复杂边界条件下功能梯度圆环板平稳随机振动响应特性分析

左 朋[1,2], 石先杰[2], 葛任伟[2], 罗景润[2]

(1. 中国科学技术大学近代力学系, 安徽 合肥 230026;
2. 中国工程物理研究院总体工程研究所, 四川 绵阳 621999)

摘要: 提出一种可用于分析复杂边界条件下功能梯度圆环板平稳随机振动响应特性的谱几何法-虚拟激励法(spectro geometric method-pseudo excitation method, SGM-PEM)。采用沿圆环板边界均匀分布的边界约束弹簧来模拟复杂边界条件,通过虚拟激励法将平稳随机载荷转化为虚拟简谐载荷。在一阶剪切变形理论框架下,采用以简洁三角函数为内核的谱几何法来描述圆环板结构的位移容许函数。基于 Rayleigh-Ritz 法推导了平稳随机激励作用下功能梯度圆环板的动力学分析模型。通过与有限元法结果对比分析,验证了文中构建的分析模型的有效性和准确性。分析了梯度指数、厚度参数、边界条件等因素对功能梯度圆环板平稳随机振动响应特性的影响规律。

关键词: 随机振动; 功能梯度圆环板; 平稳随机激励; 谱几何法-虚拟激励法; 复杂边界条件

中图分类号: O324; TB532 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2023)03-0634-11

DOI:10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2023.03.005

引 言

作为一种新型复合材料,功能梯度材料自被提出便受到国内外学者的广泛关注。而作为基本结构单元,由功能梯度材料所制造的圆环板在航空航天工程中被广泛应用,如卫星的隔舱壁,发动机的端盖等。近年来,功能梯度圆环板结构动力学特性分析成为研究热点,国内外研究学者针对该问题开展了大量研究,提出了一系列分析方法。Żur[1]采用拟格林函数法分析了弹性支承功能梯度圆环板的自由振动特性。Zhao 等[2]采用 Rayleigh-Ritz 法获得了任意边界条件下功能梯度厚圆环板的自由振动三维解。Jodaei 等[3]采用基于状态空间的微分求积法和人工神经网络技术,分别对不同边界条件下功能梯度圆环板的自由振动特性进行分析,并对比了两种方法获取的固有频率结果,验证了人工神经网络技术在预示功能梯度圆环板自由振动特性方面的有效性。基于三维弹性理论,Jin 等[4]采用改进傅里叶级数法研究了任意边界条件下功能梯度圆环板的自由振动特性。Malekzadeh 等[5]基于微分求积法和三维弹性理论求解了热环境下功能梯度厚圆环板自由振动解。滕兆春等[6-7]基于微分求积法分析了功能梯度圆环板面内自由振动特性。针对材料属性沿径向变化的功能梯度圆环板,吕朋等[8]采用 Rayleigh-Ritz 法分析了其在热环境下的面内自由振动特性,并在研究中考虑了弹性边界条件。Dong[9]基于 Ritz 法求解了功能梯度圆环板的三维自由振动解。

通过上述文献分析可以发现,虽然国内外学者针对功能梯度圆环板的动力学特性求解开展了大量工作,但是研究成果主要集中在确定性振动分析方面。然而,航空航天工程结构在实际服役期间,通常会经受各种形式的随机载荷作用,从而使得结构产生复杂的动力学行为,甚至出现疲劳破坏现象。此外,功能梯度圆环板作为工程结构的基本单元,其在载荷作用下的振动特性影响着工程结构的动力学行为。因此,有必要开展随机载荷作用下功能梯度圆环板相应的振动响应特性研究,为实际工程结构设计提供相应的理论支撑。

近年来,学者针对随机激励下板壳结构的振动响应特性开展了相关研究。在研究中采用了有限元法[10-12],谱有限元法[13]等方法对该问题进行求解,但这些方法普遍存在计算耗时长的问题。随后,一些学者将虚拟激励法[14]用于研究板壳结构随机振动响应特性,大大缩短了计算时间。孙悦等[15]结合有限元法和虚拟激励法对硬涂层薄板随机振动响应特性进行分析,并讨论了硬涂层的减振效果。戴新进[16]结合有限元法和虚拟激励法对平稳/非平稳随机激

收稿日期: 2022-01-16; **修订日期:** 2022-06-19

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(51975547);中国工程物理研究院院长基金资助项目(YZJJLX2018008)。

励作用下复合材料层合板的振动响应行为开展了研究。Chen 等采用离散解析法和虚拟激励法研究获得了各向同性矩形板[17]以及各向同性圆柱壳[18]的随机振动响应解析解。Zhou 等[19]采用改善的 Ritz 法和虚拟激励法研究了功能梯度压电矩形板的非平稳随机振动响应特性。

虽然目前针对板壳结构的随机振动响应分析取得了一定的研究成果，但大部分研究工作集中在矩形板。而且目前的分析手段多采用有限元方法与虚拟激励法相结合的方式，虽然可以降低计算耗时，但有限元法对于铆接、螺栓等结构复杂边界条件的等效处理、结构快速参数化分析以及结构平稳随机振动响应分析的能力与实际相比还存在一定差距。因此，直面实际工程需要，发展一套具备有效处理复杂边界条件及快速参数化分析能力，并同时拥有计算耗时短、收敛特性优、结果保真度高的建模分析方法，具有一定理论和工程应用价值。

谱几何法[20]具有形式简洁、收敛快速、求解精度高以及满足任意边界条件等优点，近年来被广泛用于板壳结构的振动特性研究中。Jiang 等[21]在改进的傅里叶级数方法的基础上将正弦函数作为传统傅里叶级数的辅助项，提出了谱几何法。随后文献[20，22-25]基于谱几何法分析了环板、圆环板等回转板结构，并建立了旋转结构振动特性的统一分析模型。在此基础上，Zhao 等[26]分析了圆锥-圆柱-圆球组合壳结构的自由振动特性。此后，谱几何法被应用到复合材料回转组合壳结构[27-28]的自由振动和受迫振动分析中。

综合谱几何法满足任意边界条件以及虚拟激励法处理随机载荷的优势，提出一种高精度且易于参数化研究的高效计算分析方法，用于研究任意边界条件下功能梯度圆环板结构平稳随机振动问题。该方法采用谱几何法将圆环板位移容许函数描述为形式简洁的三角函数，并通过引入正弦函数项来消除边界处位移容许函数在边界处微分不连续的问题。采用虚拟激励法将平稳随机载荷转化为确定性载荷，并结合一阶剪切变形理论建立平稳随机激励下功能梯度圆环板的动力学分析模型。通过与有限元数值模拟结果对比，验证了文中方法的有效性和准确性。最后，探讨了梯度指数、厚度、边界条件等因素对功能梯度圆环板随机振动响应特性的影响。

1　理论推导

1.1　结构模型描述

图 1 为功能梯度圆环板模型。圆环板的参考面与其中面一致，并且正交坐标系(r,θ,z)位于功能梯度圆环板结构的参考面上。其中，r，θ和z分别表示圆环板的径向、周向和厚度方向。此外，R_0和R_1分别表示圆环板结构的内径和外径，径向方向的长度为：$R=R_1-R_0$，而h则为圆环板厚度。通过在圆环板内径和外径的边界处均匀布置具有可调刚度系数的不同类型边界约束弹簧来实现对任意边界条件的模拟。k_{ui}，k_{vi}和$k_{wi}$$(i=0,1)$表示三组平移约束弹簧，$K_{ri}$和$K_{\theta i}$$(i=0,1)$表示两组旋转约束弹簧，其中，下标“0”和“1”分别表示功能梯度圆环板结构的内径和外径边界。在后续研究中，假设功能梯度圆环板经受沿z方向的基础加速度平稳随机激励作用或集中点平稳随机激励作用。

