基于 Kaiser 窗的分数阶 Fourier 变换与时频分析

卢 恋[1], 任伟新[2], 王世东[1]

(1.合肥工业大学土木与水利工程学院,安徽 合肥 230009;
2.深圳大学滨海城市韧性基础设施教育部重点实验室,广东 深圳 518060)

摘要: 分数阶 Fourier 变换作为传统 Fourier 变换的推广,与传统 Fourier 变换分析平稳信号类似,在实现对非平稳信号的时频分析过程中往往出现同样的频谱泄漏问题。为了提高分数阶 Fourier 变换与时频分析的精度,依据 Kaiser 窗可自由选择主瓣和旁瓣宽度的特性,提出一种基于 Kaiser 窗的分数阶 Fourier 变换算法,论述了 Kaiser 窗在分数阶 Fourier 变换中的作用原理,从理论上推导出一般信号基于 Kaiser 窗的分数阶 Fourier 变换解析时频表达式以及特性,最终得到非平稳信号的时频分布与时变结构参数识别算法。通过任意线性调频信号的仿真算例以及非平稳激励三层框架结构振动台试验,对结构进行瞬时频率识别和算法的验证。结果表明,瞬时频率识别值与理论值和试验结果吻合良好,Kaiser 窗可以提高分数阶 Fourier 变换算法时频分析的精度,体现出该方法有一定的鲁棒性。

关键词: 时变结构; 分数阶 Fourier 变换; 频谱泄漏; Kaiser 窗; 时频分布
中图分类号: TU311.3; TN911.6 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2023)03-0698-08
DOI:10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2023.03.012

引 言

传统 Fourier 变换凭借其频域的全局性,在平稳信号的处理中有着非常重要的地位。在平稳信号处理过程中,由于 Fourier 变换分析的非同步采样以及非整周期截断会造成频谱泄漏的现象,为了减小由此产生的误差,学者们采用 Fourier 变换结合窗函数处理信号并取得一定的效果[1-4]。而对于非平稳信号,在处理时需要得到任意时间点的频率特征,基于此,传统 Fourier 变换只能在频域内描述信号从而表现出了明显的局限性[5]。针对非平稳信号的处理,提出了短时 Fourier 变换(Short-Time Fourier Transform,STFT)的算法,短时 Fourier 变换从本质上相当于结合短时窗的传统 Fourier 变换,是对传统 Fourier 变换的改进算法。由短时窗函数对信号的截取得到短时间内近似的平稳信号,通过传统 Fourier 变换使得在保留信号频率信息的同时,一定程度上具有时间信息,即随着窗函数在时间轴上滑动得到信号的时频分布[6-8],窗函数的存在直接缓解了 Fourier 变换的频谱泄漏问题。STFT 相对于传统 Fourier 变换而言具有局部分析能力,但窗口大小固定可能会导致信号频率分辨率不佳,为此,Pei 等[9]提出采用自适应长度的窗函数来改进算法。与此同时分数阶 Fourier 变换(Fractional Fourier Transform,FRFT)也得到了国内外学者的关注。

FRFT 是传统 Fourier 变换的推广,可以把一个函数或信号变换到时间和频率之间的任意中间域,在处理多分量信号时不会产生交叉项的干扰,适用于分析处理非平稳信号。陶然等[10-11]、Guo 等[12]、Tao 等[13]较早地对 FRFT 变换展开研究,FRFT 从定义上相对于传统 Fourier 变换增加一个变量(旋转角度),可以用于处理非平稳信号。卢恋等[14]的研究表明,FRFT 从本质上相当于传统 Fourier 变换结合可伸缩平移窗的算法,这体现了该算法的时频特性。与 STFT 可自由选择窗函数不同的是,FRFT 的窗函数表达式是固定的,在时域中起始幅值为单位 1,而结束幅值大小取决于时间长短,这不可避免存在与传统 Fourier 变换相似的频谱泄漏问题。

解决 Fourier 变换频率泄漏问题一般采用加窗的方法,其中窗函数选择是多样的,比如汉宁窗、汉明窗、布莱克曼窗以及三角窗等,但它们均有固定的旁瓣性能[15],而 Kaiser 窗由于可自由选择主瓣和旁瓣宽度以及比重,在窗函数中具有显著的优势[16]。为使信号的能量大部分集中在主瓣内,选择的 Kai-

收稿日期: 2021-08-20; **修订日期:** 2021-11-15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51778204); 深圳市科创委资助项目(KQTD20180412181337494, JSGG20210802093207022, ZDSYS20201020162400001, GJHZ20200731095802007)。

ser窗主瓣尽量窄，并且旁瓣的相对幅值尽量小。

本文提出一种基于Kaiser窗的FRFT算法，论述了Kaiser窗在FRFT中的作用原理，从理论上推导出一般信号的Kaiser窗分数阶Fourier变换解析时频表达式以及特性。时变系统数值与试验算例结果表明，该算法能有效改善FRFT算法的频谱泄漏问题，提高时变系统参数识别的精度。

1　分数阶Fourier变换

信号$x(t)$的分数阶Fourier变换$X_p(u)$的定义式及$X_p(u)$逆变换见文献[10]，FRFT作为传统Fourier变换的推广，在时频平面中，FRFT对信号的作用相当于坐标轴逆时针旋转，从而得到其分数阶Fourier域（FRFD）中的表示[17]，旋转角度为$\pi/2$的n次幂，n可为分数。等量关系为：

$$\begin{cases} u = t\cos\alpha + f\sin\alpha \\ \mu = -t\sin\alpha + f\cos\alpha \end{cases} \tag{1}$$

