的运动轨迹。称这种簇发振荡现象为“Hopf/fold/Hopf/Hopf/fold”型。对应到实际的模型中,会观察到双稳态层合板在这组参数下产生“Hopf/fold/Hopf/Hopf/fold”型簇发振荡。

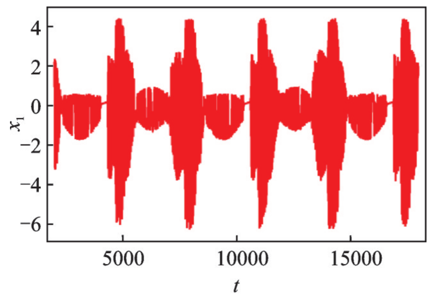
2.3　“fold/fold”型簇发振荡现象分析

图 4 中 $\mu_1=0.1$ 时,系统存在两个 Hopf 点,分别为 $H1(0.04058,-0.9249)$,$H2(-0.1999,0.1785)$,还存在两个 fold 点,分别为 $LP1(-0.1409,-0.5971)$ 和 $LP2(-7.42^{-10},3.265^{-5})$。

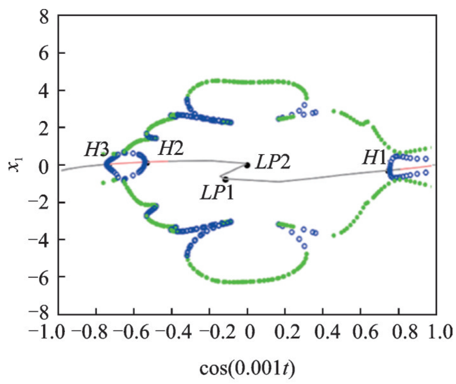
在图 4 中,虽然系统中存在四个不稳定平衡点,但事实上,真正起到作用的只有两个折叠点,即 $LP1$,$LP2$。系统在右上方沿着平衡点曲线图运动,虽然遇到了 $H1$,但并未发生分岔行为,系统继续运动遇到了 $LP1$,并跳跃到上分支,开始了簇发振荡,随着尖峰态的减弱,系统继续沿着稳定平衡点曲线向左移动,直至最小值-1处,开始反向运动;同样地,系统先遇到 $H2$,也并未发生簇发振荡现象,继续运动,碰到了 $LP2$,跳跃到下分支,进行了簇发振荡,随着大幅振荡现象的渐渐消退,系统沿着稳定平衡



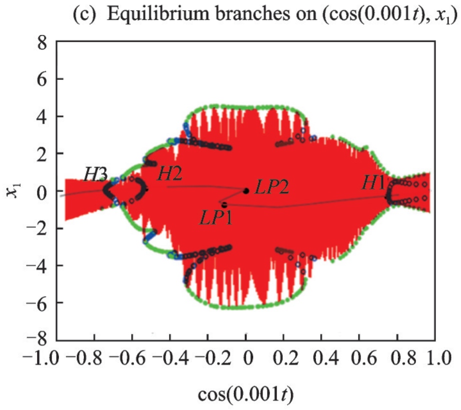
(a) 相图
(a) Phase portrait



(b) 时间历程曲线图
(b) Time history



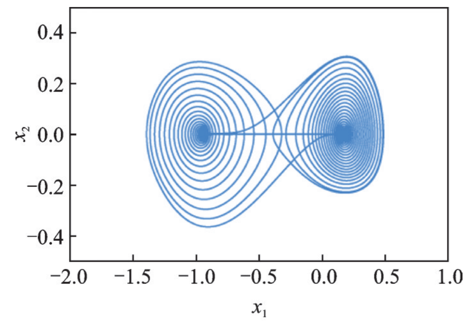
(c) 平衡分支$(\cos(0.001t), x_1)$
(c) Equilibrium branches on $(\cos(0.001t), x_1)$



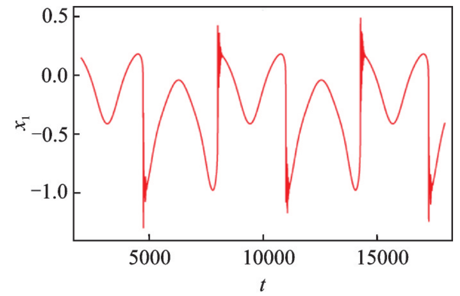
(d) 转换相图和平衡分支$(\cos(0.001t), x_1)$的叠加图
(d) Overlap of the transformed phase portrait and equilibrium branches on $(\cos(0.001t), x_1)$

图 3　$\mu_1=0.5$下的 Hopf/fold/Hopf/Hopf/fold 簇发振荡

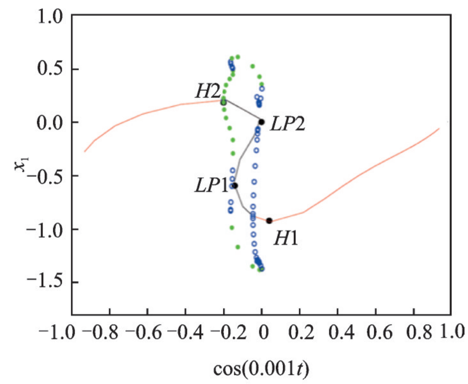
Fig. 3　Hopf/fold/Hopf/Hopf/fold bursting oscillation for $\mu_1=0.5$