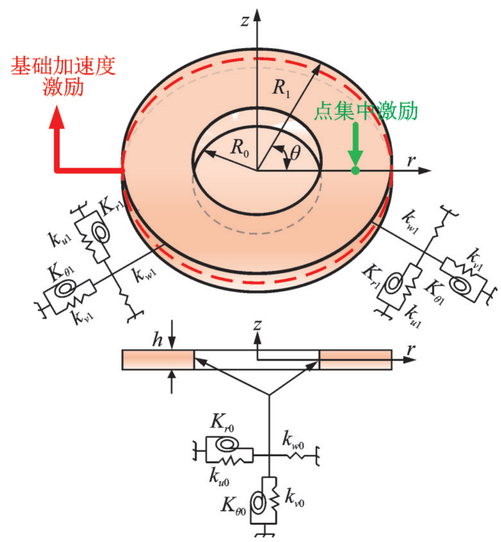

图 1　功能梯度圆环板结构模型

Fig. 1　The structural model of functionally graded annular plate

文中所研究的功能梯度圆环板结构上下表面材料分别为陶瓷和金属，并且功能梯度材料属性P在圆环板厚度z方向上呈现梯度变化，其变化关系如下式所示：

$$P(z)=(P_c-P_m)\left(\frac{z}{h}+\frac{1}{2}\right)^p+P_m \tag{1}$$

式中　P_c和P_m分别表示陶瓷和金属的材料参数（包括弹性模量E，泊松比ν和密度ρ）；p表示材料的梯度指数。

1.2　能量方程

根据一阶剪切变形理论，垂直于结构中面的法线在变形后依然为直线且长度不变，但是不一定垂直于变形后的中面[29]，因此功能梯度圆环板结构的位移场可以描述为：

$$U(r,\theta,z,t)=u(r,\theta,t)+z\varphi_r(r,\theta,t),$$
$$V(r,\theta,z,t)=v(r,\theta,t)+z\varphi_\theta(r,\theta,t),$$
$$W(r,\theta,z,t)=w(r,\theta,t) \tag{2}$$

式中 $U(r,\theta,z,t)$，$V(r,\theta,z,t)$和$W(r,\theta,z,t)$分别为圆环板结构在r，θ和z方向上的位移场分量；t为时间变量；u，v和w表示功能梯度圆环板结构中面位移分量；φ_r和φ_θ分别代表相关于θ和r方向的旋转位移分量。

功能梯度圆环板结构应变-位移关系可表示为：

$$\varepsilon_r^0=\frac{\partial u}{\partial r},\varepsilon_\theta^0=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}+u\right),\gamma_{r\theta}^0=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}-v\right)+\frac{\partial v}{\partial r},$$
$$\gamma_{rz}^0=\frac{\partial w}{\partial r}+\varphi_r,\gamma_{\theta z}^0=\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}+\varphi_\theta,\ \chi_r=\frac{\partial\varphi_r}{\partial r},$$
$$\chi_\theta=\frac{1}{r}\left(\varphi_r+\frac{\partial\varphi_\theta}{\partial\theta}\right),\ \chi_{r\theta}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi_r}{\partial\theta}-\varphi_\theta\right)+\frac{\partial\varphi_\theta}{\partial r} \tag{3}$$

式中 ε_r^0，ε_θ^0，$\gamma_{r\theta}^0$，γ_{rz}^0和$\gamma_{\theta z}^0$表示功能梯度圆环板结构的中面应变分量；χ_r，χ_θ和$\chi_{r\theta}$则为结构中面的弯曲和扭转应变分量。

参考文献[30]，圆环板结构本构关系方程可以描述为：

$$\begin{Bmatrix}N_r\\N_\theta\\N_{r\theta}\\M_r\\M_\theta\\M_{r\theta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&0&B_{11}&B_{12}&0\\A_{12}&A_{22}&0&B_{12}&B_{22}&0\\0&0&A_{66}&0&0&B_{66}\\B_{11}&B_{12}&0&D_{11}&D_{12}&0\\B_{12}&B_{22}&0&D_{12}&D_{22}&0\\0&0&B_{66}&0&0&D_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_r^0\\\varepsilon_\theta^0\\\gamma_{r\theta}^0\\\chi_r\\\chi_\theta\\\chi_{r\theta}\end{Bmatrix},$$
$$\begin{Bmatrix}Q_r\\Q_\theta\end{Bmatrix}=\kappa\begin{bmatrix}A_{66}&0\\0&A_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\gamma_{rz}^0\\\gamma_{\theta z}^0\end{Bmatrix} \tag{4}$$

式中 N_r，N_θ和$N_{r\theta}$表示结构合力分量；M_r，M_θ和$M_{r\theta}$表示结构合力矩分量；Q_r和Q_θ表示结构横向剪切应力分量；κ为剪切修正系数，取为5/6；A_{ij}，B_{ij}和D_{ij}（$i,j=1,2,6$）分别代表拉伸刚度、拉伸-弯曲耦合刚度和弯曲刚度，可描述为：

$$[A_{ij}\quad B_{ij}\quad D_{ij}]=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}Q_{ij}(z)[1\quad z\quad z^2]\mathrm{d}z \tag{5}$$

式中 $Q_{ij}(i,j=1,2,6)$为与厚度z相关的弹性常数，其可以表示为：

$$Q_{11}(z)=Q_{22}(z)=\frac{E(z)}{1-\nu^2(z)},Q_{12}(z)=\frac{E(z)\nu(z)}{1-\nu^2(z)},$$
$$Q_{66}(z)=\frac{E(z)}{2+2\nu(z)} \tag{6}$$

根据本构关系方程，功能梯度圆环板应变能可以表示为：

$$U=\frac{1}{2}\int_0^R\int_0^{2\pi}\left(N_r\varepsilon_r^0+N_\theta\varepsilon_\theta^0+N_{r\theta}\gamma_{r\theta}^0+M_r\chi_r\right)r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r+$$
$$\frac{1}{2}\int_0^R\int_0^{2\pi}\left(M_\theta\chi_\theta+M_{r\theta}\chi_{r\theta}+Q_r\gamma_{rz}^0+Q_\theta\gamma_{\theta z}^0\right)r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \tag{7}$$

功能梯度圆环板动能可以表示为：

$$T=\frac{1}{2}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho(z)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2\right]r\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \tag{8}$$

而存储在边界约束弹簧中的弹性势能描述为：

$$V=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}R_0\left(k_{u0}u^2+k_{v0}v^2+k_{w0}w^2+K_{r0}\varphi_r^2+K_{\theta0}\varphi_\theta^2\right)_{r=R_0}\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}R_1\left(k_{u1}u^2+k_{v1}v^2+k_{w1}w^2+K_{r1}\varphi_r^2+K_{\theta1}\varphi_\theta^2\right)_{r=R_1}\mathrm{d}\theta \tag{9}$$