式中　u表示分数阶Fourier轴，μ为与分数阶Fourier轴相互垂直的轴，t和f分别表示信号的时间轴和频率轴，α为坐标轴的逆时针旋转角度。

对连续FRFT实行采样型离散化，由于计算过程涉及时、频域，为了实现离散化，首先需要对原始信号量纲归一化处理[18]如下：

引入尺度因子S，定义为：

$$S = \sqrt{T_s/f_s} \tag{2}$$

式中　T_s为采样时间，f_s为采样频率，此时定义新的坐标系为：

$$x = t/S,\ v = f\cdot S \tag{3}$$

则量纲归一化后分数域宽度为：

$$\Delta x = \sqrt{T_s\cdot f_s} = \sqrt{N'} \tag{4}$$

式中　N'为信号数据总点数。因此经过量纲归一化处理后信号归一化在$\left[-\sqrt{T_s\cdot f_s}/2,\ \sqrt{T_s\cdot f_s}/2\right]$内，且信号的时宽、带宽以及分数域宽度均为$\Delta x$。对连续信号$x(t)$做归一化后得到离散信号$x\left(\frac{n}{\Delta x}\right)$，其中$n\in\left[-\frac{N'}{2},\ \frac{N'}{2}\right]$，离散分数阶Fourier变换（DFRFT）算法计算公式为：

$$X_p\left(\frac{m}{2\Delta x}\right) = \frac{A_\alpha}{2\Delta x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi(\cot\alpha-\csc\alpha)\left(\frac{m}{2\Delta x}\right)^2}\cdot \sum_{n=-N_1}^{N'}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi\csc\alpha\left(\frac{m-n}{2\Delta x}\right)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi(\cot\alpha-\csc\alpha)\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2}x\left(\frac{n}{2\Delta x}\right) \tag{5}$$

式中　A_α表示FRFT数值计算过程中与旋转角度相关的过程量。

2　基于Kaiser窗的FRFT时频分析

2.1　基于Kaiser窗的FRFT理论分析

通过文献[14]可知，FRFT算法中的窗函数表达式为：$g(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi t^2}$，窗函数的起始幅值为1，因此与传统Fourier变换算法处理信号通过矩形窗截断成一帧一帧长度的数据块相似，FRFT也面临着频谱泄漏的风险。当信号同步采样时，对截取的信号进行FRFT分析得到的频率为窗函数定位时刻的真实频率，即体现了该算法对信号的时频分析过程。而现实工程背景下，需要处理的信号往往是非平稳信号，一般来说非平稳信号的截取几乎均为非同步截取，FRFT分析后频谱在整个分数阶域内会出现拖尾现象，这就是FRFT的频谱泄漏。为了将FRFT的泄漏误差降低到最小程度，需要对算法结合一些加权函数，即窗函数。原信号截断后的信号与窗函数相乘后的信号的起始和结束时刻幅值相等，此时对加窗后的信号进行FRFT分析，可得到改善后信号的分数阶Fourier频谱，因此选择合适的窗函数与信号处理的精度有直接关系。

由于矩形窗、汉宁窗、汉明窗，三角窗等窗函数拥有固定的主瓣和旁瓣性能，而Kaiser窗主瓣能量与旁瓣能量之比最大，且可以自由选择主瓣宽度和旁瓣高度间的比重[19]，因此在减小分数阶Fourier域的频率泄漏误差方面具有显著的优势，这里选用Kaiser窗函数对信号进行加权处理。Kaiser窗由第一类零阶修正贝塞尔函数构成，其时域表示为：

$$W(n) = \frac{I_0\left[\beta\sqrt{1-\left(\frac{n}{N/2}\right)^2}\right]}{I_0(\beta)},\ 0\leqslant|n|\leqslant N/2 \tag{6}$$

式中　$I_0(\beta)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(\beta/2)^n}{n!}\right]^2$，为第一类变形零阶贝塞尔函数；$N$为窗函数的长度；$\beta$为窗函数的形状参数，通过调节$\beta$可以控制主瓣的宽度和旁瓣电平的衰减比例，$\beta$越大，旁瓣就越小，主瓣宽度则会相应增加。表达式为：

$$\beta = \begin{cases} 0,\quad \alpha_1 < 13.26 \\ 0.76609(\alpha_1-13.26)^{0.4}+0.09834(\alpha_1- \\ 13.26,\ 13.26<\alpha_1<60 \\ 0.12438(\alpha_1+6.3),\quad 60<\alpha_1<120 \end{cases}$$

其中，α_1表示旁瓣峰值衰减值，肖林等[20]在附表中比较了选取不同的β值时Kaiser窗的性能，并表示在区间$2\leqslant\beta\leqslant14$内，$\beta$值越大，旁瓣峰值越

小，但主瓣宽度也越大。因此选取合适β值的Kaiser窗可极大提高FRFT处理信号的精度。Kaiser窗随不同β值对应的归一化频谱特性如图1所示。

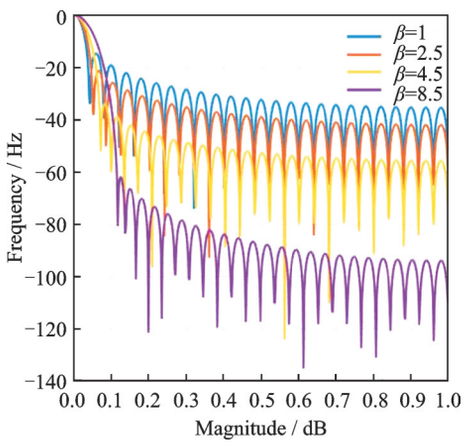


图1 Kaiser窗中不同β值对应的归一化频谱特性图

Fig. 1 Normalized spectrum characteristics corresponding to different β values in Kaiser window