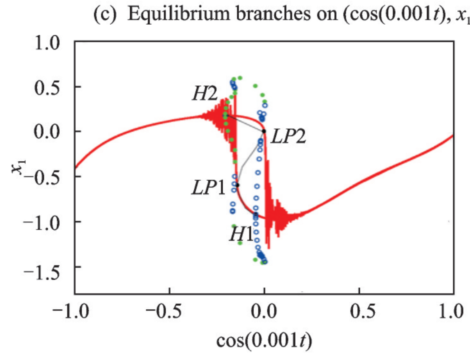
(a) 相图
(a) Phase portrait



(b) 时间历程曲线图
(b) Time history



(c) 平衡分支$(\cos(0.001t), x_1)$
(c) Equilibrium branches on $(\cos(0.001t), x_1)$



(d) 转换相图和平衡分支$(\cos(0.001t), x_1)$的叠加图
(d) Overlap of the transformed phase portrait and equilibrium branches on $(\cos(0.001t), x_1)$

图 4　$\mu_1=0.1$下的 fold/fold 簇发振荡

Fig. 4　fold/fold bursting oscillation for $\mu_1=0.1$

点曲线运动，直至系统到达最右边 1 处才完成了一个完整的运动轨迹。称这种簇发振荡现象为“fold/fold”型。对应到实际的模型中，会观察到双稳态层合板在这组参数下产生“fold/fold”型簇发振荡。

3　含有“叉形分岔点”的簇发振荡现象分析

在这一节中用固定参数 $m_1=1$ 来研究其簇发振荡机理。如图 5 所示，考虑系统在慢变参数

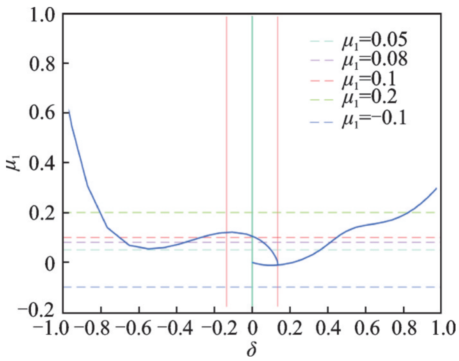


图5　双参数分岔集（红色实线以及黑色实线表示 fold 点，蓝色实线表示 Hopf 点，绿色实线表示叉形分岔点“BP”）

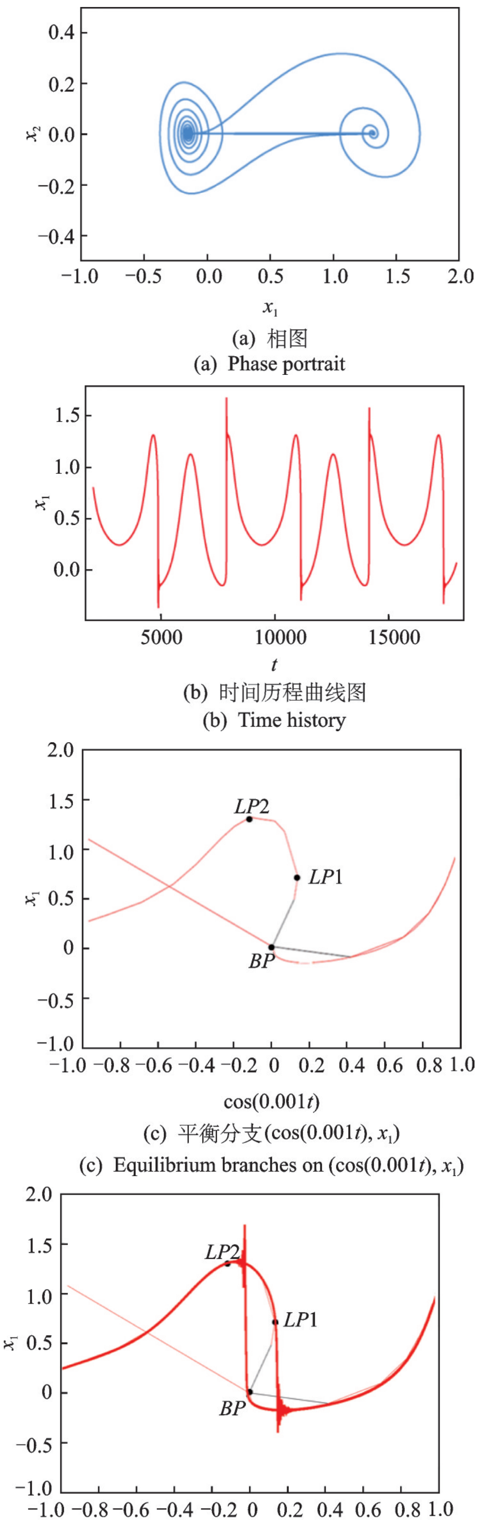
Fig. 5　Two parameter bifurcation set (the red and black solid lines represent fold points, the blue solid lines represent Hopf points, the green solid lines represent pitchfork bifurcation points, “BP”)

