

架空线路风偏计算的多刚体动力学模型及其分析

胡 鑫, 王璋奇, 田 瑞

(华北电力大学河北省电力机械装备健康维护与失效预防重点实验室, 河北 保定 071003)

摘要: 为准确高效地计算架空线路动态风偏位移响应, 进而预防风偏闪络事故发生, 结合架空线路风偏摆动的运动特征, 考虑绝缘子串中各个绝缘子的相对运动, 采用多个刚杆与扭转弹簧相互连接模拟架空导线, 根据风偏变形的力学关系与能量守恒原则, 建立了连续档架空线路风偏位移响应的多刚体模型与动力学方程; 通过量纲分析与相似理论构建物理仿真模型的风洞实验, 验证多刚体模型的准确性; 通过对工程实例进行数值仿真分析, 并比较多刚体模型与通用软件有限元模型的运算时间, 验证多刚体模型的高效性。研究表明: 连续档架空线路的风偏多刚体动力学模型可以有效展现各个绝缘子串与各档导线的动态风偏响应规律, 计算精度能够满足工程使用需求, 计算效率优于有限元模型。

关键词: 架空线路; 风偏位移响应; 多刚体动力学模型; 风洞实验; 数值仿真

中图分类号: TM75; O325 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2023)03-0737-11

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2023.03.016

引 言

在大风作用下, 架空线路的绝缘子串与导线会偏离初始位置并发生摇摆运动, 当风偏幅值超过安全范围时, 带电导体会对邻近物体放电, 导致风偏闪络事故。如 2015 年“龙平甲线”左相绝缘子串下端导线对铁塔风偏放电, 引起跳闸事故; 2018 年“平来线”档中导线在大风作用下对邻近线路的铁塔塔身发生风偏闪络放电, 引发故障跳闸^[1]。为预防风偏闪络事故发生, 合理规划安全范围, 准确高效的架空线路风偏位移计算方法必不可少。

在实际工程中, 设计人员通常使用静力学分析方法计算绝缘子串的风偏幅值^[2-3]。该方法将绝缘子串视为刚性直杆或弦多边形模型^[4], 在平均风速作用下运用静力平衡方程计算绝缘子串的风偏角。虽然静力学分析法具有独特的计算优势, 便于工程人员在架空线路防风偏设计时使用, 但其无法计算架空线路在风偏过程中的动态响应, 也不能合理地解释因风偏所引发的线路故障, 局限性明显。因此, 探索和研究有效的架空线路风偏响应动力学分析方法对于现今架空线路的风偏设计以及安全运行有着重要的意义。

早期的架空线路风偏动力学计算方法以孤立档

导线为研究对象, 通过微段导线的受力状态建立了风偏运动的偏微分方程, 并采用有限差分法进行求解^[5]。随着数值模拟技术的不断发展, 国内外学者运用通用有限元软件, 考虑来流风的动态效应, 构建了连续档架空线路风偏的动力学计算模型^[6-7]。Hung 等^[8]建立了架空线路的有限元模型, 计算了架空导线在阵风下的风偏幅值, 并通过现场实测数据分析了导线在阵风下的响应特性。朱宽军等^[9]利用有限元方法建立了输电线路塔线系统模型, 考虑风场的时空演化特性, 分析了输电线路的风致响应。相较于静力学分析方法, 有限元模型能够考虑风偏动态效应且计算更为准确, 但其建模复杂且附加计算量大(更改参数便需要重新迭代找型), 求解时间长, 无法高效地计算架空线路风偏响应幅值。

为了提高架空线路风偏响应计算效率, 楼文娟等^[10]提出以导线有限元模型在平均风载荷和重力载荷作用下处于平衡状态时的形状和刚度为初始计算条件, 采用线性动力学计算方法求解架空线路风偏响应。该方法将架空线路风偏响应非线性求解转变为线性, 在一定程度上减少了运算时间, 但其依然存在附加计算量大、总体计算效率低等问题。胡鑫等^[11]以绝缘子串风偏响应为重点计算对象, 用刚性直杆模拟导线, 建立了架空线路的力学等效模型, 该模型具有使用方便、计算快速等优点, 但其没有考虑

绝缘子串中各个绝缘子的相对运动,也没有考虑导线高差等结构参数^[12],具有一定的局限性。

为构建准确高效的架空线路动态风偏响应计算模型,本文结合架空线路风偏摆动的运动特征,考虑绝缘子串中各个绝缘子的相对运动,采用悬点间距无质量刚杆、悬垂刚杆与扭转弹簧相互连接模拟架空导线,根据导线风偏几何变形的力学关系与能量守恒原则,得到模型的特征参数,建立连续档架空线路风偏位移响应的多刚体模型与动力学方程,并通过物理仿真模型风洞实验与工程实例数值仿真分析,对多刚体模型进行准确性与高效性验证。该研究为架空线路动态风偏计算与防治设计分析提供了一条途径。

1 架空线路风偏模型的建立

1.1 多刚体模型描述

将一段连续档架空线路各塔中同相绝缘子串按顺序进行编号,其中耐张串的编号为1和 n ,其余为悬垂串。以1[#]耐张串导线挂点为原点建立坐标系, x 方向为指向大号塔侧, z 方向为竖直向下。第 i 档导线的高差角用 β_i 表示。

选择工程设计中认为的对风偏响应最不利风向(来流风垂直作用于 xoz 平面)进行分析^[13]。在平均风载荷作用下,架空线路处于静态风偏位置,如图1所示,根据设计手册^[13]可得第 i 档架空导线与第 i 串绝缘子串中第 j 个绝缘子的平均风偏角分别为:

$$\bar{\varphi}_i = \arctan[\phi \bar{V}^2 / (mg)] \quad (1)$$

$$\bar{\theta}_i(j) = \arctan \left[\frac{\phi L_H \bar{V}^2 + \phi \bar{V}_I^2 (n_{ii} - j + 1)/2}{mg L_V + (n_{ii} - j + 1) m_i g/2} \right], \quad j = 1, 2, \dots, n_{ii} \quad (2)$$