文中考虑了集中点激励和基础加速度激励两种平稳随机激励形式。假设功能梯度圆环板受到的集中点激励$f(t)$和基础加速度激励$\ddot{g}(t)$的功率谱密度分别为$S_f(\omega)$和$S_{\ddot{g}}(\omega)$。根据虚拟激励法[14]，随机激励可以描述为简谐激励载荷。因此，集中点载荷和基础加速度载荷的虚拟激励分别表示为：

$$\text{集中点载荷激励：}\tilde{f}(t)=\sqrt{S_f(\omega)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{10}$$

$$\text{基础加速度激励：}\tilde{\ddot{g}}(t)=\sqrt{S_{\ddot{g}}(\omega)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{11}$$

式中 ω表示圆频率。

外部载荷对功能梯度圆环板做的功可分别描述为：

$$W_f=\int_0^R\int_0^{2\pi}\tilde{f}(t)\delta(r-r_0,\theta-\theta_0)w(r,\theta,t)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \tag{12}$$

$$W_g=-\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho(z)\tilde{\ddot{g}}(t)w(r,\theta,t)r\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \tag{13}$$

式中 $\delta()$表示狄拉克函数；r_0和θ_0分别为集中激励作用点在径向和周向方向的位置。

1.3 位移容许函数

为了满足位移容许函数在整个求解域内（包括边界处）充分光滑的条件，使得构造的位移容许函数能够克服不同边界条件下其微分在边界处可能存在的不连续问题，文中基于谱几何法采用余弦函数和正弦函数辅助项来描述功能梯度圆环板径向坐标下的位移容许函数，同时考虑到圆环板结构的空间对称性，采用正余弦函数描述周向坐标下的位移函数：

$$q(r,\theta,t)=\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\cos(\lambda_m r)\left[A_{mn}^{q,c}\cos(n\theta)+A_{mn}^{q,s}\sin(n\theta)\right]+\sum_{l=-2}^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\sin(\lambda_l r)\left[A_{ln}^{q,cl}\cos(n\theta)+A_{ln}^{q,sl}\sin(n\theta)\right]\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{14}$$

式中　$q=u,v,w,\varphi_r,\varphi_\theta$;$\lambda_m=m\pi/R$,$\lambda_l=l\pi/R$;$m$和$n$分别表示圆环板径向和周向的半波数;$l=-2,-1$,其代表圆环板边界补充函数项的变量;$A_{mn}^{q,b}(b=c,s)$为位移函数的未知展开系数;$A_{ln}^{q,bl}(bl=cl,sl)$为辅助函数的未知系数。

在一阶剪切变形理论下,圆环板的振动位移由其二阶控制微分方程决定,为保证位移函数在整个求解域内的一阶导数连续并且二阶导数存在,在径向方向引入了两项傅里叶正弦函数辅助项。从数学上可知,傅里叶余弦函数可以用来表示任何在求解域中完全可积的连续函数,并且余弦函数可以实现逐项微分。但是当边界条件中存在弯矩等条件时,若直接采用傅里叶余弦函数表示,其一阶导数在结构边界处会出现数值间断的现象。因此,为了克服数值不连续的问题,引入正弦函数辅助项消除数值间断的现象,使得位移函数本身或其导数在整个求解域内的导数连续或存在。

1.4 求　解

基于上述构建的能量方程,功能梯度圆环板结构的拉格朗日函数可表示为:

$$\Xi=T-U-V+W_\xi \tag{15}$$

式中　$\xi=f,g$。将式(7)~(14)代入式(15),并采用Rayleigh-Ritz法对位移容许函数的未知级数展开系数求偏导,获得平稳随机激励下功能梯度圆环板的动力学控制方程:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{Q}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{F}_\xi \tag{16}$$

式中　$\boldsymbol{M}$为圆环板的整体质量矩阵;$\boldsymbol{K}$表示圆环板的整体刚度矩阵;$\boldsymbol{Q}$表示未知级数展开系数向量;$\boldsymbol{F}_\xi$为虚拟激励力的载荷向量,可以表示为$\boldsymbol{F}_\xi=\left[0,0,F_{W_\xi},0,0\right]^{\mathrm{T}}$,其中$F_{W_\xi}$为沿$z$方向的集中点载荷或基础加速度载荷向量,其表达式为:

$$F_{W_f}=\int_0^R\int_0^{2\pi}\tilde{f}(t)\delta(r-r_0,\theta-\theta_0)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(r,\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r,$$
$$F_{W_g}=-\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho(z)\ddot{\tilde{g}}(t)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(r,\theta)r\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \tag{17}$$

$$\boldsymbol{P}=\left[-\sin\left(\frac{2\pi r}{R}\right),-\sin\left(\frac{\pi r}{R}\right),1,\cdots,\cos\left(\frac{m\pi r}{R}\right),\cdots\right]\otimes\left[1,0,\cos(1\theta),\sin(1\theta),\cdots,\cos(n\theta),\sin(n\theta),\cdots\right] \tag{18}$$

将式(16)中求得的未知级数展开系数向量$\boldsymbol{Q}$代入式(14)中,便可得到虚拟位移响应u,v,w,φ_r和φ_θ,从而可以方便地获得平稳随机激励作用下功能梯度圆环板的振动响应功率谱密度。以圆环板横向位移响应为例,位移响应自功率谱函数$S_{ww}(\omega)$,速度响应自功率谱函数$S_{\dot{w}\dot{w}}(\omega)$以及加速度响应自功率谱函数$S_{\ddot{w}\ddot{w}}(\omega)$可以分别描述为:

$$S_{ww}(\omega)=w^*w,S_{\dot{w}\dot{w}}(\omega)=\dot{w}^*\dot{w}=\omega^2S_{ww}(\omega),$$
$$S_{\ddot{w}\ddot{w}}(\omega)=\ddot{w}^*\ddot{w}=\omega^4S_{ww}(\omega) \tag{19}$$

式中　*表示复共轭。

相应地,平稳随机激励下功能梯度圆环板的响应均方根值(RMS)可按下式计算获得[18]:

$$\sigma_w=\sqrt{\int_{\omega_l}^{\omega_u}G_{ww}(\omega)\mathrm{d}\omega}=\sqrt{\sum_{i=1}^{NM}G_{ww}(\omega_i)\Delta\omega},$$
$$\sigma_{\dot{w}}=\sqrt{\int_{\omega_l}^{\omega_u}G_{\dot{w}\dot{w}}(\omega)\mathrm{d}\omega}=\sqrt{\sum_{i=1}^{NM}G_{\dot{w}\dot{w}}(\omega_i)\Delta\omega},$$
$$\sigma_{\ddot{w}}=\sqrt{\int_{\omega_l}^{\omega_u}G_{\ddot{w}\ddot{w}}(\omega)\mathrm{d}\omega}=\sqrt{\sum_{i=1}^{NM}G_{\ddot{w}\ddot{w}}(\omega_i)\Delta\omega} \tag{20}$$

式中　ω_l和ω_u分别表示所施加随机激励频率范围的下限和上限;$\Delta\omega$代表频率步长;$G_{ww}(\omega)$,$G_{\dot{w}\dot{w}}(\omega)$和$G_{\ddot{w}\ddot{w}}(\omega)$为单边功率谱。