$\cos(\Omega_2 t)=\delta$ 作用下，不同 μ_1 可能会产生不同的簇发振荡行为。根据图5可知，系统在不同 μ_1 作用时，系统会产生不同的簇发振荡行为，与第2节不同的是，这里的簇发振荡行为受到叉形分岔的影响。具体可以分为以下几种情形。

3.1　“BP/fold”型簇发振荡现象分析

在图6中 $\mu_1=-0.1$ 时，系统存在两个 fold 点，分别为 $LP1(0.1353, 0.7113)$，$LP2(-0.117, 1.299)$，还存在一个 BP 点，为 $BP(0.00022, 0.01072)$。

在图6中，虽然系统中存在三个不稳定平衡点，但真正起作用的只有一个 fold 和一个叉形分岔点，即 $LP1$ 和 BP。系统在左上方和右上方同时沿着平衡点曲线图运动，遇到了点 BP，并跳跃到上分支，开始了簇发振荡，随着尖峰态的减弱，系统继续沿着稳定平衡点曲线向左移动，直至最小值−1处，开始反向运动；系统遇到 $LP2$，但并未发生簇发振荡现象，继续运动，碰到了 $LP1$，跳跃到下分支，进行了簇发振荡，随着大幅振荡的渐渐消退，系统沿着稳定平衡点曲线运动，直至到达最右边1处才完成了一个完整的运动轨迹，称这种簇发振荡现象为“BP/fold”型。对应到实际的模型中，能观察到双稳态层合板在这组参数下产生“BP/fold”型簇发振荡。



(a) 相图
(a) Phase portrait

(b) 时间历程曲线图
(b) Time history

(c) 平衡分支(cos(0.001t), x_1)
(c) Equilibrium branches on (cos(0.001t), x_1)

(d) 转换相图和平衡分支(cos(0.001t), x_1)的叠加图
(d) Overlap of the transformed phase portrait and equilibrium branches on (cos(0.001t), x_1)

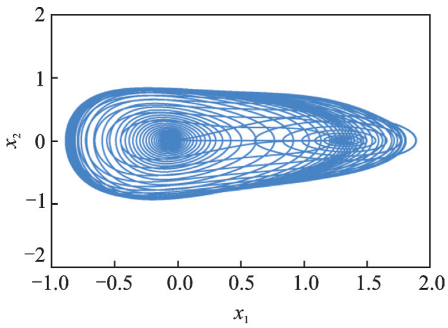
图6　$\mu_1=-0.1$ 下的 BP/fold 簇发振荡

Fig. 6　BP/fold bursting oscillation for $\mu_1=-0.1$

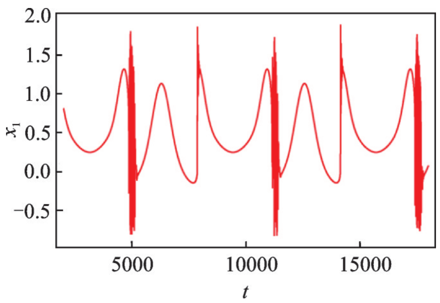
3.2　“BP/fold/Hopf”型簇发振荡现象分析

在图7中 $\mu_1=0.05$ 时，系统存在两个 fold 点，分别为 $LP1(0.1353, 0.7113)$ 和 $LP2(-0.117, 1.299)$，一个 BP 点，为 $BP(0.00022, 0.01072)$，以及一个 Hopf 点，为 $H1(0.3609, -0.114)$。

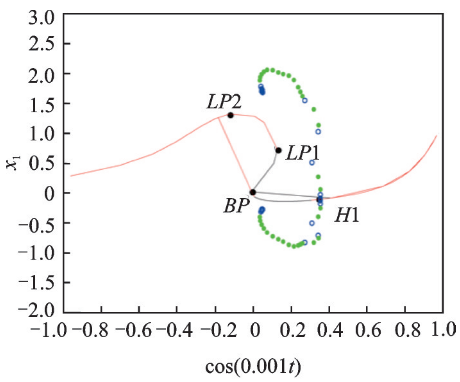
在图7中，虽然系统中存在四个不稳定平衡点，但真正起作用的只有一个 fold 点、一个叉形分岔点和一个 Hopf 点，即 $LP1$，BP 和 $H1$。系统在左上方和右上方同时沿着平衡点曲线运动，遇到了点 BP，并跳跃到上分支，开始了簇发振荡，随着尖峰态的减弱，系统继续沿着稳定平衡点曲线向左移动，直至最小值−1处，系统开始反向运动；系统遇到 $LP2$，但