式中 $\bar{V}_I$ 与 $\bar{V}$ 分别为作用于绝缘子与导线的平均风速, m 与 m_i 分别为导线单位长度质量与绝缘子质量, n_{ii} 为第 i 串绝缘子串中绝缘子的个数, g 为重力加速度, L_H 为水平档距, L_V 为垂直档距, ϕ 与 ψ 为迎风系数,其表达式为:

$$\phi = A_i / 1.6, \quad \psi = \rho \mu_{sc} d / 2 \quad (3)$$

式中 A_i 为单片绝缘子的迎风面积, μ_{sc} 为导线体型系数, ρ 为空气密度, d 为架空导线外径。

脉动风载荷引起架空线路的动态风偏响应,其

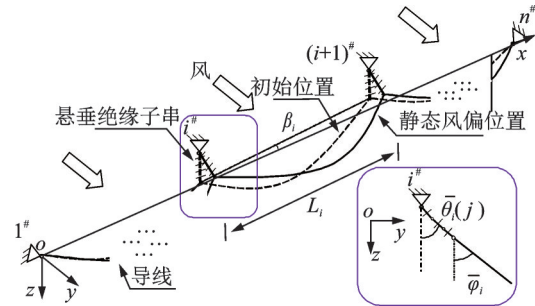


图1 架空线路静态风偏位置

Fig. 1 Static wind-induced position of overhead lines

表现为在 yz 面内以静态风偏位置为平衡位置的小幅摆动,结合风偏运动中架空导线两端挂点间距沿 x 方向变化量相较档距为微小量的实际情况,可以将一段架空线路的风偏位移响应通过多刚体动力学系统进行描述。

在架空线路风偏多刚体动力学系统中,绝缘子串由多个绝缘子刚体铰接组成,一档导线的风偏运动通过悬点间距无质量刚杆、多个悬垂刚杆与扭转弹簧相互连接进行模拟。其中,悬垂刚杆用于展现导线弧段风偏过程中的几何位移与力学关系,扭转弹簧用于模拟此档导线风偏运动中各个部分之间的相互作用,悬点间距无质量刚杆用于附加约束。此外,悬点间距无质量刚杆与绝缘子串下端、各个悬垂刚杆上端都通过铰接连接,不计摩擦。架空线路风偏多刚体模型示意图如图2所示。

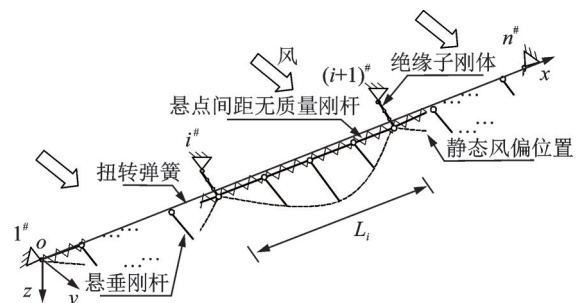


图2 架空线路的多刚体模型

Fig. 2 Multi-rigid-body model of overhead lines

1.2 多刚体模型的特征参数

将第 i 档导线沿档距等分为 n_i 段,每段等效为一个悬垂刚杆,其中,第 k 个悬垂刚杆的质心坐标通过 $[x_i^c(k), y_i^c(k), z_i^c(k)]$ 表示,该刚杆质心与自身悬挂点之间距离为 $l_i^c(k)$,回转半径为 $\rho_i^c(k)$:

$$l_i^c(k) = x_i^c(k) \cdot \tan \beta_i + \frac{1}{\cos \beta_i} \int_a^b \left[\frac{mg(L_i - x)}{2\sigma_0} - \sin \beta_i \right] x \Lambda dx / \int_a^b \Lambda dx, \quad (4)$$

$$\Lambda = 1 - \frac{mg(L_i - 2x)}{2\sigma_0} \sin \beta_i + \frac{1}{2} \left[\frac{mg(L_i - 2x)}{2\sigma_0} \cos \beta_i \right]^2$$

$$\rho_i^c(k) = \left\{ \frac{n_i}{L_i} \left(1 + \frac{\tan^2 \beta_i}{2} \right) \cdot \int_a^b \left[\frac{mgx(L_i - x)}{2\sigma_0} \right]^2 dx - [l_i^c(k)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

式中 积分下限 $a = (k-1)L_i/n_i$, 积分上限 $b =$

$$\begin{cases} S_i^b(k) = \sqrt{[x_i^c(k+1) - x_i^c(k)]^2 + \{l_i^r(k+1) - l_i^r(k) - [x_i^c(k+1) - x_i^c(k)] \tan \beta_i\}^2} \\ S_i^f(k) = \sqrt{[S_i^b(k)]^2 + [l_i^r(k+1)\varphi_i^*(k+1) - l_i^r(k)\varphi_i^*(k)]^2} \end{cases} \quad (6)$$

式中 $l_i^r(k)$ 为悬垂刚杆 k 的长度:

$$l_i^r(k) = mg \cdot x_i^c(k) \cdot [L_i - x_i^c(k)] / (2\sigma_0 \cos \beta_i) \quad (7)$$

悬垂刚杆之间的扭转弹簧表示导体各段之间的相互作用,其刚度主要反映了架空导线自身的拉伸、扭转特征,与运行张力产生的回复力特征。根据导线风偏几何变形的力学关系与能量守恒原则,可以计算相邻悬垂刚杆之间的扭转弹簧刚度为:

$$\begin{aligned} K_i^{TS}(k) &= \{K_i^E(k) \cdot [\Delta S_i(k)]^2 + K_i^G(k) \cdot \\ &[\Delta \varphi_i(k)]^2 + F_i^s(k) \cdot \Delta v_i^d(k)\} / [\Delta \varphi_i(k)]^2 \end{aligned} \quad (8)$$