式(20)对于随机振动响应均方根值的求解是通过对频率范围进行离散而计算得到的,NM即为频率范围的离散频率点数,其和频率步长有如下关系:

$$NM=\frac{\omega_u-\omega_l}{\Delta\omega} \tag{21}$$

为了避免数值计算的奇异性,文中采用复杨氏模量的方式引入结构阻尼:

$$E'=E\left(1+\mathrm{i}\eta\right) \tag{22}$$

式中　E'为复杨氏模量;η为结构损耗因子,在下述数值分析中,结构损耗因子$\eta=0.1$。

2　振动求解与分析

在理论模型推导基础上,本节将对平稳随机激励下功能梯度圆环板的随机振动响应特性进行分析和讨论。在接下来的研究中,假设功能梯度圆环板的默认几何尺寸为:$R_0=0.5$ m,$R_1=2.0$ m,$h=0.1$ m。圆环板上下表面的材料分别为Si_3N_4和SUS304,材料参数为:$E_c=348.43$ GPa,$\nu_c=0.24$,$\rho_c=2370$ kg/m^3,$E_m=201.04$ GPa,$\nu_m=0.3262$,$\rho_m=8166$ kg/m^3。文中研究考虑了固支(C)、简支(SS)、剪切(SD)三种经典边界条件和E1,E2,E3,E4,E5,E6六种弹性边界条件。不同边界条件下的相应弹簧刚度值参考文献[31]选取,相应参数如表1所示。此外,根据文献[20]中相关收敛性分析,文中位移容许函数在径向和周向上的截断数被设定为:$M=N=14$。

表 1　不同边界条件下的弹簧刚度值

Tab. 1　The values of spring stiffness of different boundary conditions

边界条件	k_u/(N•m^{-1})	k_v/(N•m^{-1})	k_w/(N•m^{-1})	K_r/(N•m•rad^{-1})	K_θ/(N•m•rad^{-1})
C	10^{15}	10^{15}	10^{15}	10^{15}	10^{15}
SS	10^{15}	10^{15}	10^{15}	0	10^{15}
SD	0	10^{15}	10^{15}	0	10^{15}
E1	10^{9}	10^{15}	10^{15}	10^{15}	10^{15}
E2	10^{15}	10^{9}	10^{15}	10^{15}	10^{15}
E3	10^{15}	10^{15}	10^{9}	10^{15}	10^{15}
E4	10^{9}	10^{9}	10^{15}	10^{15}	10^{15}
E5	10^{9}	10^{9}	10^{9}	10^{15}	10^{15}
E6	10^{15}	10^{15}	10^{15}	10^{9}	10^{15}

2.1　有效性验证

表 2 给出了不同边界条件下功能梯度圆环板的前 10 阶固有频率(Hz)。材料的梯度指数 p=1.0,圆环板的其余参数与默认参数一致,还考虑了 C-C,SS-SS,C-E1,C-E2,E1-E4 和 E2-E5 等 6 种不同的边界条件。其中,以 C-C 边界条件为例,C-C 中第一个"C"代表圆环板内径边界的约束边界条件类型为固支,第二个"C"代表圆环板外径边界的约束边界条件类型为固支。通过与有限元结果对比发现,两种计算方法获得的结果吻合良好。

表 2　不同边界条件下功能梯度圆环板前 10 阶固有频率对比(单位:Hz)

Tab. 2　Comparisons of first ten order natural frequencies of functionally graded annular plate with different boundary conditions(Unit:Hz)

边界条件	方法	阶数 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C-C	SGM	326.33	337.26	337.26	377.76	377.76	460.40	460.40	585.63	585.63	742.83
	FEM	326.76	337.65	337.65	378.05	378.06	460.70	460.70	586.25	586.26	744.23
SS-SS	SGM	159.47	178.96	178.96	241.01	241.11	343.48	343.70	476.60	476.60	593.41
	FEM	159.54	179.03	179.03	241.10	241.10	343.74	343.74	476.99	477.00	595.16
C-E1	SGM	326.32	337.26	337.26	377.75	377.95	460.40	460.40	585.63	585.63	742.83
	FEM	326.76	337.65	337.65	378.05	378.06	460.70	460.70	586.25	586.26	744.23
C-E2	SGM	293.46	326.33	337.26	337.26	377.75	377.95	460.40	460.82	585.63	586.19
	FEM	293.57	326.76	337.65	337.65	378.05	378.06	460.70	460.70	586.25	586.26
E1-E4	SGM	293.46	326.32	337.26	337.26	377.75	377.94	460.40	460.79	556.71	556.71
	FEM	293.57	326.76	337.65	337.65	378.05	378.06	460.70	460.70	556.89	556.91
E2-E5	SGM	98.881	118.31	143.40	143.40	205.33	205.42	294.90	295.06	410.22	410.43
	FEM	98.910	118.35	142.82	143.01	204.05	204.06	293.05	293.08	408.07	408.08

接下来,对采用文中方法分析功能梯度圆环板平稳随机振动的有效性进行验证。其中,集中点激励为功率谱密度(Power Spectral Density, PSD) S=1 N^2/Hz 的限带白噪声谱,其频率范围为[20, 2000] Hz;基础加速度激励考虑两种类型的激励载荷,Ⅰ类是功率谱密度(PSD)S_0=1 g^2/Hz 的限带白噪声谱,其频率范围为[20,2000] Hz;Ⅱ类则为航空航天工程中的特定功率谱[18],其形式如图 2 所示,频率与基础加速度激励 PSD 之间的数学关系可以表示为:

$$S=\begin{cases} S_{\mathrm{ref}}\times\left(\dfrac{f}{f_1}\right)^{\frac{\Omega_1}{3}}, & f\in[20,150]\,\mathrm{Hz} \\ S_{\mathrm{ref}}, & f\in(150,700]\,\mathrm{Hz} \\ S_{\mathrm{ref}}\times\left(\dfrac{f}{f_2}\right)^{\frac{\Omega_2}{3}}, & f\in(700,2000]\,\mathrm{Hz} \end{cases} \tag{23}$$

式中　S_{ref}表示频率范围(150, 700)Hz 内 PSD 值为 0.04 g^2/Hz;Ω_1和Ω_2分别表示频率范围(20, 150)Hz 和(700, 2000)Hz 内 PSD 曲线斜率分别为+6 dB/octave 和−3 dB/octave。

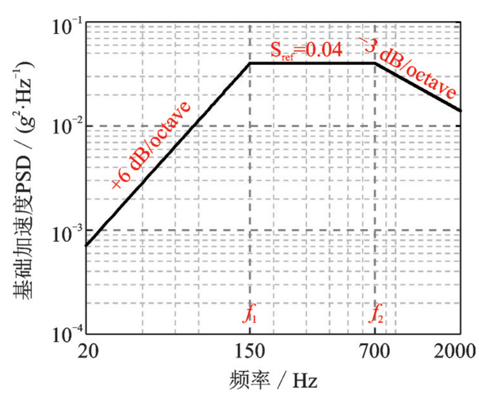

图 2　航空航天工程中的特定功率谱

Fig. 2　The specific power spectrum in spacecraft engineering

同时需要指出的是,文中采用向量[r,θ]来表示响应测点的位置,其中,r 和 θ 分别表示功能梯度圆环板径向和周向的位置。在后续计算分析中,测点响应的径向位置选为圆环板内径和外径的中点,而周向位置选取 θ=0。

图3分别给出了集中点激励、Ⅰ类基础加速度激励和Ⅱ类基础加速度激励作用下C-C功能梯度圆环板随机振动响应(功率谱密度)对比结果。功能梯度圆环板的几何尺寸与默认尺寸一致，材料的梯度指数p=1.0。通过图3可以看出，文中基于谱几何法-虚拟激励法研究获得的随机振动响应结果与有限元结果吻合较好，说明文中方法可以有效预示平稳随机激励作用下功能梯度圆环板随机振动响应特性。此外，表3还给出了基于谱几何法-虚拟激励法获得的集中点激励和两类基础加速度激励下C-C功能梯度圆环板的随机振动响应均方根值。相应地，有限元法结果也作为参考列在表中。从表3中可以看出，文中方法获得的随机振动响应均方根值与有限元结果具有良好的一致性，进一步验证了文中方法在预示功能梯度圆环板随机振动响应特性方面的有效性。同时，从表3的计算时间对比情况可知，文中方法的计算耗时约为有限元法的0.2%，说明文中方法具有较好的计算效率。