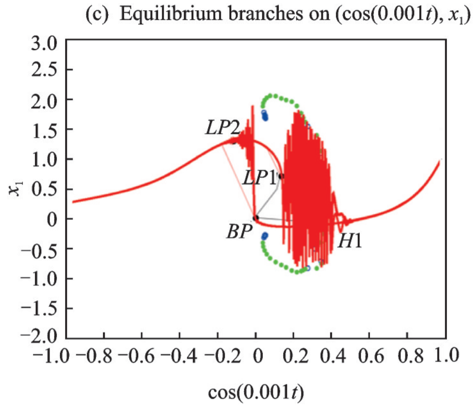
(a) 相图
(a) Phase portrait



(b) 时间历程曲线图
(b) Time history



(c) 平衡分支(cos(0.001t), x_1)
(c) Equilibrium branches on (cos(0.001t), x_1)



(d) 转换相图和平衡分支(cos(0.001t), x_1)的叠加图
(d) Overlap of the transformed phase portrait and equilibrium branches on (cos(0.001t), x_1)

图 7　$\mu_1=0.05$ 下的 BP/fold/Hopf簇发振荡
Fig. 7　BP/fold/Hopf bursting oscillation for $\mu_1=0.05$

并未发生簇发振荡现象，继续运动，碰到了 $LP1$，跳跃到下分支，进行簇发振荡，随着大幅振荡的渐渐消退，系统又遇到了 $H1$，进行簇发振荡运动，随着尖峰态的逐渐消退，系统继续沿着稳定平衡点曲线运动，直至到达最右边 1 处才完成了一个完整的运动轨迹。称这种簇发振荡现象为“BP/fold/Hopf”型。对应到实际的模型中，可以观察到双稳态层合板在这组参数下产生“BP/fold/Hopf”型簇发振荡。

3.3 “BP/Hopf/Hopf/fold/Hopf”型簇发振荡现象分析

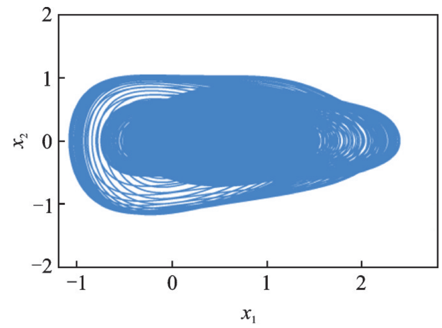
在图 8 中 $\mu_1=0.08$ 时，系统存在两个 fold 点，分别为 $LP1$(0.1353，0.7113)和 $LP2$(−0.1351，1.285)，一个 BP 点，为 BP(0.00022，0.01072)，以及四个 Hopf 点，分别为 $H1$(0.05746，1.179)，$H2$(−0.354，0.9216)和 $H3$(−0.6845，0.4561)，$H4$(−0.354，−0.9393)。

在图 8 中，虽然系统中存在七个不稳定平衡点，但真正起作用的只有一个 fold 点、一个叉形分岔点和三个 Hopf 点，即 $LP1$，BP 和 $H1$，$H2$，$H4$。系统在左上方和右上方同时沿着平衡点曲线图运动，遇到了点 BP，并跳跃到上分支，立即遇到了 $H1$，开始簇发振荡，随着尖峰态的减弱，系统继续沿着稳定平衡点曲线向左移动，遇到 $LP2$，但并未发生簇发振荡，其次遇到了 $H2$，开始大幅振荡，又碰到了 $H3$，并未产生簇发振荡现象，直至最小值 −1 处，系统开始反向运动；系统继续运动，碰到了 $LP1$，跳跃到下分支，进行簇发振荡，随着簇发振荡现象的渐渐消退，系统又遇到了 $H4$，进行簇发振荡运动，随着尖峰态的逐渐消退，系统继续沿着稳定平衡点曲线运动，直至到达最右边 1 处才完成了一个完整的运动轨迹。称这种簇发振荡现象为“BP/Hopf/Hopf/fold/Hopf”型。对应到实际的模型中，会观察到双稳态层合板在这组参数下产生“BP/Hopf/Hopf/fold/Hopf”型簇发振荡。

3.4 “BP/Hopf/fold/Hopf”型簇发振荡现象分析

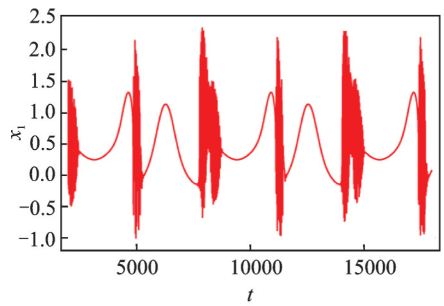
在图 9 中 $\mu_1=0.1$ 时，系统存在两个 fold 点，分别为 $LP1$(0.1353，0.7113)，$LP2$(−0.2049，1.2)，一个 BP 点，为 BP(0.001271，0.02644)，以及三个 Hopf 点，分别为 $H1$(0.4495，−0.07972)，$H2$(−0.2682，1.091)和 $H3$(−0.7213，0.4265)