式中 $\Delta S_i(k)$ 与 $\Delta \varphi_i(k)$ 分别表示相邻悬垂刚杆之间导线的长度变化与扭转变化, $K_i^E(k)$ 与 $K_i^G(k)$ 分别表示导线单位长度的拉伸刚度与扭转刚度, $\Delta v_i^d(k)$ 表示相邻悬垂刚杆在摆动方向上的相对位移, $F_i^s(k)$ 表示运行张力产生的回复力,表达式有:

$$\begin{cases} \Delta S_i(k) = S_i^f(k) - S_i^b(k) \\ \Delta \varphi_i(k) = \varphi_i^*(k+1) - \varphi_i^*(k) \\ \Delta v_i^d(k) = \sqrt{[S_i^f(k)]^2 - [S_i^b(k)]^2} \\ K_i^E(k) = EA/S_i^b(k) \\ K_i^G(k) = \alpha_G (G_1 I_{p1} + G_2 I_{p2}) / S_i^b(k) \\ F_i^s(k) = \sigma_0 \Delta v_i^d(k) / [x_i^c(k+1) - x_i^c(k)] \end{cases} \quad (9)$$

式中 E, A 分别为导线的弹性模量与横截面积; G_1, G_2 分别为架空导线钢芯与铝绞层的扭转弹性模量; I_{p1}, I_{p2} 分别为钢芯和铝绞层的扭转极惯性矩; α_G 为捻绕系数,通过实验得知其值在 0.11~0.13 之间^[14]。

1.3 多刚体模型的动力学方程

已知单个绝缘子的长度为 l_i , 脉动风偏角为 $\theta_i^*(j)$, 其在 y 和 z 方向上的风偏位移为:

$$\begin{cases} v_{hi}(j) = l_i \left[\frac{\theta_i^*(j) \cdot \cos \bar{\theta}_i(j)}{2} + \sum_{r=1}^{j-1} \theta_i^*(r) \cdot \cos \bar{\theta}_i(r) \right] \\ w_{hi}(j) = -l_i \left[\frac{\theta_i^*(j) \cdot \sin \bar{\theta}_i(j)}{2} + \sum_{r=1}^{j-1} \theta_i^*(r) \cdot \sin \bar{\theta}_i(r) \right] \end{cases} \quad (10)$$

第 k 个悬垂刚杆在 y 和 z 方向上的风偏位移为:

kL_i/n_i , L_i 为第 i 档导线的档距, σ_0 为导线初始运行张力。

第 k 个悬垂刚杆的脉动风偏角记为 $\varphi_i^*(k)$, 相邻悬垂刚杆下端间距在动态风偏前后分别表示为 $S_i^b(k)$ 和 $S_i^f(k)$:

$$\begin{cases} v_i(k) = \frac{l_i x_i^c(k)}{L_i} \left[\sum_{r=1}^{n_{i+1}} \theta_{i+1}^*(r) \cdot \cos \bar{\theta}_{i+1}(r) - \sum_{r=1}^{n_i} \theta_i^*(r) \cdot \cos \bar{\theta}_i(r) \right] + l_i \sum_{r=1}^{n_i} \theta_i^*(r) \cdot \cos \bar{\theta}_i(r) + l_i^c(k) \cdot \varphi_i^*(k) \cdot \cos \bar{\varphi}_i \\ w_i(k) = \frac{l_i x_i^c(k)}{L_i} \left[\sum_{r=1}^{n_{i+1}} \theta_{i+1}^*(r) \cdot \sin \bar{\theta}_{i+1}(r) - \sum_{r=1}^{n_i} \theta_i^*(r) \cdot \sin \bar{\theta}_i(r) \right] - l_i \sum_{r=1}^{n_i} \theta_i^*(r) \cdot \sin \bar{\theta}_i(r) - l_i^c(k) \cdot \varphi_i^*(k) \cdot \sin \bar{\varphi}_i \end{cases} \quad (11)$$

在架空线路风偏位移响应中,气动阻尼的影响远大于线路的结构阻尼,文献[15]指出,采用架空线路与来流风的相对运动,可以合理计算气动阻尼(如图3所示,图中 v' 表示来流风与导线的相对速度)。

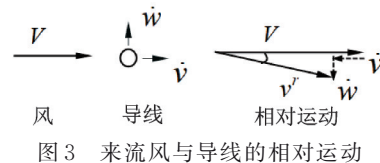


图3 来流风与导线的相对运动

Fig. 3 Relative motion of incoming wind and conductor

将作用于导线与绝缘子的相对运动脉动风载荷向 y 向与 z 向进行分解,略去脉动风速与风偏速度的高次项与乘积项,可得第 j 个绝缘子受到的脉动风载荷为:

$$\begin{cases} F_{hi}^y(j) = \phi [2\bar{V}_i V_{hi}^* - 2\bar{V}_i \dot{v}_{hi}(j)] \\ F_{hi}^z(j) = -\phi \bar{V}_i \dot{w}_{hi}(j) \end{cases} \quad (12)$$

第 k 个悬垂刚杆受到的脉动风载荷为:

$$\begin{cases} F_i^y(k) = \phi L_i [2\bar{V}_i V_i^*(k) - 2\bar{V}_i \dot{v}_i(k)] / n_i \\ F_i^z(k) = -\phi L_i \bar{V}_i \dot{w}_i(k) / n_i \end{cases} \quad (13)$$

式中 V_{hi}^* 与 $V_i^*(k)$ 分别为作用于绝缘子与导线的脉动风速; $\dot{v}_{hi}(j)$, $\dot{w}_{hi}(j)$ 与 $\dot{v}_i(k)$, $\dot{w}_i(k)$ 分别为绝缘子与导线的风偏速度。