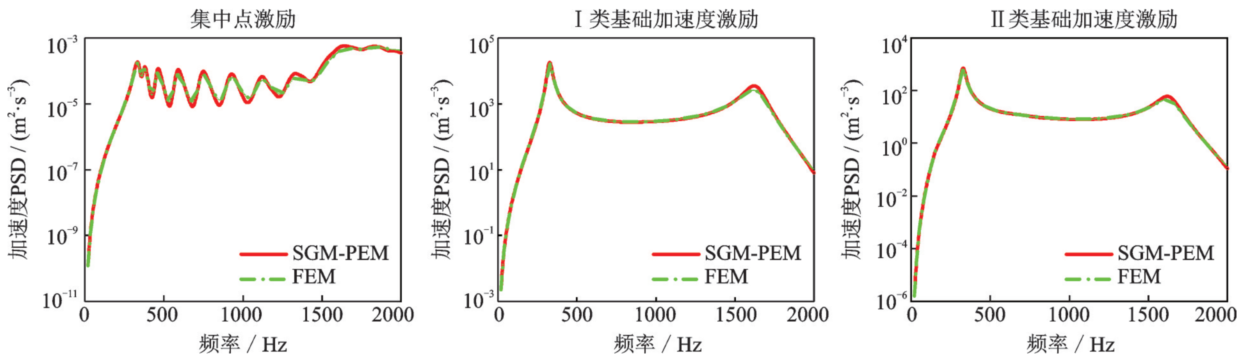

图3　C-C功能梯度圆环板响应点处的随机振动加速度响应与有限元结果对比

Fig. 3　Comparisons of random vibration acceleration response at the response point of C-C functionally graded annular plate with FEM results

表3　C-C功能梯度圆环板响应点处随机响应均方根值与有限元法结果对比

Tab. 3　Comparisons of random response RMS at the response point of C-C functionally graded annular plate with FEM results

载荷类型	方法	响应均方根(RMS)			时间/s
		位移/m	速度/(m·s^{-1})	加速度/(m·s^{-2})	
集中点激励	SGM-PEM	3.0938×10^{-8}	8.2001×10^{-5}	0.532	10.54
	FEM	3.0528×10^{-8}	7.9955×10^{-5}	0.514	6889.1
	偏差	1.3%	2.5%	3.5%	-
基础加速度激励Ⅰ类	SGM-PEM	2.2191×10^{-4}	0.4628	1344.71	12.15
	FEM	2.2766×10^{-4}	0.4766	1337.03	7034.5
	偏差	2.5%	2.8%	0.5%	-
基础加速度激励Ⅱ类	SGM-PEM	4.3982×10^{-5}	0.0914	234.533	12.05
	FEM	4.5105×10^{-5}	0.0942	237.242	6897.1
	偏差	2.4%	2.9%	1.1%	-

图4则给出了Ⅱ类基础加速度激励作用下功能梯度圆环板随机振动响应(加速度功率谱)的对比情况。圆环板的所有参数与表2保持一致，考虑了C-E1，E1-E4，E4-E6，C-E2，E2-E5，E5-E6六种不同边界条件。从图4的对比情况可以看出，文中模型对不同边界条件下功能梯度圆环板随机振动加速度功率谱密度响应的计算结果与有限元法结果均吻合良好。因此，文中构建的分析模型可以有效分析不同边界条件下功能梯度圆环板的平稳随机振动响应特性。

2.2　参数化分析

在验证文中方法有效性的基础上，研究关键参数对平稳随机激励下功能梯度圆环板振动响应特性的影响规律。为了简便起见，后续算例中的外界激励载荷选定为Ⅱ类基础加速度激励载荷。

首先，图5给出了不同梯度指数p下C-C功能梯度圆环板的随机振动响应特性。相关几何参数、材料参数和响应点位置均与默认参数保持一致。从图5中可以发现，随着梯度指数p增大，圆环板随机振动响应(位移，速度，加速度)曲线的共振峰值将逐渐向低频段移动，这是因为p增大将导致圆环板结构的材料属性由陶瓷成分向金属成分变化，使得结构弯曲刚度不断降低，结构质量逐渐增加，从而降低了结构的固有频率。此外，以p=9时圆环板随机振动位移响应和速度响应在基频处的峰值作为参考，p=

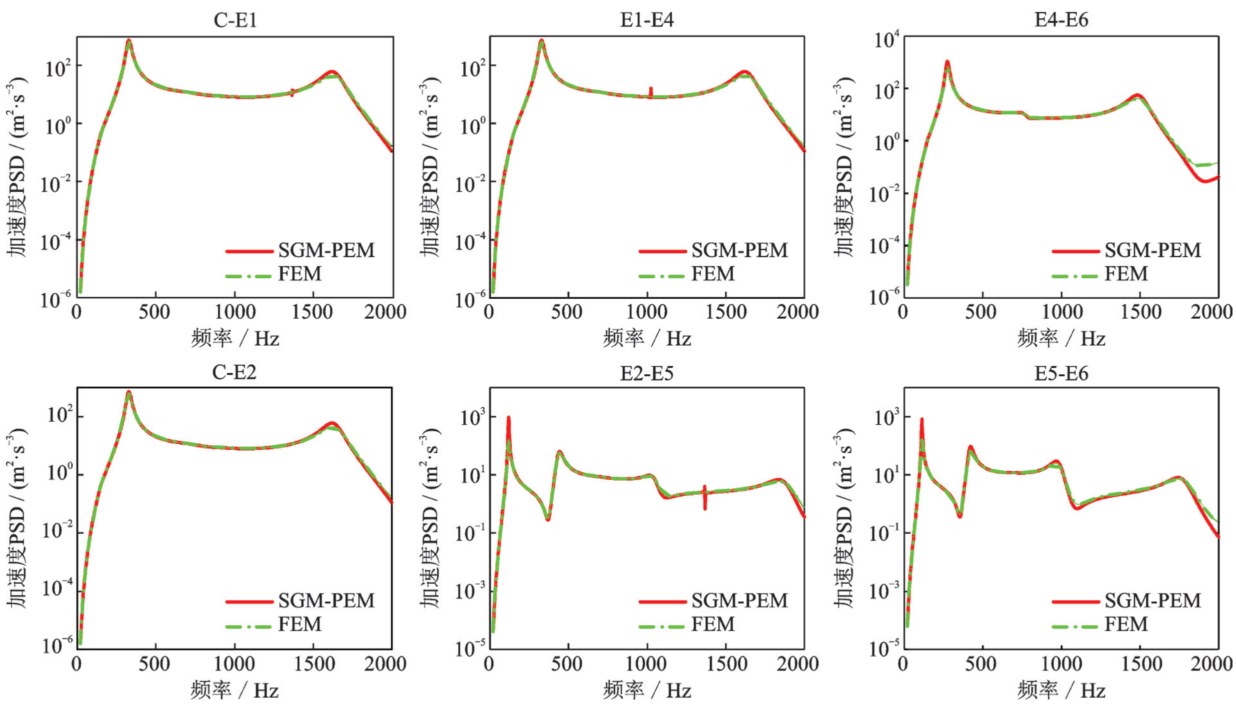

图 4 不同边界条件下功能梯度圆环板响应点处的随机振动加速度响应与有限元结果对比

Fig. 4 Comparisons of random vibration acceleration response at the response point of functionally graded annular plate with FEM results considering different boundary conditions