在图 9 中，虽然系统中存在六个不稳定平衡点，但真正起作用的只有一个 fold 点、一个叉形分岔点和两个 Hopf 点，即 $LP1$，BP 和 $H1$，$H2$。系统在左上方和右上方同时沿着平衡点曲线图运动，遇到了点 BP，并跳跃到上分支，遇到了 $LP2$，系统并未受到 $LP2$ 的影响，继续向左运动遇到了 $H2$，由于不稳定极限环的影响，系统也进行大幅振荡，随着尖峰态的减弱，系统继续沿着稳定平衡点曲线向左



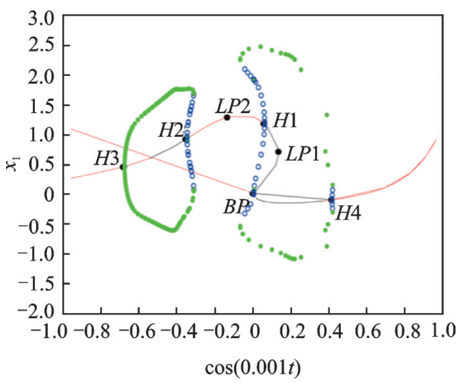
(a) 相图

(a) Phase portrait



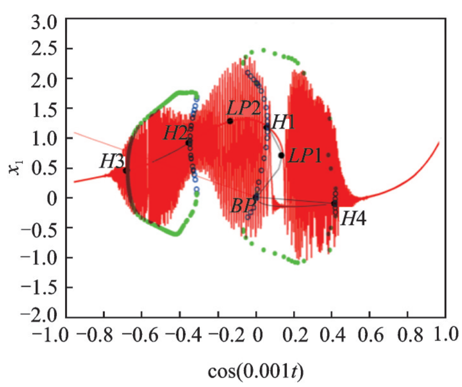
(b) 时间历程曲线图

(b) Time history



(c) 平衡分支(cos(0.001t), x_1)

(c) Equilibrium branches on (cos(0.001t), x_1)



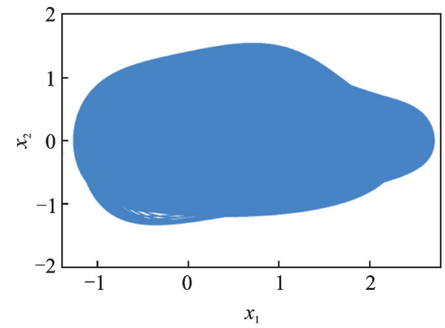
(d) 转换相图和平衡分支(cos(0.001t), x_1)的叠加图

(d) Overlap of the transformed phase portrait and equilibrium branches on (cos(0.001t), x_1)

图 8　$\mu_1 = 0.08$ 下的 BP/Hopf/Hopf/fold/Hopf 簇发振荡

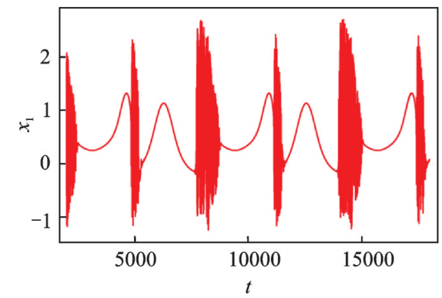
Fig. 8　BP/Hopf/Hopf/fold/Hopf bursting oscillation for $\mu_1 = 0.08$

移动遇到 $H3$，并未产生簇发振荡现象，直至最小值 −1 处，系统开始反向运动；系统继续运动后，碰到了 $LP1$，跳跃到下分支，进行簇发振荡，随着大幅振



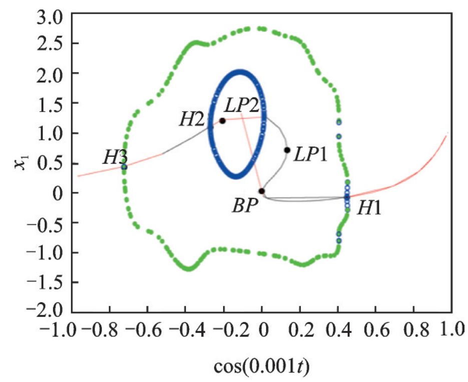
(a) 相图

(a) Phase portrait



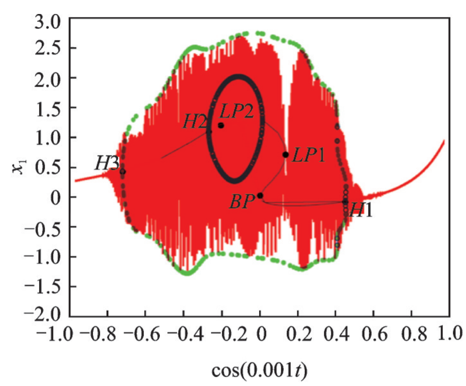
(b) 时间历程曲线图

(b) Time history



(c) 平衡分支(cos(0.001t), x_1)

(c) Equilibrium branches on (cos(0.001t), x_1)



(d) 转换相图和平衡分支(cos(0.001t), x_1)的叠加图

(d) Overlap of the transformed phase portrait and equilibrium branches on (cos(0.001t), x_1)