Kaiser窗的频谱函数，即频域表达式为：

$$W(\omega)=\begin{cases}\dfrac{N}{I_0(\beta)}\cdot\dfrac{\sinh\sqrt{\beta^2-(N\frac{\omega}{2})^2}}{\sqrt{\beta^2-(N\frac{\omega}{2})^2}}, & \left|N\dfrac{\omega}{2}\right|\leqslant\beta\\ \dfrac{N}{I_0(\beta)}\cdot\dfrac{\sinh\sqrt{(N\frac{\omega}{2})^2-\beta^2}}{\sqrt{(N\frac{\omega}{2})^2-\beta^2}}, & \left|N\dfrac{\omega}{2}\right|>\beta\end{cases}\tag{7}$$

式中 ω表示频域的变量，即频率。

将式(6)代入分数阶Fourier变换定义式[10]中，可得Kaiser窗的分数阶Fourier域表达式为：

$$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty}W(n)K_p(t,u)\mathrm{d}t=$$

$$\frac{\sqrt{1-\mathrm{j}\cot\alpha}}{I_0(\beta)}\int_{-\tau}^{\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left[\frac{\beta}{2}\sqrt{1-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}\right]^{2k}\cdot$$

$$\cos\left[2\pi ut(\cot\alpha-\csc\alpha)\right]\mathrm{d}t\int_{-\tau}^{\tau}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi(u-t)^2\cot\alpha}\mathrm{d}t=$$

$$\frac{2\tau\sqrt{1-\mathrm{j}\cot\alpha}}{I_0(\beta)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{2k}\int_0^1(1-v^2)^k\cdot$$

$$\cos\left[2\pi u\tau(\cot\alpha-\csc\alpha)v\right]\mathrm{d}v\cdot$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n(\pi\cot\alpha)^{2n}\left[u^{4n+1}-(u-\tau)^{4n+1}\right]}{(2n)!(4n+1)}=$$

$$\begin{cases}\dfrac{2\tau\sqrt{1-\mathrm{j}\cot\alpha}}{I_0(\beta)}\dfrac{\sinh\sqrt{\left[2\pi u\tau(\cot\alpha-\csc\alpha)\right]^2-\beta^2}}{\sqrt{\left[2\pi u\tau(\cot\alpha-\csc\alpha)\right]^2-\beta^2}}\cdot\\ \operatorname{sinc}\left[(2u-\tau)\cot\alpha\right],\quad \left|2\pi u\tau(\cot\alpha-\csc\alpha)\right|>\beta\\ \dfrac{2\tau\sqrt{1-\mathrm{j}\cot\alpha}}{I_0(\beta)}\dfrac{\sinh\sqrt{\beta^2-\left[2\pi u\tau(\cot\alpha-\csc\alpha)\right]^2}}{\sqrt{\beta^2-\left[2\pi u\tau(\cot\alpha-\csc\alpha)\right]^2}}\cdot\\ \operatorname{sinc}\left[(2u-\tau)\cot\alpha\right],\quad \left|2\pi u\tau(\cot\alpha-\csc\alpha)\right|\leqslant\beta\end{cases}\tag{8}$$

式中 k表示Kaiser窗在时域的分段数目；$\tau=N/2$，由式(8)可知，当旋转角度$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$时，

$$F(u)=\begin{cases}\dfrac{2\tau}{I_0(\beta)}\cdot\dfrac{\sinh\sqrt{(\omega\tau)^2-\beta^2}}{\sqrt{\beta^2-(\omega\tau)^2}}, & |\omega\tau|>\beta\\ \dfrac{2\tau}{I_0(\beta)}\cdot\dfrac{\sinh\sqrt{\beta^2-(\omega\tau)^2}}{\sqrt{\beta^2-(\omega\tau)^2}}, & |\omega\tau|\leqslant\beta\end{cases}\tag{9}$$