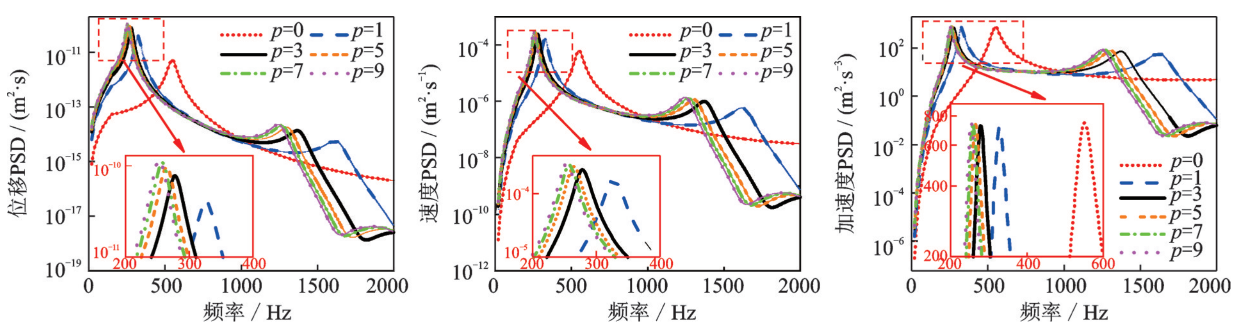

图 5 不同梯度指数 p 对功能梯度圆环板平稳随机振动响应特性的影响

Fig. 5 The influence of different gradient indexes p on the stationary random vibration response characteristics of functionally graded annular plate

0,1,3,5,7 时位移响应和速度响应在基频处的峰值分别为 p=9 时的 4.49%，34.47%，66.57%，82.69%，92.50% 和 21.18%，57.62%，80.33%，90.16%，96.27%。说明随着 p 增大，随机振动位移响应和速度响应基频处的峰值逐渐增加。但是，梯度指数 p 对随机振动加速度响应在基频处的峰值影响很小，在不同梯度指数 p 下，加速度响应基频处的峰值最小值为最大值的 96.42%。

圆环板外径与内径之比对随机振动响应特性的影响如图 6 所示，其中圆环板边界条件为 C-C。在该算例中，圆环板外径 R_1=2 m 保持不变，外径与内径之比 R_1/R_0=2，3，4，6，8。测点响应位置选为圆环板内径和外径的中点，其余参数与默认参数一致。从图 6 中可以看出，R_1/R_0 增加将会使得圆环板随机振动响应（位移，速度和加速度）曲线的共振峰值向低频段移动。这是由于 R_1/R_0 增大降低了圆环板结构的弯曲刚度。此外，以 R_1/R_0=8 时圆环板随机振动位移响应和速度响应在基频处的峰值作为参考，R_1/R_0=2，3，4，6 时位移响应和速度响应在基频处的峰值分别为 R_1/R_0=8 时的 1.50%，12.45%，30.45%，68.41% 和 13.21%，36.61%，56.22%，83.44%。说明随着 R_1/R_0 增大，随机振动位移响应和速度响应基频处的峰值逐渐增加。对加速度响应而言，R_1/R_0 对其影响较小，在不同 R_1/R_0 下，加速度响应基频处的峰值最小值为最大值的 86.87%。

图 7 则给出了不同边界条件对平稳随机激励下功能梯度圆环板的振动响应特性。该算例考虑了 C-C，SS-SS，SD-SD 三种经典边界条件和 C-E1，C-E2，C-E3，E1-E4，E2-E5，E3-E6 六种组合边界条件。圆环板相关几何参数和材料参数与默认参数保

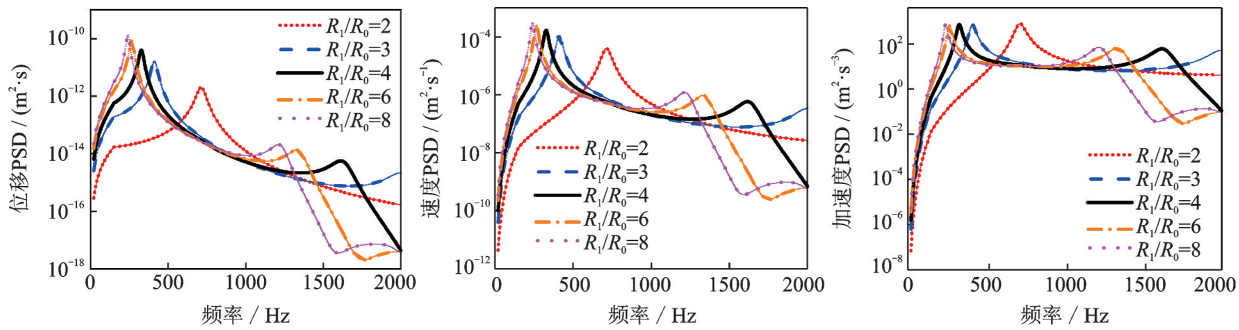

图 6　不同外径与内径之比 R_1/R_0 对功能梯度圆环板平稳随机振动响应特性的影响

Fig. 6　The influence of different outer radius-inner radius ratios R_1/R_0 on the stationary random vibration response characteristics of functionally graded annular plate

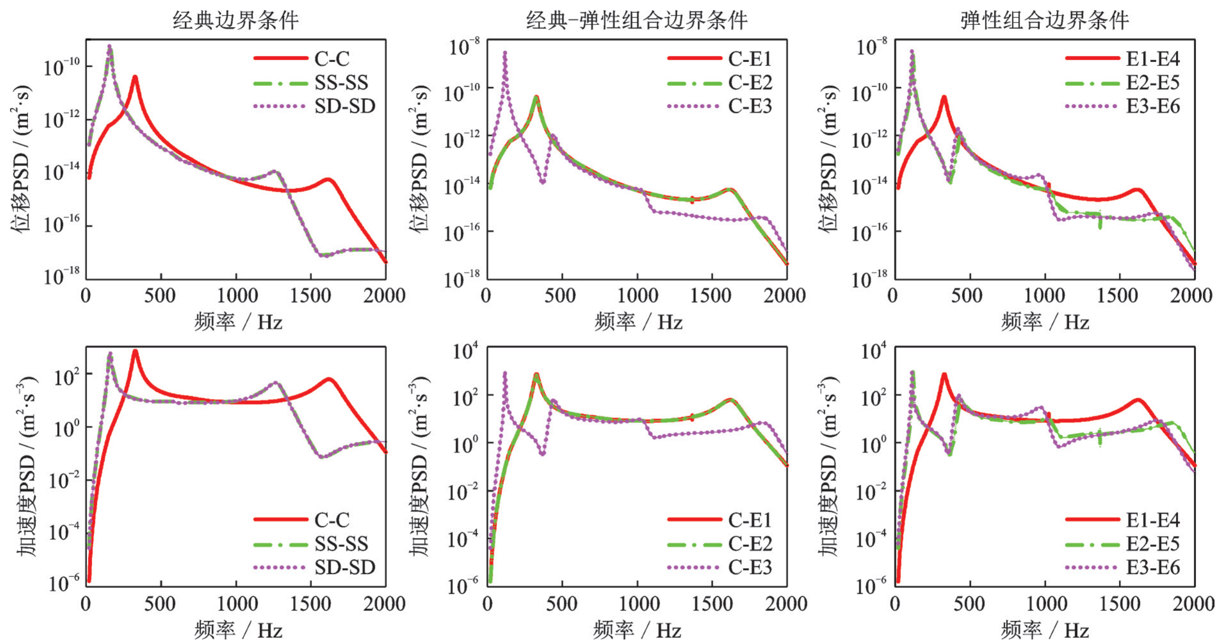

图 7　不同边界条件对功能梯度圆环板平稳随机振动响应特性的影响

Fig. 7　The influence of different boundary conditions on the stationary random vibration response characteristics of functionally graded annular plate