图 9　$\mu_1 = 0.1$ 下的 BP/Hopf/fold/Hopf 簇发振荡

Fig. 9　BP/Hopf/fold/Hopf bursting oscillation for $\mu_1 = 0.1$

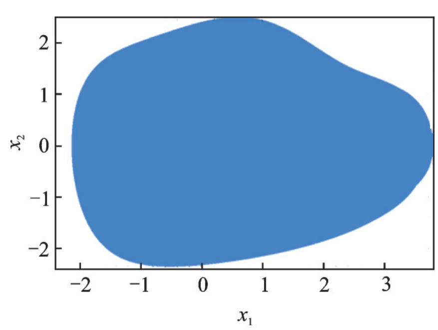
荡的渐渐消退，系统又遇到了 $H1$，进行簇发振荡运动，随着尖峰态的逐渐消退，系统继续沿着稳定平衡点曲线运动，直至到达最右边 1 处才完成了一个完整的运动轨迹。称这种簇发振荡现象为“BP/

Hopf/fold/Hopf”型。对应到实际的模型中，会观察到双稳态层合板在这组参数下产生“BP/Hopf/fold/Hopf”簇发振荡。

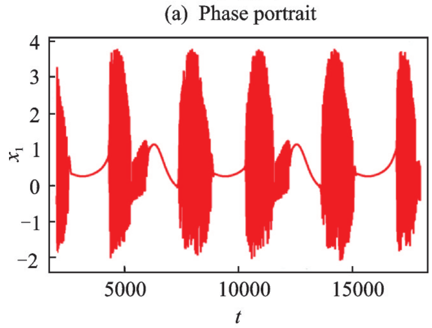
3.5 “fold/fold/Hopf/fold//fold/Hopf”型簇发振荡现象分析

与之前几种情况不同的是，在图10中 $\mu_1=0.2$ 时，系统不存在 BP 点，是由于 BP 点已转化为fold点，所以在这种情况下，系统存在三个fold点，分别为 $LP1(0.005077, -0.4583)$，$LP2(0.1353, 0.7113)$，$LP3(-0.1888, 1.223)$ 以及两个Hopf点，分别为 $H1(0.8308, 0.3555)$，$H2(0.817, 0.3598)$。

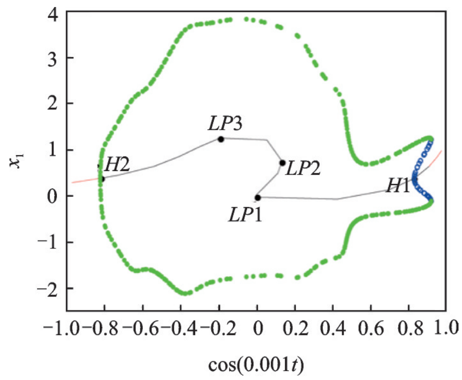
在图10中，系统中一共存在5个不稳定平衡点。系统在右上方沿着平衡点曲线图运动，遇到了点 $LP1$，并跳跃到上分支，开始簇发振荡，随着尖峰态的减弱，系统继续沿着平衡点曲线向左移动遇到 $LP3$，也发生簇发振荡现象，其次遇到了 $H2$，开始大幅振荡，随着尖峰态的逐渐减弱，系统继续沿着平衡点曲线想左边运动，直至最小值−1处开始反向运动；系统继续运动，再次遇到 $LP3$，开始大幅振荡，并碰到了 $LP2$，跳跃到下分支，进行簇发振荡，随着大幅振荡的渐渐消退，系统又遇到了 $H1$，进行簇发振荡运动，随着尖峰态的逐渐消退，系统继续沿着稳定平衡点曲线运动，直至到达最右边1处才完成了一个完整的运动轨迹。称这种簇发振荡现象为“fold/fold/Hopf/fold/fold/Hopf”型。对应到实际的模型中，会观察到双稳态层合板在这组参数下产生“fold/fold/Hopf/fold/fold/Hopf”型簇发振荡。



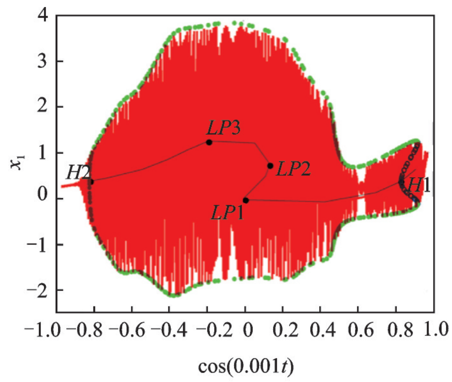
(a) 相图
(a) Phase portrait



(b) 时间历程曲线图
(b) Time history



(c) 平衡分支(cos(0.001t), x_1)
(c) Equilibrium branches on (cos(0.001t), x_1)



(d) 转换相图和平衡分支(cos(0.001t), x_1)的叠加图
(d) Overlap of the transformed phase portrait and equilibrium branches on (cos(0.001t), x_1)