选取绝缘子脉动风偏角 $\theta_i^*(j)$ 与悬垂刚杆脉动风偏角 $\varphi_i^*(k)$ 为系统广义坐标,计算架空线路的势能、动能与虚功,采用分析力学方法得到多刚体模型的动力学方程:

$$\begin{aligned}
 & M_i \ddot{x} + C_i \dot{x} + K_i x = F_i \quad (14) \quad \text{式中:} \\
 & M_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{i-1}^m & \cdots & E_{i-1}^m(j, k) & \cdots & \mathbf{I}_i^m \\ \vdots & & & & \vdots \\ P_{i-1}^m(j, k) & & O_{i-1}^m(k) & & Q_{i-1}^m(j, k) \\ \vdots & & & & \vdots \\ H_{i-1}^m & \cdots & D_{i-1}^m(j, k) & \cdots & \mathbf{A}_i^m & \cdots & E_i^m(j, k) & \cdots & \mathbf{I}_{i+1}^m \\ & & & & \vdots & & & & \vdots \\ & & & & P_i^m(j, k) & & O_i^m(k) & & Q_i^m(j, k) \\ & & & & \vdots & & & & \vdots \\ & & & & H_i^m & \cdots & D_i^m(j, k) & \cdots & \mathbf{A}_{i+1}^m \end{bmatrix}, \\
 & C_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{i-1}^c & \cdots & E_{i-1}^c(j, k) & \cdots & \mathbf{I}_i^c \\ \vdots & & & & \vdots \\ P_{i-1}^c(j, k) & & O_{i-1}^c(k) & & Q_{i-1}^c(j, k) \\ \vdots & & & & \vdots \\ H_{i-1}^c & \cdots & D_{i-1}^c(j, k) & \cdots & \mathbf{A}_i^c & \cdots & E_i^c(j, k) & \cdots & \mathbf{I}_{i+1}^c \\ & & & & \vdots & & & & \vdots \\ & & & & P_i^c(j, k) & & O_i^c(k) & & Q_i^c(j, k) \\ & & & & \vdots & & & & \vdots \\ & & & & H_i^c & \cdots & D_i^c(j, k) & \cdots & \mathbf{A}_{i+1}^c \end{bmatrix}, \\
 & K_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{i-1}^k & & \mathbf{J}_{i-1}^k & & \\ & & \vdots & & \\ & & R_{i-1}^k(k-1) & O_{i-1}^k(k) & S_{i-1}^k(k+1) & & \\ & & & & \vdots & & \\ & & & & N_{i-1}^k & \mathbf{A}_i^k & \mathbf{J}_i^k & & \\ & & & & & & \vdots & & \\ & & & & & & R_i^k(k-1) & O_i^k(k) & S_i^k(k+1) & & \\ & & & & & & & & \vdots & & \\ & & & & & & & & N_i^k & \mathbf{A}_{i+1}^k \end{bmatrix}, \\
 & x = [\theta_{i-1}^*(j) \quad \cdots \quad \varphi_{i-1}^*(k) \quad \cdots \quad \theta_i^*(j) \quad \cdots \quad \varphi_i^*(k) \quad \cdots \quad \theta_{i+1}^*(j)]^T, \\
 & F_i = [F_{i-1}^w(j) \quad \cdots \quad F_{i-1}^e(k) \quad \cdots \quad F_i^w(j) \quad \cdots \quad F_i^e(k) \quad \cdots \quad F_{i+1}^w(j)]^T.
 \end{aligned}$$

上式中加粗参数代表矩阵,其元素的表达式详见文末附录。

式(14)表述了第*i*串绝缘子串及两侧导线的动态风偏位移响应,当其扩展到整段架空线路时,应以耐张串为边界条件,即 $\theta_1^* = \theta_n^* = 0$,其中一档导线上任意位置的风偏位移可以采用该档导线悬垂刚杆风偏角与导线弧垂通过插值方法计算得到。

2 物理仿真与准确性验证

2.1 量纲分析与相似准则

由于实验条件限制,需要使用比例模型。考虑到实际工程中风偏系统的受力对象主要为架空导线,因此选择架空导线为分析对象,从几何、气动、能

量三个条件中选取关键参数^[16-17],采用量纲分析方法得到模型与原型的相似准则,构建物理仿真模型风洞实验,进而验证多刚体模型的准确性。

(a) 几何条件相似

一档含有高差 ΔH_i 的导线悬链线方程为:

$$z = -\frac{2\sigma_0}{mg} \sinh \frac{mgx}{2\sigma_0} \sinh \left[\frac{mg(x - L_i)}{2\sigma_0} + \frac{\Delta H_i}{L_i} \right] \quad (15)$$

式中 g 为固定常值,所以根据几何条件可以选取关键参数为 L_i, m, σ_0 与 ΔH_i 。

(b) 气动条件相似

架空导线的风偏幅值由来流风载荷与自身重力共同决定。为使模型与原型的气动条件相似,应使模型的平均风偏角与原型相似。架空导线的平均风偏角方程为:

$$\tan \bar{\varphi}_i = \mu_{sc} \rho \bar{V}^2 d / (2mg) = \lambda \cdot \mu_{sc} \rho / (2g) \quad (16)$$

式中 ρ 为常值, μ_{sc} 耦合于其他变量, 架空导线静态风偏角的幅值由 $\bar{V}$, d 和 m 共同决定, 由于 m 是几何条件中的关键参数, 因此在气动条件中选择比值 λ 作为关键参数, 有 $\lambda = \bar{V}^2 d / m$ 。