式(9)与式(7)结果一致，验证了式(8)的正确性。因此，Kaiser窗的分数阶Fourier谱为：

$$W_\alpha(u)=$$

$$\begin{cases}\dfrac{N}{I_0(\beta)}\cdot\dfrac{\sinh\sqrt{\beta^2-(N\frac{\omega}{2})^2}}{\sqrt{\beta^2-(N\frac{\omega}{2})^2}}, & \alpha=\dfrac{\pi}{2}\text{且}\left|N\dfrac{\omega}{2}\right|\leqslant\beta\\ \dfrac{N}{I_0(\beta)}\cdot\dfrac{\sinh\sqrt{(N\frac{\omega}{2})^2-\beta^2}}{\sqrt{(N\frac{\omega}{2})^2-\beta^2}}, & \alpha=\dfrac{\pi}{2}\text{且}\left|N\dfrac{\omega}{2}\right|>\beta\\ \dfrac{2\tau\sqrt{1-\mathrm{j}\cot\alpha}}{I_0(\beta)}\dfrac{\sinh\sqrt{\left[2\pi u\tau(\cot\alpha-\csc\alpha)\right]^2-\beta^2}}{\sqrt{\left[2\pi u\tau(\cot\alpha-\csc\alpha)\right]^2-\beta^2}}\cdot\operatorname{sinc}\left[(2u-\tau)\cot\alpha\right], & \alpha\neq\dfrac{\pi}{2}\text{且}\left|2\pi u\tau(\cot\alpha-\csc\alpha)\right|>\beta\\ \dfrac{2\tau\sqrt{1-\mathrm{j}\cot\alpha}}{I_0(\beta)}\dfrac{\sinh\sqrt{\beta^2-\left[2\pi u\tau(\cot\alpha-\csc\alpha)\right]^2}}{\sqrt{\beta^2-\left[2\pi u\tau(\cot\alpha-\csc\alpha)\right]^2}}\cdot\operatorname{sinc}\left[(2u-\tau)\cot\alpha\right], & \alpha\neq\dfrac{\pi}{2}\text{且}\left|2\pi u\tau(\cot\alpha-\csc\alpha)\right|\leqslant\beta\end{cases}\tag{10}$$

Almeida[21]提出两个函数乘积的FRFT表示为：将第一个函数的FRFT与Chirp函数相乘，然后与另一个函数缩放后的传统Fourier变换卷积，最后再次乘以Chirp函数和缩放因子，则一般信号$x(t)$基于Kaiser窗的FRFT表示为：

$$Z_\alpha(u)=\sqrt{\frac{1-\mathrm{j}\cot\alpha}{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(u^2/2)\cot\alpha}\cdot \int_{-\infty}^{\infty}\left[\sqrt{\frac{1+\mathrm{j}\cot\alpha}{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(t^2/2)\cot\alpha}\cdot \int_{-\infty}^{\infty}W_\alpha(v)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(v^2/2)\cot\alpha+\mathrm{j}vt\csc\alpha}\mathrm{d}v\right]\cdot y(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(t^2/2)\cot\alpha-\mathrm{j}tu\csc\alpha}\mathrm{d}t=\frac{|\csc\alpha|}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(u^2/2)\cot\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}W_\alpha(v)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(v^2/2)\cot\alpha}\cdot Y[(u-v)\csc\alpha]\mathrm{d}v \tag{11}$$

式中　Y表示信号的传统Fourier变换。基于Kaiser窗的FRFT算法对任意信号的非同步采样处理过程如图2所示，加Kaiser窗后明显抑制频谱泄漏现象，有效减小误差，因此本文提出的算法能进一步提高FRFT分析信号的精度。

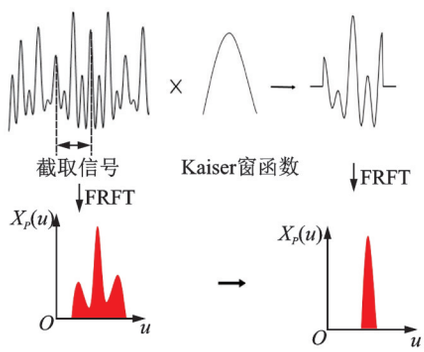


图2　非周期截断的信号加窗及FRFT分析效果

Fig. 2　Signal windowing with non-periodic truncation and FRFT analysis effect

2.2　时频分析

根据式(11)，信号基于Kaiser窗的FRFT系数对旋转角度α求偏导数为[22]：

$$\frac{\partial[Z_\alpha(u)]}{\partial\alpha}=\frac{\mathrm{j}Z_\alpha(u)}{2}\frac{2u\,w_x\sin\alpha-w_x^2-u^2\sin\alpha}{\cos^2\alpha}+(1-u^2)\frac{\mathrm{j}Z_\alpha(u)}{2} \tag{12}$$

由式(11)结合式(12)可知，基于Kaiser窗的FRFT幅值最大时对应的最佳分数域坐标$u_{\max}$与最佳旋转角度α'的关系最终化简为：

$$u_{\max}^2=1+\frac{2u_{\max}w_x\sin\alpha'-w_x^2-u_{\max}^2\sin\alpha'}{\cos^2\alpha'} \tag{13}$$

任意信号的瞬时频率表达式[22]为：

$$f=u_{\max}\csc\alpha'-t_0\cot\alpha' \tag{14}$$

式中　$u_{\max}$表示信号FRFT幅值最大时最佳分数域坐标，α'为$u_{\max}$对应的最佳旋转角度，t_0为时间轴上的平移参数。

经上述分析，得到基于FRFT结合Kaiser窗的算法对任意信号瞬时频率的识别步骤如下：

① 通过式(11)得到信号的FRFT结合Kaiser窗的FRFT结合Kaiser窗算法系数；

② 求解信号在不同时刻下的FRFT结合Kaiser窗算法系数最大值；

③ 由式(13)得到任意信号$u_{\max}$和α'的一般函数关系；

④ 由式(14)得到信号最终的时频分布。

3　数值算例

数值算例采用模拟单分量线性调频信号，该信号由调频信号叠加高斯白噪声$n(t)$组成。信号表达式为：

$$x(t)=A\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\left(f_0t+\frac{1}{2}kt^2\right)}+n(t) \tag{15}$$

式中　振幅$A=1$，初始频率$f_0=50$ Hz，参数$k=40$ Hz/s，噪声信噪比$SNR=10$ dB，采样频率$f_s=1000$ Hz，采样时间为2 s。图3为加噪后信号的时程曲线。