图10 $\mu_1=0.2$ 下的fold/fold/Hopf/fold/fold/Hopf簇发振荡

Fig. 10 fold/fold/Hopf/fold/fold/Hopf bursting oscillation for $\mu_1=0.2$

4 结 论

本文结合快慢动力学分析方法和分岔理论，把外激励项视为系统的慢变量，从双参数分岔集出发，从理论上分析了不同的参数下可能得到的簇发振荡现象类型，结合数值模拟，通过分析平衡点曲线与转换相图的叠加图，研究了双稳态复合材料层合板结构在不同参数下的簇发振荡现象及其机理.数值模拟结果表明：

(1)在不含“叉形分岔点”情形下，会产生三种簇发振荡类型，分别为“延迟Hopf/fold/Hopf/fold”，“Hopf/fold/Hopf/Hopf/fold”和“fold/fold”；

(2)在含“叉形分岔点”情形下，会产生五种簇发振荡类型，分别为“BP/fold”，“BP/fold/Hopf”，“BP/Hopf/Hopf/fold/Hopf”，“BP/Hopf/fold/Hopf”和“fold/fold/Hopf/fold/ fold/Hopf”。

参考文献：

[1] 蔡泽民.耦合Hodgkin-Huxley模型频域两尺度行为及其分岔机制[D].镇江：江苏大学，2019.

Cai Zemin. Dynamical behaviors as well as the bifurcation mechanism of a coupled Hodgkin-Huxley model with two scales in frequency domain[D]. Zhenjiang: Jiangsu University, 2019.

[2] 张晓芳，董颖涛，韩修静，等. 参外联合激励下一类混沌系统的动力学机理[J]. 振动与冲击，2021，40(1)：183-191.
Zhang Xiaofang, Dong Yingtao, Han Xiujing, et al. Dynamic mechanism of a class of chaotic systems under combination of parametric and external excitation [J]. Journal of Vibration and Shock, 2021, 40(1): 183-191.

[3] 夏付兵，韩修静，瞿汭，等. 频域两尺度簇发振荡结构及其动力学机制[J]. 河南科技大学学报(自然科学版)，2017，38(4)：84-89.
Xia Fubing, Han Xiujing, Qu Rui, et al. Bursting oscillation structures and dynamic mechanism in two frequency scales[J]. Journal of Henan University of Science and Technology (Natural Science), 2017, 38(4): 84-89.

[4] Wei M K, Jiang W N, Ma X D, et al. Compound bursting dynamics in a parametrically and externally excited mechanical system[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2021, 143: 110605.

[5] 夏雨，毕勤胜，罗超，等. 双频 1:2 激励下修正蔡氏振子两尺度耦合行为[J]. 力学学报，2018，50(2)：362-372.
Xia Yu, Bi Qinsheng, Luo Chao, et al. Behaviors of modified Chua's oscillator two time scales under two excitatoins with frequency ratio at 1:2[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2018, 50(2): 362-372.

[6] 吴天一，陈小可，张正娣. 非对称型簇发振荡吸引子结构及其机理分析[J]. 物理学报，2017，66(11)：110501.
Wu Tianyi, Chen Xiaoke, Zhang Zhengdi. Structures of the asymmetrical bursting oscillation attractors and their bifurcation mechanisms[J]. Acta Physica Sinica, 2017, 66(11): 110501.

[7] Rinzel J. Bursting oscillation in an excitable membrane model[A]. Ordinary and Partial Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics [M]. Berlin: Springer 1985, 1151: 304-316.

[8] Rush M E, Rinzel J. Analysis of bursting in a thalamic neuron model[J]. Biological Cybernetics, 1994, 71: 281-291.

[9] Bi Q S, Zhang R, Zhang Z D. Bifurcation mechanism of bursting oscillations in parametrically excited dynamical system[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 243: 482-491.

[10] Zhang Z D, Liu B B, Bi Q S. Non-smooth bifurcations on the bursting oscillations in a dynamic system with two timescales[J]. Nonlinear Dynamics, 2015, 79 (1): 195-203.

[11] 张正娣，刘杨，张苏珍，等. 余维-1非光滑分岔下的簇发振荡及其机理[J]. 物理学报，2017，66(2)：020501.
Zhang Z D, Liu Y, Zhang S Z, et al. Bursting oscillations as well as the mechanism with codimension-1 non-smooth bifurcation[J]. Acta Physica Sinica, 2017, 66 (2): 020501.

[12] Qu Z F, Zhang Z D, Peng M, et al. Non-smooth bursting analysis of a Filippov-type system with multiple-frequency excitations[J]. Pramana, 2018, 91(5): 72.

[13] Zhang R, Peng M, Zhang Z D, et al. Bursting oscillations as well as the bifurcation mechanism in a non-smooth chaotic geomagnetic field model [J]. Chinese Physics B, 2018, 27(11): 110501.

[14] Peng M, Zhang Z D, Qu Z F, et al. Mixed-mode oscillations and the bifurcation mechanism for a Filippov-type dynamical system[J]. Pramana, 2020, 94(1): 14.