(c) 能量条件相似

架空导线的应变能方程为:

$$V_\epsilon = \int_0^{L_i} (\sigma_0 + EA\epsilon/2) d(\Delta s) \quad (17)$$

式中 Δs 为导线单位长度变量, ϵ 为应变。由于 A , Δs 和 ϵ 耦合于其他变量, 因此选取 E 为关键参数。

根据以上 3 个相似条件, 共选取 6 个关键参数, 以质量([M])、长度([L])、时间([T])为基本量纲, 建立量纲矩阵, 如表 1 所示。

表 1 量纲矩阵
Tab. 1 Dimension matrix

	L_i	m	σ_0	ΔH_i	λ	E
[M]	0	1	1	0	-1	1
[L]	1	-1	1	1	4	-1
[T]	0	0	-2	0	-2	-2

根据表 1 和量纲分析的 Pi 定理^[18], 推导得到 3 个相似准则表达式:

$$\pi_1 = \frac{\Delta H_i}{L_i}, \pi_2 = \frac{\lambda m^2}{L_i \sigma_0}, \pi_3 = \frac{EL_i^2}{\sigma_0} \quad (18)$$

按照相似性定理, 当模型 π 与原型 π 的相近程度越高时, 就认为模型与原型越相似。

2.2 物理仿真模型的风洞实验设计

为模拟架空导线的动态性能, 使用聚苯乙烯棒与钢丝绳构建物理仿真模型。钢丝绳作为模型型芯, 以承担运行张力, 外面包裹聚苯乙烯棒, 以确保模型和原型的气动条件相似, 仿真模型如图 4 所示。选择型号为 JL/G1A-630/45 的架空导线作为原型, 通过式 (18) 得到模型的物理参数值, 如表 2 所示。其中原型与模型对应的 π_1, π_2, π_3 的差异率分别为 0, 3.1%, 4.8%。

表 2 原型与模型的物理参数值

Tab. 2 Physical parameter values of prototype and model

	外径/ mm	档距/ m	运行张 力/N	单位长度 质量/ (kg·m ⁻¹)	弹性模 量/GPa	高 差/m
原型	33.8	180	25000	2.079	63	10
模型	6	1	2.4	0.0034	206	0.055

注: 表中模型的型芯直径为 1 mm。

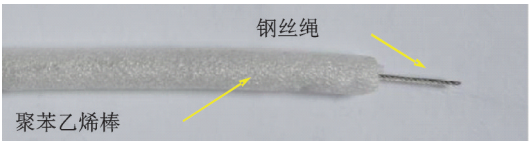


图 4 架空导线物理仿真模型

Fig. 4 Overhead conductor physical simulation model

通过低速射流风洞模拟风场, 该风洞由动力系统、紊流网、稳定段、收缩段、试验段组成。动力系统由 3 个三相异步电动风机组成, 紊流网和稳定段保证了气流的流动质量, 收缩段的作用是使气流加速, 模型放置在试验段。实验风速可在 0~3 m/s 之间连续调节。为使实验风速具有脉动性能, 通过变频器控制动力系统使其产生在均值附近波动的风速。虽然实验风速相关性较强, 且脉动性能与实际风速有一定区别, 但将其代入多刚体模型进行计算以验证准确性是满足实验要求的。

物理仿真模型模拟“两档”架空线路, 档距分别为 1.1 m 和 0.9 m, 高差分别为 0.04 m 和 0.02 m。为展现绝缘子相对运动与满足绝缘子串受载远远小于导线的实际情况, 绝缘子串模型采用 3 段直径为 1 mm 的锡棒连接组成, 上端悬挂在风洞中, 下端与导线模型连接。导线模型右侧固定, 左侧通过张力传感器与花篮螺丝连接, 以控制张力, 图 5 为实验示意图。采用 IFA300 等温热线薄膜风速仪进行风速测量, 采用 NIKON D300S 相机对模型的风偏运动进行摄录, 通过视觉算法^[19]对绝缘子串下端与导线最大弧垂位置的运动轨迹进行识别, 分别得到绝缘子串下端与导线最大弧垂位置的顺风向位移时程曲线。由于绝缘子串的长度不影响多刚体模型的验证结果, 可以选择较长的绝缘子串模型, 以方便视觉算法识别。实验模型与风偏瞬时图像如图 6 所示。