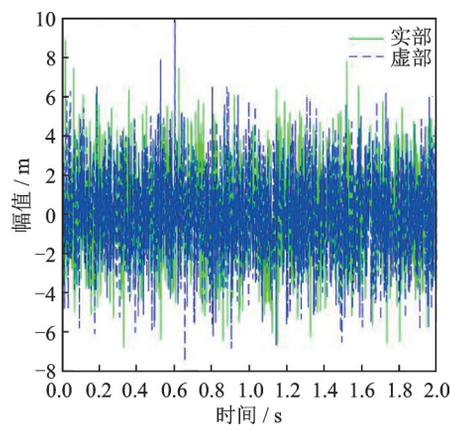


图3　加噪信号

Fig. 3　Noisy signal

图4为直接采用FRFT对加噪后信号的瞬时频率识别值与理论值对比曲线，FRFT时频分析算法

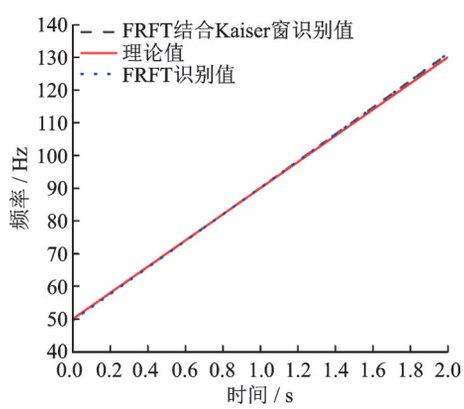


图4　加噪信号的频率识别对比曲线

Fig. 4　Frequency identification comparison curves of noisy signal

可以识别系统的时变参数。鉴于Kaiser窗函数β越大，主瓣宽度随之增大，因此本文取Kaiser窗形状参数$\beta=2.5$，采用本文提出的基于Kaiser窗的FRFT对加噪后信号的瞬时频率识别值与理论值对比曲线如图4所示，两种方法瞬时频率识别相对误差对比结果如表1所示。

表1 FRFT与FRFT结合Kaiser窗识别频率误差对比

Tab. 1 Frequency error comparison between FRFT and FRFT combined with Kaiser window identification

时间/s	频率/Hz			相对误差/%	
	理论值	FRFT识别值	FRFT结合Kaiser窗识别值	FRFT	FRFT结合Kaiser窗
0.00	50.0	49.58	50.01	0.84	0.02
0.12	54.8	54.43	54.77	0.67	0.05
0.33	63.2	62.93	63.13	0.43	0.10
0.52	70.8	70.63	70.74	0.25	0.09
0.67	76.8	76.71	76.77	0.11	0.04
1.00	90.0	90.13	90.11	0.14	0.12
1.18	97.2	97.46	97.43	0.27	0.23
1.32	102.8	103.17	103.14	0.36	0.33
1.85	124.0	124.95	124.85	0.77	0.68
2.00	130.0	131.17	131.00	0.90	0.77

从图4以及表1可以看出，与没有加Kaiser窗的FRFT相比较，Kaiser窗可以提高FRFT瞬时频率的识别精度，对噪声具有一定的鲁棒性。

4 试验验证

试验采用三层框架结构模型，框架截面采用型号为Q355的H型钢，截面尺寸为100 mm×100 mm，三层框架高3 m，层高1 m，每层4根梁，其中长度为1225 mm和1104 mm的梁各6根，柱和梁之间通过连接板和螺栓连接，4根柱子分别通过垫板用螺栓固定在振动台4个角落。试验共设5个加速度测点，位于框架中间层的梁柱连接处以及梁中部，梁柱连接处的3个传感器互相垂直(1～3号)，以监测结构的空间振动响应，梁中部安装2个垂直向传感器(4，5号)；框架结构、测点布置以及振动台如图5所示。

加速度传感器采用SDI Model 2210-002单轴加速度计，该加速度传感器具有低噪声、低功耗的优点。试验通过振动台实现对模型的各种非平稳信号激励，工作控制系统为MTS电液伺服加载系统，数据采集使用NI动态数据采集仪。

试验时采用非线性调频信号和正弦调频信号两种非平稳激励工况，两种工况的频率随时间变化曲线如图6所示。

图5 三层框架结构

Fig. 5 Three-storey frame structure

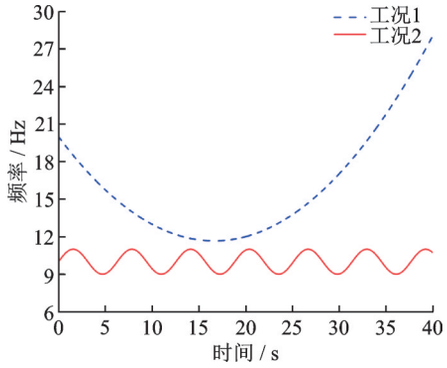


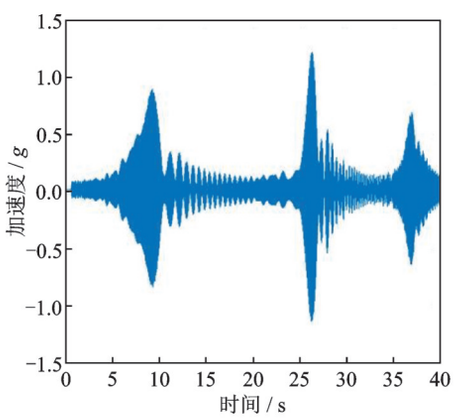
图6 两种输入信号波的时频变化曲线

Fig. 6 Time-frequency curves of two input signals

工况1：输入目标信号波为非线性调频信号，表达式为：$x(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(0.01t^3-0.5t^2+20t)}$。