持一致。对于经典边界条件而言,当边界条件从 C-C 变为 SS-SS 或者 SD-SD 时,圆环板结构的弯曲刚度逐渐减小,降低了结构的固有频率,从而使得随机振动响应曲线共振峰值向低频段移动。此外,通过对比 C-C 和 SS-SS 下的随机振动响应结果可以发现,旋转约束弹簧 K_r 的刚度值对圆环板的随机振动响应特性有较大影响。同时,SS-SS 边界条件和 SD-SD 边界条件对圆环板随机振动响应特性影响基本一致。这说明径向方向的约束弹簧刚度对结构随机振动响应特性影响较小。C-E3,E2-E5 和 E3-E6 边界条件会使得随机振动响应曲线共振峰值向低频段移动,而且会明显改变圆环板随机振动响应能量在各频率上的分布密度,而 C-E1,C-E2 和 E1-E4 边界条件对圆环板随机振动响应特性影响基本一致。从而说明厚度方向(z 方向)的弹簧刚度值对圆环板随机振动响应特性影响较大,而周向方向的弹簧刚度值对随机振动响应特性影响较小。

最后,分析了厚度参数对平稳随机激励作用下 C-C 功能梯度圆环板振动响应特性的影响,相应结果如图 8 所示。圆环板的厚度分别设定为 0.050,0.075,0.100,0.125 和 0.150 m。其余参数和响应位置均与默认参数值保持一致。从图 8 中可以看出,随着厚度 h 增加,圆环板随机振动响应(位移,速度和加速度)曲线的共振峰值将向高频段移动。这是由于随着厚度 h 增加,圆环板结构的弯曲刚度和质量均提高,但是,其对刚度矩阵的贡献要大于对质量矩阵的贡献,从而提升了结构的固有频率。此外,厚度 h 的增加会明显降低位移响应和速度响应的共振峰值。在不同的厚度 h 下,加速度响应在基频处峰值的最小值为最大值的 80.40%,表明相较于梯度指数 p 和外径与内径之比 R_1/R_0,厚度 h 对加速度响应的影响更大。

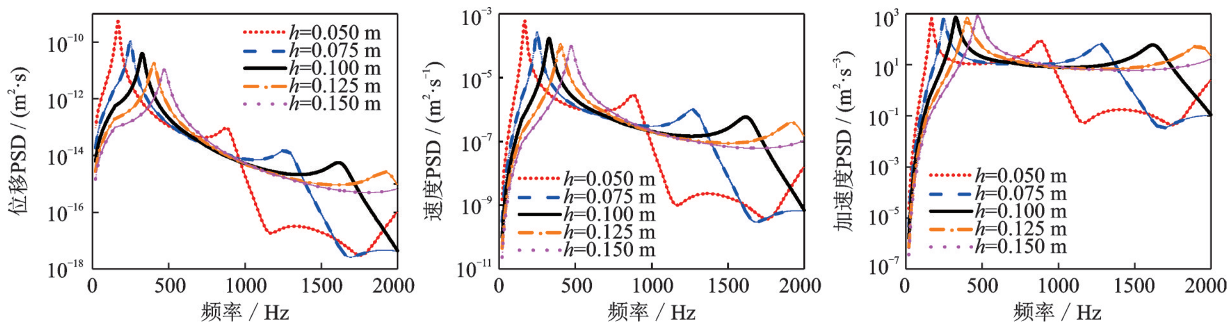

图 8 不同厚度 h 对功能梯度圆环板平稳随机振动响应特性的影响

Fig. 8 The influence of different thickness h on the stationary random vibration response characteristics of functionally graded annular plate

3 结 论

文中基于谱几何法-虚拟激励法和一阶剪切变形理论，建立了平稳随机激励下功能梯度圆环板振动分析模型。通过数值算例分析对比，验证了文中所构建模型的有效性和准确性。在此基础上，探讨了材料参数、结构几何参数、边界条件等因素对功能梯度圆环板随机振动响应特性的影响，获得结论如下：

(1)梯度指数 p 和圆环板外径与内径之比 R_1/R_0 增加，将会降低圆环板结构的弯曲刚度，使得结构固有频率降低，从而使得随机振动响应曲线的共振峰值向低频段移动。

(2)比较不同参数下加速度响应基频处峰值最大值和最小值之间的比例，发现相较于梯度指数 p 和外径与内径之比 R_1/R_0，厚度 h 对加速度响应能量在各频率上的分布影响最大。

(3)径向约束弹簧 k_u 和轴向约束弹簧 k_v 刚度值的改变基本不会影响圆环板随机振动响应能量在各频率上的分布密度；而改变厚度方向约束弹簧 k_w 和旋转约束弹簧 K_r 的刚度值会对结构边界势能产生很大影响，从而改变圆环板随机振动响应能量在各频率上的分布密度。

(4)在平稳随机激励作用下，功能梯度圆环板结构的随机振动位移响应、速度响应和加速度响应能量主要集中在结构基频处。此外，随机激励的高频对位移响应和速度响应的影响较小，但对加速度响应有较大影响。

参考文献：

[1] Żur K K. Free vibration analysis of elastically supported functionally graded annular plate via quasi-Green's function method[J]. Composite Part B: Engineering, 2018, 144: 37-55.

[2] Zhao J, Zhang Y K, Choe K, et al. Three-dimensional exact solution for the free vibration of thick functionally graded annular sector plates with arbitrary boundary conditions[J]. Composite Part B: Engineering, 2019, 159: 418-436.

[3] Jodaei A, Jalal M, Yas M H. Free vibration analysis of functionally graded annular plates by state-space based differential quadrature method and comparative modeling by ANN [J]. Composite Part B: Engineering, 2012, 43(2): 340-353.

[4] Jin G Y, Su Z, Ye T G, et al. Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded annular sector plates with general boundary conditions[J]. Composite Part B: Engineering, 2015, 83: 352-366.

[5] Malekzadeh P, Shahpari S A, Ziaee H R. Three-dimensional free vibration of thick functionally graded annular plates in thermal environment[J]. Journal of Sound and Vibration, 2010, 329(4): 425-442.

[6] 滕兆春，蒲育，房晓林. FGM圆环板面内自由振动的DQM求解[J]. 北京理工大学学报，2014，34(12)：1211-1216.
TENG Zhaochun, PU Yu, FANG Xiaolin. In-plane free vibration analysis for FGM annular plates by differential quadrature method[J]. Transactions of Beijing Institute of Technology, 2014, 34(12): 1211-1216.