2.3 结果分析与准确性验证

将仿真模型的物理参数和实验风速 (如图 7 所示, 平均风速为 1.5 m/s) 输入多刚体模型进行计算, 再将计算结果与实验结果进行比较。

以绝缘子串下端与右档导线最大弧垂位置为例, 绘制顺风向位移时程曲线, 如图 8 所示。为进

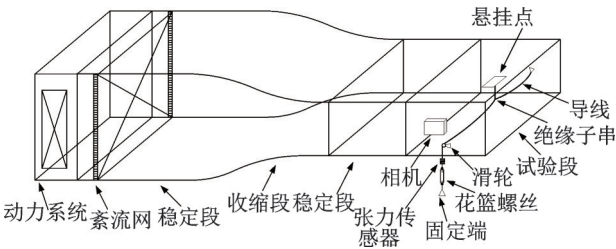


图 5 风洞实验示意图

Fig. 5 Schematic diagram of wind tunnel test

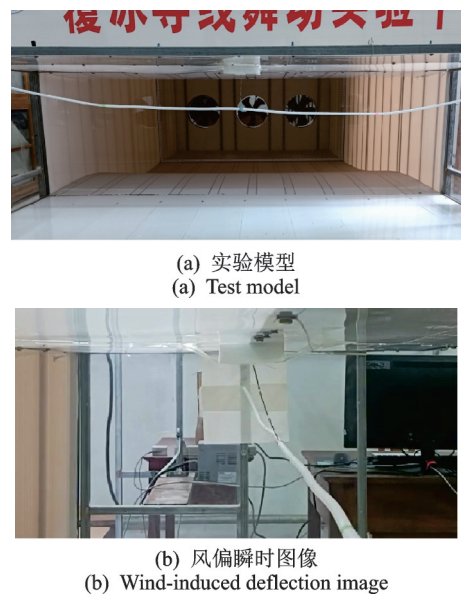


图 6 物理仿真模型的风洞实验

Fig. 6 Wind tunnel test of physical simulation model

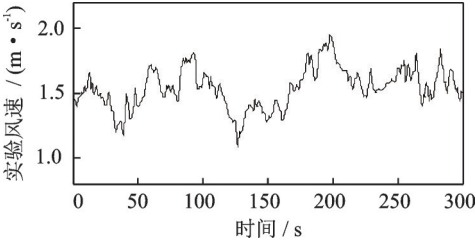


图 7 实验风速

Fig. 7 Experimental wind speed

一步验证多刚体模型的准确性,再分别选取 1 m/s 和 2 m/s 的平均风速进行实验和计算,并将结果汇总于表 3。

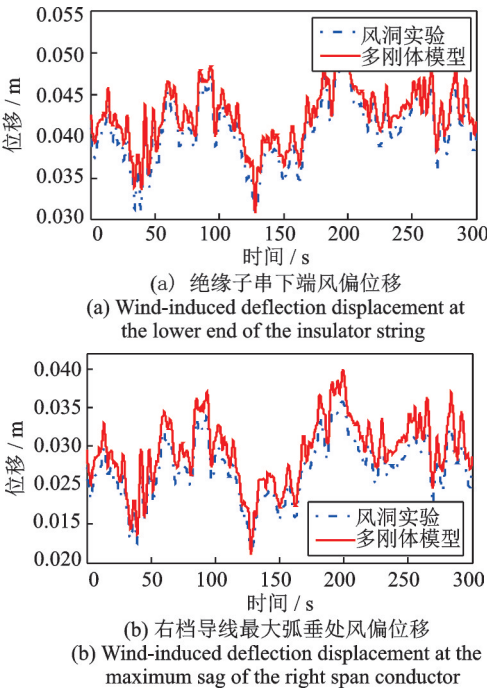


图 8 风偏位移时程曲线对比

Fig. 8 Comparison of wind-induced deflection displacement time history curves

表 3 多刚体模型与风洞实验的风偏响应对比

Tab. 3 Comparison of wind-induced deflection response in multi-rigid-body model and wind tunnel test

名称	平均 风速/ (m·s ⁻¹)	风偏响应均值			风偏响应标准差		
		实验 值/mm	模型 值/mm	差异 率/%	实验 值/mm	模型 值/mm	差异 率/%
绝缘子串	1.0	30	31	3.22	3.7	3.9	5.13
	1.5	41	42	2.38	3.4	3.6	5.56
	2.0	49	51	3.92	3.1	3.2	3.13
左档导线	1.0	22	23	4.35	4.1	4.4	6.81
	1.5	29	30	3.45	3.9	4.2	7.14
	2.0	37	39	5.13	3.6	3.8	5.26
右档导线	1.0	19	20	4.76	4.0	4.3	6.97
	1.5	27	28	3.57	3.8	4.1	7.32
	2.0	33	35	5.71	3.5	3.7	5.41

由图 8 可见,多刚体模型计算得到的风偏位移时程曲线与风洞实验吻合度较高。表 3 表明,两种方法得到的风偏响应均值、标准差接近,差异率满足工程使用需求。图 8 与表 3 验证了架空线路风偏多刚体动力学模型的准确性。

3 数值仿真与高效性验证

3.1 工程实例与风场模拟

以一段 220 kV“耐直直耐”架空线路为研究对象,该段线路档距分别为 350,320 和 380 m,导线挂点高分别为 26,30,30 和 28 m,如图 9 所示。

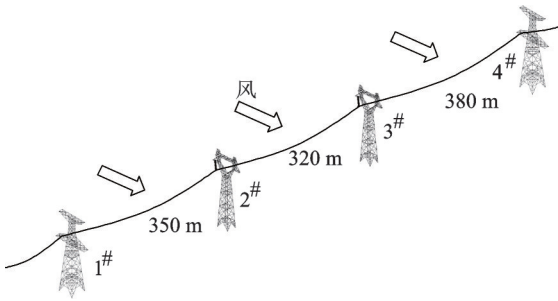


图 9 架空线路示意图

Fig. 9 Schematic diagram of overhead lines

架空导线型号为 JL/G1A-630/45,单位长度质量为 2.079 kg,年运行张力为 28000 N。悬式绝缘子串长度为 3.1 m,总重为 112.4 kg,片数为 16 片。来流风速垂直作用于导线初始平面,标准高度 10 m 处的风速为 25 m/s,不考虑分裂导线屏蔽作用。

工程实例中架空线路每档导线采用 5 个悬垂刚杆进行模拟,即整段线路多刚体模型共有 15 个悬垂刚杆,18 个扭转弹簧,考虑到在架空线路脉动风场模拟中,每根悬垂刚杆和每串绝缘子串各自对应一个风速样本,则该段线路风场共需模拟 17 个风速样本。采用线性滤波法对 Kaimal 风速谱^[20]进行变换,利用 Darvenport 相干函数求取回归系数矩阵,生成

协方差矩阵并构造互相关函数矩阵,对其进行Cholesky分解,生成标准正态分布随机数,进而通过AR模型综合得到脉动风场的风速时程。地形粗糙度指数取0.15,将这些风速样本沿档距方向依次排号,以第9个风速样本为例,绘制10 min内脉动风速的时程曲线,并通过与目标谱对比验证了风速模拟的正确性,如图10所示。

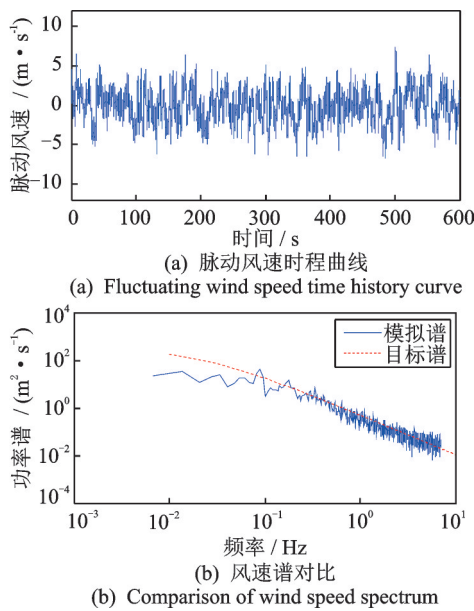


图 10 脉动风速模拟

3.2 仿真分析与对比验证

通过多刚体模型对工程实例进行数值仿真,采用Newmark-β法进行计算,时间步长取0.01 s,得到“耐直直耐”架空线路绝缘子串与导线的动态风偏时程响应。选取工程设计中最为关注的绝缘子串下端与各档导线最大弧垂处为对象绘制风偏响应空间位置,如图11所示。