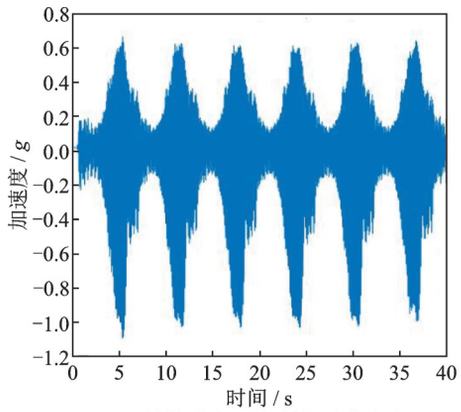
工况2：输入目标信号波为正弦调频信号，表达式为：$x(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(10t-\cos t)}$。

试验时结构加速度响应采样频率为500 Hz，振动时间为40 s。值得注意的是，本次试验采用5个加速度测点，选取2号加速度传感器采集的响应信号进行分析，两种非平稳激励工况的框架结构模型加速度响应时程如图7所示。



(a) 结构对应工况1的加速度响应

(a) Acceleration response of structure corresponding to working condition 1



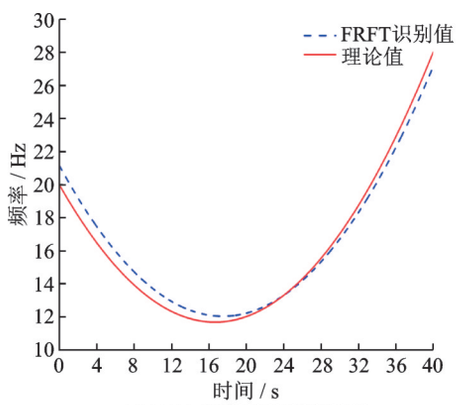
(b) 结构对应工况2的加速度响应

(b) Acceleration response of structure corresponding to working condition 2

图 7　框架结构加速度响应

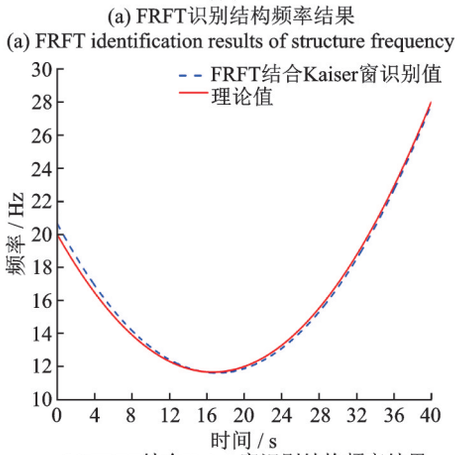
Fig. 7　Acceleration response of frame structure

图 8 和图 9 分别为不加窗与加 Kaiser 窗的 FRFT 针对两种非平稳激励试验工况识别的结构瞬时频率结果的比较，识别误差分别如表 2 和表 3 所示，本文取 Kaiser 窗函数参数 $\beta=2.5$。从分析结果可知：FRFT 具有时频分析特征，可以用于时变系统瞬时参数的识别，本文提出的结合 Kaiser 窗的 FRFT 的算法，瞬时频率识别结果与理论值吻合较



(a) FRFT识别结构频率结果

(a) FRFT identification results of structure frequency

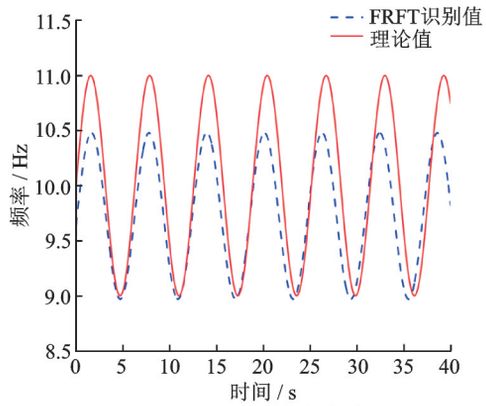


(b) FRFT结合Kaiser窗识别结构频率结果

(b) FRFT combined with Kaiser window to identify structural frequency

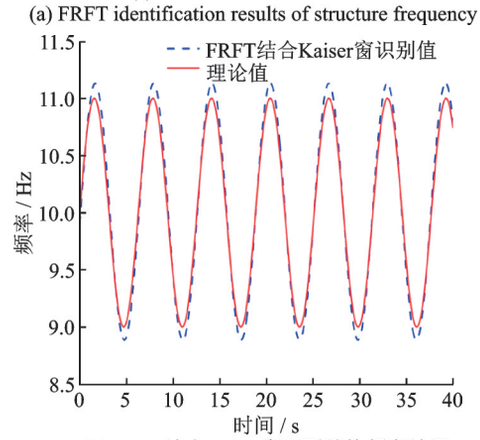
图 8　工况 1 对应的两种方法识别结构频率与理论值对比

Fig. 8　Comparison of structural frequency identification by two methods corresponding to working condition 1



(a) FRFT识别结构频率结果

(a) FRFT identification results of structure frequency



(b) FRFT结合Kaiser窗识别结构频率结果

(b) FRFT combined with Kaiser window to identify structural frequency

图 9　工况 2 对应的两种方法识别结构频率与理论值对比

Fig. 9　Comparison of structural frequency identification by two methods corresponding to working condition 2