[15] Wang Z X, Zhang Z D, Bi Q S. Relaxation oscillations in a nonsmooth oscillator with slow-varying external excitation[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2019, 29(7): 1930019.

[16] Huang L, Wu G Q, Zhang Z D, et al. Fast-slow dynamics and bifurcation mechanism in a novel chaotic system[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2019, 29(10): 1930028.

[17] Mao W H, Chen Z Y, Zhang Z D, et al. Nonlinear vibrations by periodic perturbation in a Murali-Lakshmanan-Chua electronic circuit combined with multiple frequency signal[J]. Journal of Vibration Engineering and Technologies, 2020, 8(4): 567-678.

[18] Wang Z X, Zhang Z D, Bi Q S. Bursting oscillations with delayed C-bifurcations in a modified Chua's circuit [J]. Nonlinear Dynamics, 2020, 100(3): 2899-2915.

[19] Shen B Y, Zhang Z D. Complex bursting oscillations induced by bistable structure in a four-dimensional Filippov-type laser system[J]. Pramana, 2021, 95(3): 97.

[20] Yu Y, Zhang C, Han X J. Routes to bursting in active control system with multiple time delays[J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 88(3): 2241-2254.

[21] Han X J, Yu Y, Zhang C. A novel route to chaotic bursting in the parametrically driven Lorenz system[J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 88(4): 2889-2897.

[22] Yu Y, Zhang Z D, Han X J. Periodic or chaotic bursting dynamics via delayed pitchfork bifurcation in a slow-varying controlled system[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2018, 56: 380-391.

[23] Han X J, Zhang Y, Bi Q S, et al. Two novel bursting patterns in the Duffing system with multiple-frequency slow parametric excitations[J]. Chaos, 2018, 28(4): 043111.

[24] Han X J, Bi Q S, Kurths J. Route to bursting via pulse-shaped explosion[J]. Physical Review E, 2018, 98(1): 010201.

[25] Wang Q Q, Yu Y, Zhang Z Z, et al. Melnikov-threshold-triggered mixed-mode oscillations in a family of ampli-

tude-modulated forced oscillator[J]. Journal of Low Frequency Noise Vibration and Active Control, 2019, 38 (2): 377-387.

[26] Han X J, Liu Y, Bi Q S, et al. Frequency-truncation fast-slow analysis for parametrically and externally excited systems with two slow incommensurate excitation frequencies[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2019, 72: 16-25.

[27] Wei M K, Han X J, Zhang X F, et al. Bursting oscillations induced by bistable pulse-shaped explosion in a nonlinear oscillator with multiple-frequency slow excitations [J]. Nonlinear Dynamics, 2020, 99(2): 1301-1312.

[28] Ma X D, Han X J, Jiang W A, et al. Two bursting patterns induced by system solutions approaching infinity in a modified Rayleigh-Duffing oscillator[J]. Pramana, 2020, 94(1): 159.

[29] Jiang W N, Han X J, Chen L Q, et al. Improving energy harvesting by internal resonance in a spring-pendulum system[J]. Acta Mechanica Sinica, 2020, 36(3): 618-623.

[30] Wei M K, Jiang W N, Ma X D, et al. A new route to pulse-shaped explosion and its induced bursting dynamics [J]. Nonlinear Dynamics, 2021, 104(4): 4493-4503.

[31] Zhang W, Ma W S, Zhang Y F, et al. Double excitation multi-stability and multi-pulse chaotic vibrations of a bistable asymmetric laminated composite square panels under foundation force[J]. Chaos, 2020, 30(8): 083105.

Analysis of bursting oscillation in a class of bistable composite laminates

QIAN You-hua, *YANG Yuan*

(College of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China)

Abstract: Bursting oscillation is a fast-slow dynamic phenomenon widely existing in nature. These years, it has been a hot topic on nonlinear dynamics. It usually appears as the transition between large and small oscillations due to bifurcation points or unstable limit cycles. According to different dynamic mechanisms, bursting oscillation can be divided into various modes such as 'point-point' mode and 'point-ring' mode. This paper focuses on a class of bistable composite laminates of nonlinear systems by parametric excitation and concerns the case where one parameter excitation frequency is an integer multiple of the other. The parameter excitation is regarded as a slow variable parameter, so the fast and slow subsystems of the multi-frequency parameter excitation system are obtained based on the fast-slow analysis method and the bifurcation behavior of the fast subsystem is analyzed. In the bifurcation analysis, the Hopf and fold bifurcation conditions of the fast subsystem with single mode and double mode bifurcation points are investigated. Exploiting double parameter bifurcation sets, phase portraits, time history curves and the overlap of transformed phase portraits with equilibrium branches, the mechanism and dynamic behavior of bursting oscillation with different parameters are studied. It is observed that the bursting oscillation phenomenon with different parameters may be independent of the pitchfork bifurcation points.

Key words: bursting oscillation; fast and slow analysis method; pitchfork bifurcation; transition phase diagram; slow variable parameters

作者简介: 钱有华(1978—),男,博士,教授。E-mail: qyh2004@zjnu.edu.cn。