[7] 滕兆春，蒲育. 温度影响下FGM圆环板的面内自由振动分析[J]. 振动与冲击，2015，34(9)：210-217.
TENG Zhaochun, PU Yu. In-plane free vibration of FGM annular plates considering temperature effect[J]. Journal of Vibration and Shock, 2015, 34(9): 210-217.

[8] 吕朋，杜敬涛，邢雪，等. 热环境下弹性边界约束FGM圆环板面内振动特性分析[J]. 振动工程学报，2017，30(5)：713-723.
LÜ Peng, DU Jingtao, Xing Xue, et al. Study on in-plane vibration characteristics of elastically restrained FGM annular panel in thermal environment[J]. Journal of Vibration Engineering, 2017, 30(5): 713-723.

[9] Dong C Y. Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded annular plates using the Chebyshev-

Ritz method[J]. Materials and Design, 2008, 29(8): 1518-1525.

[10] Esmailzadeh M, Lakis A A, Thomas M, et al. Prediction of the response of a thin structure subjected to a turbulent boundary-layer-induced random pressure field [J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 328(1-2): 109-128.

[11] Chang T P, Chang H C, Liu M F. A finite element analysis on random vibration of nonlinear shell structures [J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 291(1-2): 240-257.

[12] Franco F, De Rosa S, Ciappi E. Numerical approximations on the predictive responses of plates under stochastic and convective loads[J]. Journal of Fluids and Structures, 2013, 42: 296-312.

[13] Birgersson F, Ferguson N S, Finnveden S. Application of the spectral finite element method to turbulent boundary layer induced vibration of plates[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 259(4): 873-891.

[14] Lin J H, Zhao Y, Zhang Y H. Accurate and highly efficient algorithms for structural stationary/non-stationary random response [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, 191(1-2): 103-111.

[15] 孙悦, 刘晓峰, 孙伟. 随机激励作用下硬涂层薄板振动有限元分析及减振预估[J]. 振动与冲击, 2022, 41(4): 63-69.
SUN Yue, LIU Xiaofeng, SUN Wei. Vibration analysis of a hard-coating thin plate under random excitation using FEM and estimation of vibration reduction effect [J]. Journal of Vibration and Shock, 2022, 41(4): 63-69.

[16] 戴新进. 复合材料结构随机振动的虚拟激励法及在航空航天领域的应用[D]. 大连: 大连理工大学, 2007.
DAI Xinjin. PEM based random vibration analysis of composite structures and its application in aero/astronautical engineering [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2007.

[17] Chen G H, Zhou J L, Yang D X. Benchmark solutions of stationary random vibration for rectangular thin plate based on discrete analytical method[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2017, 50: 17-24.

[18] Chen G H, Huo H, Zhan S X, et al. Analytical stochastic responses of thin cylindrical shells under various stationary excitations[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2021, 190: 106048.

[19] Zhou K, Hu Z M, Hua H X. Investigation of the non-stationary stochastic response of functionally graded piezoelectric material plates with general boundary conditions[J]. Applied Mathematical Modelling, 2021, 96: 315-335.

[20] 石先杰. 复杂边界条件下旋转结构统一动力学模型的构建与研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2014.
SHI Xianjie. The construction and analysis on unified dynamical model of revolve structures subjected to complex boundary conditions[D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2014.

[21] Jiang S L, Li W L, Yang T J. A spectro-geometric method for the vibration analysis of built-up structures [A]. Proceedings of the INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings[C]. Denver, Colorado: Institute of Noise Control Engineering, 2013: 948-953.

[22] Shi X J, Shi D Y, Li W L, et al. A unified method for free vibration analysis of circular, annular and sector plates with arbitrary boundary conditions[J]. Journal of Vibration and Control, 2016, 22(2): 442-456.

[23] 史冬岩, 石先杰, 李文龙. 任意边界条件下环扇形板面内振动特性分析[J]. 振动工程学报, 2014, 27(1): 1-8.
Shi Dongyan, Shi Xianjie, Li Wenlong. In-plane vibration analysis of annular sector plates with arbitrary boundary supports [J]. Journal of Vibration Engineering, 2014, 27(1): 1-8.

[24] 石先杰, 李春丽, 史冬岩. 环板结构面内自由振动特性分析[J]. 振动工程学报, 2016, 29(3): 465-471.
Shi Xianjie, Li Chunli, Shi Dongyan. Free in-plane vibration analysis of annular plates[J]. Journal of Vibration Engineering, 2016, 29(3): 465-471.

[25] Shi X J, Li C L, Wang F J, et al. A unified formulation for free transverse vibration analysis of orthotropic plates of revolution with general boundary conditions [J]. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2018, 25(2): 87-99.

[26] Zhao Y K, Shi D Y, Meng H. A unified spectro-geometric-Ritz solution for free vibration analysis of conical-cylindrical-spherical shell combination with arbitrary boundary conditions [J]. Archive Applied Mechanics, 2017, 87: 961-988.

[27] Shi X J, Zuo P, Zhong R, et al. Vibration analysis of combined functionally graded cylindrical-conical shells coupled with annular plates in thermal environment[J]. Composite Structures, 2022, 294: 115738.

[28] Zuo P, Shi X J, Ge R W, et al. Unified series solution for thermal vibration analysis of composite laminated joined conical-cylindrical shell with general boundary conditions[J]. Thin-Walled Structures, 2022, 178: 109525.

[29] 张红. 回转类复合材料板结构与封闭声腔耦合系统建模方法及其特性研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2018.
ZHANG Hong. The modeling method and characteristic analysis for rotary composite laminated plate and

acoustic cavity coupled system[D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2018.

[30] Qatu M S. Vibration of Laminated Shells and Plates [M]. Amsterdam, The Netherlands: Academic Press, 2004.

[31] Su Z, Jin G Y, Shi S X, et al. A unified solution for vibration analysis of functionally graded cylindrical, conical shells and annular plates with general boundary conditions[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2014, 80: 62-80.

Stationary random vibration response analysis of functionally graded annular plate under complex boundary conditions

ZUO Peng[1,2], *SHI Xian-jie*[2], *GE Ren-wei*[2], *LUO Jing-run*[2]

(1. Department of Modern Mechanics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China;

2. Institute of Systems Engineering, China Academy of Engineering Physics, Mianyang 621999, China)

Abstract: An effective method, namely spectro geometric method-pseudo excitation method (SGM-PEM), is presented to investigate the stationary random vibration characteristic of functionally graded annular plates with complex boundary conditions. The boundary constraint springs are uniformly arranged along each boundary edge of the annular plate to stimulate the complex boundary conditions. The stationary random excitation is transformed into the pseudo harmonic excitation by using the pseudo excitation method (PEM). The displacement admissible functions of the annular plate are described based on the spectro-geometric method which only contains concise trigonometric function within the framework of the first-order shear deformation theory. The dynamic analysis model of functionally graded annular plate under stationary random excitation is established with the Rayleigh-Ritz method. Compared with the results obtained with finite element method (FEM), the effective and accuracy of the proposed method are demonstrated. The influence laws of some factors which include gradient index, thickness, and boundary conditions on the stationary random vibration characteristics of functionally graded annular plates are analyzed.

Key words: random vibration; functionally graded annular plate; stationary random excitation; spectro geometric method-pseudo excitation method (SGM-PEM); complex boundary conditions

作者简介: 左　朋(1995—),男,博士研究生。电话:13257559976; E-mail: zuopeng@mail.ustc.edu.cn。

通讯作者: 石先杰(1985—),男,博士,高级工程师,硕士生导师。电话:(0816)2493287; E-mail: 411shixj@caep.cn。