表 2　工况 1 对应的两种方法识别结构频率误差对比

Tab. 2　Comparison of two methods for identifying structural frequency errors in working condition 1

时间/s	频率/Hz			相对误差/%	
	理论值	FRFT识别值	FRFT结合Kaiser窗识别值	FRFT	FRFT结合Kaiser窗
0.00	20.00	21.16	20.66	5.81	3.30
1.25	18.80	19.90	19.39	5.89	3.14
3.40	16.95	17.96	17.42	5.95	2.81
5.95	15.11	16.00	15.46	5.90	2.33
6.65	14.68	15.54	15.00	5.85	2.18
10.55	12.79	13.46	12.95	5.27	1.23
13.05	12.06	12.61	12.13	4.59	0.57
15.25	11.73	12.17	11.73	3.80	0.00
16.60	11.67	12.04	11.63	3.24	0.33
20.60	12.13	12.31	12.00	1.45	1.08
21.15	12.27	12.42	12.13	1.20	1.16
28.35	15.76	15.53	15.53	1.46	1.44
33.00	19.67	19.19	19.44	2.46	1.18
36.45	23.41	22.73	23.20	2.89	0.90
40.00	28.00	27.12	27.83	3.14	0.59

表 3 工况 2 对应的两种方法识别结构频率误差对比

Tab. 3 Comparison of two methods for identifying structural frequency errors in working condition 2

时间/s	频率/Hz			相对误差/%	
	理论值	FRFT 识别值	FRFT 结合 Kaiser 窗识别值	FRFT	FRFT 结合 Kaiser 窗
0.00	10.00	9.64	9.90	3.58	0.99
1.25	10.95	10.42	11.04	4.84	0.81
3.40	9.74	9.56	9.81	1.89	0.72
5.95	9.67	9.49	9.56	1.93	1.12
9.15	10.27	9.87	10.38	3.89	1.06
13.05	10.47	10.18	10.48	2.75	0.18
16.60	9.22	9.04	9.16	1.93	0.67
20.60	10.98	10.39	11.12	5.41	1.22
28.35	9.92	9.33	9.91	5.98	0.12
31.55	10.13	10.19	10.18	0.60	0.50
34.75	9.81	9.18	9.76	6.36	0.53
36.45	9.05	9.29	8.96	2.66	1.01
38.40	10.64	10.47	10.77	1.68	1.21
40.00	10.75	9.82	10.80	8.60	0.55

好,可以显著提高FRFT时变参数的识别精度。

5 结 论

FRFT算法作为传统Fourier变换算法的推广,可以用于处理非平稳信号和时变系统瞬时参数的识别。FRFT与传统Fourier变换有一定的相似性,在变换过程中可能会发生类似的频谱泄漏现象。为了提高分数阶Fourier变换与时频分析的精度,利用Kaiser窗函数可自由选择主瓣和旁瓣宽度的特性,本文提出一种结合Kaiser窗的FRFT算法,从理论上推导出一般信号Kaiser窗分数阶Fourier变换解析表达式。时变信号数值与振动台结构模型非平稳激励试验算例结果表明,结合Kaiser窗的FRFT能有效改善FRFT算法的频谱泄漏问题,提高时变系统参数识别的精度,并具有一定的鲁棒性,可用于时变系统瞬时参数的识别。

参考文献:

[1] 高云鹏, 滕召胜, 温和, 等. 凯塞窗插值FFT的电力谐波分析与应用[J]. 中国电机工程学报, 2010, 30 (4): 43-48.
Gao Yunpeng, Teng Zhaosheng, Wen He, et al. Power harmonic analysis and application of Kaiser window interpolation FFT[J]. Proceedings of the CSEE, 2010, 30 (4): 43-48.

[2] 黄知超, 延红艳, 杨升振, 等. 凯瑟窗改进谐波法测电力电容器介质损耗因数[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2012, 17 (5): 13-18.
Huang Zhichao, Yan Hongyan, Yang Shengzhen, et al. Modified harmonic analysis method of Kaiser window to measure dielectric loss factor of power[J]. Journal of Harbin University of Science and Technology, 2012, 17 (5): 13-18.

[3] Lai Z Q, Xiao Z H, Zhang G Q, et al. Application of FFT interpolation correction algorithm based on window function in power harmonic analysis[C]. 2018 4th International Conference on Environmental Science and Material Application, 2019, 252: 032184.

[4] 陈至豪,王立德,王冲,等.基于组合余弦优化窗四谱线插值FFT的电力谐波分析方法[J].电网技术,2020,44 (3):1105-1113.
Chen Z H, Wang L D, Wang C, et al. An approach for electrical harmonic analysis based on optimized composite cosine window four-spectrum-line interpolation FFT [J]. Power System Technology, 2020, 44 (3): 1105-1113.

[5] 续秀忠, 华宏星, 陈兆能. 结构模态参数辨识的时频分析方法[J]. 噪声与振动控制, 2002 (5): 3-7.
Xu Xiuzhong, Hua Hongxing, Chen Zhaoneng. Time-frequency analysis method for structural modal parameter identification[J]. Noise and Vibration Control, 2002 (5): 3-7.

[6] Gnann V, Becker J. Signal reconstruction from multi-resolution STFT magnitudes with mutual initialization [C]. 45th Audio Engineering Society International Conference 2012 on Applications of Time-Frequency Processing. 2012: 274-279.

[7] Jiang H C, Sun C, Zhao H B, et al. STFT-based method applied to GNSS spoofing estimation, mitigation and discrimination from multipath [C]. 32nd International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation. 2019: 3946-3958.

[8] Mateo C, Talavera J A. Bridging the gap between the short-time Fourier transform (STFT), wavelets, the constant-Q transform and multi-resolution STFT [J]. Signal Image and Video Processing, 2020, 14 (8): 1535-1543.

[9] Pei S C, Huang S G. STFT with adaptive window width based on the chirp rate[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60 (8): 4065-4080.

[10] 陶然, 齐林, 王越. 分数阶Fourier变换的原理与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
Tao Ran, Qi Lin, Wang Yue. Principle and Application of Fractional Fourier Transform [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.

[11] 陶然，邓兵，王越．分数阶Fourier变换在信号处理领域的研究进展[J]．中国科学E辑：技术科学，2006，36(2)：113-136.
Tao Ran, Deng Bing, Wang Yue. Research progress of fractional Fourier transform in signal processing[J]. Scientia Sinica (Series E): Technologica, 2006, 36(2): 113-136.

[12] Guo Z, Lu M F, Wu J M, et al. Fast FRFT-based method for estimating physical parameters from Newton's rings[J]. Applied Optics, 2019, 58(14): 3926-3931.

[13] Tao R, Miao H X, Ma J M. Theory and methods for sampling in fractional domains[C]. 2016 IEEE International Conference on Signal Processing, Communications and Computing (ICSPCC). 2016: 1-6.

[14] 卢恋，任伟新，王世东．基于分数阶Fourier变换的结构瞬时频率识别[J]．应用数学和力学，2022，43(8)：825-834.
Lu Lian, Ren Weixin, Wang Shidong. Structural instantaneous frequency identification based on fractional Fourier transform[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2022, 43(8): 825-834.

[15] Sulistyaningsih, Putranto P, Qurrachman T, et al. Performance comparison of Blackman, Bartlett, Hanning, and Kaiser window for radar digital signal processing [C]. 4th International Conference on Information Technology, Information Systems and Electrical Engineering (ICITISEE). 2019: 391-394.

[16] Gao Y P, Teng Z S, Wen H, et al. Harmonic analysis based on Kaiser window interpolation FFT and its application[J]. Proceedings of the Chinese Society of Electrical Engineering, 2010, 30(4): 43-48.

[17] Serbes A, Durak L. Optimum signal and image recovery by the method of alternating projections in fractional Fourier domains[J]. Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation, 2010, 15(3): 675-689.

[18] 赵兴浩，邓兵，陶然．分数阶傅里叶变换数值计算中的量纲归一化[J]．北京理工大学学报，2005，25(4)：360-364.
Zhao Xinghao, Deng Bing, Tao Ran. Dimension normalization in numerical calculation of fractional fourier transform[J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 2005, 25(4): 360-364.

[19] Taylor F J. Digital Filters: Principles and Applications with MATLAB[M]. Hoboken: Wiley-IEEE Press, 2012: 71-82.

[20] 肖林，吴孟达．关于Kaiser时窗函数的谱特性分析[J]．国防科技大学学报，1982(4)：155-163.
Xiao Lin, Wu Mengda. Spectral characteristics analysis of Kaiser time window function[J]. Journal of National University of Defense Technology, 1982(4): 155-163.

[21] Almeida L B. Product and convolution theorems for the fractional Fourier transform[J]. Signal Processing Letters IEEE, 1997, 4(1): 15-17.

[22] Lu Lian, Ren Weixin, Wang Shidong. Fractional Fourier transform: time-frequency representation and structural instantaneous frequency identification[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2022, 178: 109305.

Fractional Fourier transform based Kaiser window and time-frequency analysis

LU Lian[1], *REN Wei-xin*[2], *WANG Shi-dong*[1]

(1.School of Civil and Hydraulic Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China; 2.Key Laboratory for Resilient Infrastructures of Coastal Cities, Ministry of Education, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China)

Abstract: As a generalization form of traditional Fourier transform to deal with non-stationary signals, the fractional Fourier transform often faces the same spectrum leakage problem as the traditional Fourier transform in analyzing stationary signals. In order to reduce the spectrum leakage error and improve the accuracy of fractional Fourier transform and time-frequency analysis, according to the characteristic that the Kaiser window can freely choose the width of main lobe and side lobe, this paper proposes an algorithm of fractional Fourier transform combined with Kaiser window. The function principle of Kaiser window in fractional Fourier transform is discussed. The theoretical formula of time-frequency representation for Kaiser window based fractional Fourier transform is then derived. The time-frequency distribution and time-varying structure parameter identification algorithm of non-stationary signals are obtained. The feasibility of the proposed method is verified by a simulated linear frequency modulation signal and a three-storey model frame excited by non-stationary inputs through a shake table in the laboratory. It is demonstrated that the identified instantaneous frequencies of the proposed method are in good agreement with the theoretical values and involved Kaiser window in fractional Fourier transform does increase the accuracy to identify the time-varying parameters with a certain robustness.

Key words: time varying structure; fractional Fourier transform; spectrum leakage; Kaiser window; time-frequency distribution

作者简介：卢　恋(1994—)，女，博士研究生。E-mail：lulian@mail.hfut.edu.cn。
通讯作者：任伟新(1960—)，男，博士，教授。E-mail：renwx@szu.edu.cn。