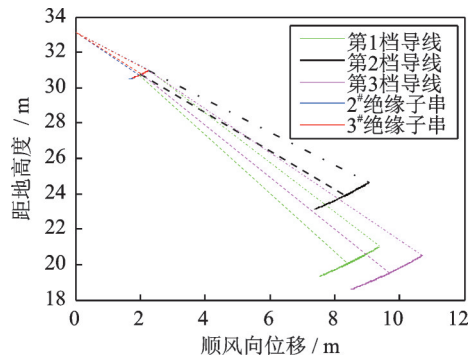


图 11 风偏响应空间位置示意图

Fig. 11 Schematic diagram of the spatial location of wind-induced deflection response

图11中虚线表示绝缘子串与架空导线的静态风偏位置,点划线表示风偏位移的最大范围。在此工程实例中,架空线路各档导线的最大弧垂分别为

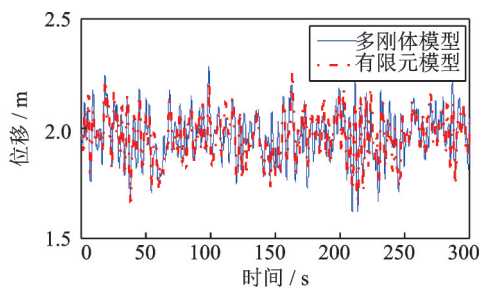
11.2,9.3,13.1 m,从图11中可以看到,第3档导线因弧垂最大导致顺风向位移最远,第1档导线弧垂虽然大于第2档导线,但由于受到耐张塔的牵扯影响,顺风向位移与第2档导线基本相同。数值仿真结果符合工程事实,表明多刚体模型可以有效展现连续档架空线路中各串绝缘子串与各档导线的动态风偏响应规律。

为进一步验证多刚体模型,选用通用软件ANSYS的有限元模型作为比较对象,对工程实例进行计算分析。在有限元模型中,架空导线由仅受拉的link10单元模拟,每档导线的单元数为200,绝缘子串由link8单元模拟,每串绝缘子串的单元数为16,整段模型共有1887个自由度。通过迭代法对线路模型进行找型,以静态平衡位置的线路构型为初始条件进行计算,将两种模型的风偏结果差异率归纳汇总于表4,并选取2号绝缘子串下端与第2档导线最大弧垂位置的顺风向位移绘制时程曲线,如图12所示。

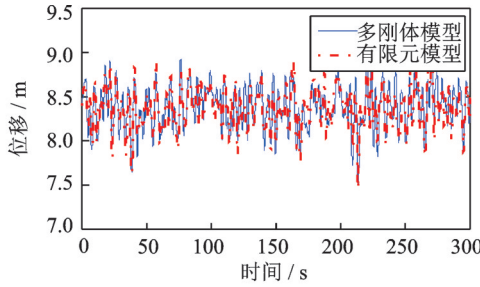
表 4 两种模型风偏位移结果差异率比较

Tab. 4 Comparison of wind-induced deflection displacement difference rate between two models

名称	响应均值差异率/%	响应标准差差异率/%	响应最大值差异率/%
2号绝缘子串	0.65	4.58	1.78
3号绝缘子串	0.61	4.21	1.72
第1档导线	0.96	4.67	2.12
第2档导线	0.83	4.33	1.93
第3档导线	0.91	4.94	2.43



(a) Downwind displacement time history of the insulator string 2[#]



(b) Downwind displacement time history of the second span conductor

图 12 两种模型风偏响应时程曲线比较

Fig. 12 Comparison of wind-induced deflection response time history curves between two models

由图 12 与表 4 可见,多刚体模型与通用软件有限元模型计算得到的架空线路绝缘子串、导线风偏位移时程曲线吻合度较好,两种模型得到的风偏响应均值、标准差与最大值的差异率均满足工程使用需求,再次验证了架空线路风偏多刚体动力学计算模型的准确性。

对比分析多刚体模型与通用软件有限元模型的计算效率,其中有限元模型的运行平台为 ANSYS 12.0,运算用时为 673.6 s,多刚体模型的运行平台为 MATLAB 2011a,运算用时为 56.8 s。改变架空线路档数,对多刚体模型的高效性做进一步验证,将两种模型运算用时进行归纳比较,如图 13 所示。

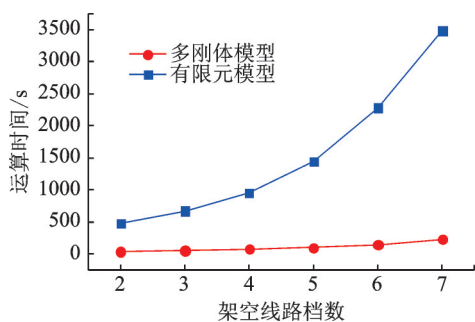


图 13 运算时间对比

Fig. 13 Comparison of program running time

由图 13 可知,当架空线路的档数较少时,两种模型求解运算时间相近,随着架空线路档数的增加,多刚体模型解算时间略微增加,而有限元模型解算时间增幅明显,多刚体模型的运算用时远低于有限元模型,验证了架空线路风偏多刚体动力学模型的高效性。

4 结 论

为准确高效地计算架空线路动态风偏位移响应,本文采用刚体动力学模型模拟输电导线、悬垂绝缘子串等架空线路关键部位的风偏运动,运用分析力学方法建立连续档架空线路的风偏模型,并采用物理仿真与数值仿真对模型进行验证,主要研究结论如下:

(1) 提出并建立了架空线路风偏多刚体动力学计算模型,该模型以耐张绝缘子串风偏角作为计算边界条件,反映了架空线路悬垂绝缘子串与输电导线以静态风偏位置为平衡位置的动态风偏位移响应。

(2) 通过相似性理论建立能够模拟架空线路风偏运动的物理仿真模型风洞实验,将实验参数代入多刚体模型进行计算,并将计算结果与实验结果相比较,证明了多刚体模型计算架空线路动态风偏位

移响应的准确性。

(3) 通过对工程实例进行数值仿真,表明多刚体模型能有效展现连续档架空线路中各个绝缘子串与各档导线的动态风偏响应规律,再以不同档数的架空线路为分析对象,比较多刚体模型与通用软件有限元模型的运算时间,证明了多刚体模型的计算高效性。

参考文献:

- [1] 黄金领, 林均发, 韦佩才, 等. 500 kV 线路交叉跨越风偏故障原因分析[J]. 广西电力, 2019, 42(1): 36-40.
Huang Jinling, Lin Junfa, Wei Peicai, et al. Analysis of wind deviation faults between 500 kV crossing transmission lines[J]. Guangxi Electric Power, 2019, 42(1): 36-40.
- [2] 周湛, 张志坤, 赵振刚, 等. 基于光纤传感的输电线路悬垂绝缘子风偏角监测研究[J]. 电子测量与仪器学报, 2020, 34(3): 81-87.
Zhou Zhan, Zhang Zhikun, Zhao Zhengang, et al. Monitoring of wind deflection angle of suspension insulator string for power lines based on optical fiber sensing[J]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation, 2020, 34(3): 81-87.
- [3] Wang J, Xiong X, Li Z, et al. Wind forecast-based probabilistic early warning method of wind swing discharge for OHTLs[J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 2016, 31(5): 2169-2178.
- [4] 邵天晓. 架空送电线路的电线力学计算[M]. 1 版. 北京: 水利电力出版社, 1987: 211-215.
Shao Tianxiao. Electric Wire Mechanics Calculation of Overhead Transmission Line[M]. 1st ed. Beijing: Water Resources and Electric Power Press, 1987: 211-215.
- [5] MATHESON M J, HOLMES J D. Simulation of the dynamic response of transmission lines in strong winds[J]. Engineering Structures, 1981, 3(2): 105-110.
- [6] Li X, Zhang W, Niu H W, et al. Probabilistic capacity assessment of single circuit transmission tower-line system subjected to strong winds[J]. Engineering Structures, 2018, 175: 517-530.
- [7] 刘小会, 张路飞, 陈世民, 等. 连续档导线动刚度计算及模型简化[J]. 振动工程学报, 2016, 29(4): 720-729.
Liu Xiaohui, Zhang Lufei, Chen Shimin, et al. The calculation for dynamic stiffness and simplified model of continuous span conductors[J]. Journal of Vibration Engineering, 2016, 29(4): 720-729.
- [8] Hung P V, Yamaguchi H, Isozaki M, et al. Large amplitude vibrations of long-span transmission lines with

- bundled conductors in gusty wind[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2014, 126: 48-59.
- [9] 朱宽军, 徐鸿. 考虑风速时空分布特性的高压输电塔—线体系风致响应分析研究[J]. 中国电机工程学报, 2019, 39(8): 2348-2356.
- Zhu Kuanjun, Xu Hong. Analysis on wind-induced responses of high voltage tower-line system considering the spatial-temporal distribution characteristics of wind speed[J]. Proceedings of the CSEE, 2019, 39(8): 2348-2356.
- [10] 楼文娟, 罗罡, 杨晓辉, 等. 输电线路动态风偏响应特性及频域计算方法[J]. 高电压技术, 2017, 43(5): 1493-1499.
- LOU Wenjuan, LUO Gang, YANG Xiaohui, et al. Response characteristics and frequency-domain calculation method of dynamic wind-induced deflection of transmission lines[J]. High Voltage Engineering, 2017, 43(5): 1493-1499.
- [11] 胡鑫, 王璋奇, 杨文刚. 连续档架空线路动态风偏的多刚体模型[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2020, 51(12): 3465-3474.
- Hu Xin, Wang Zhangqi, Yang Wengang. Multi-rigid-body model of dynamic wind-induced deflection for overhead transmission lines[J]. Journal of Central South University (Science and Technology), 2020, 51(12): 3465-3474.
- [12] Hu X, Wang Z, Tian R. Calculation of the dynamic wind-induced deflection response of overhead lines: establishment and analysis of the multi-rigid-body model[J]. IEEE Access, 2020, 8: 180883-180895.
- [13] 国家电力公司东北电力设计院. 电力工程高压送电线路设计手册[M]. 2版. 北京: 中国电力出版社, 2003: 103-327.
- Northeast Electric Power Design Institute of National Electric Power Corporation. Design Manual of High Voltage Transmission Lines for Electric Engineering[M]. 2nd ed. Beijing: China Electric Power Press, 2003: 103-327.
- [14] 郭应龙, 李国兴, 尤传永. 输电线路舞动[M]. 1版. 北京: 中国电力出版社, 2003: 139-151.
- Guo Yinglong, Li Guoxing, You Chuanyong. Galloping of Transmission Line[M]. 1st ed. Beijing: China Electric Power Press, 2003: 139-151.
- [15] 楼文娟, 杨悦, 吕中宾, 等. 考虑气动阻尼效应的输电线路风偏动态分析方法[J]. 振动与冲击, 2015, 34(6): 24-29.
- Lou Wenjuan, Yang Yue, Lü Zhongbin, et al. Wind-age yaw dynamic analysis methods for transmission lines considering aerodynamic damping effect[J]. Journal of Vibration and Shock, 2015, 34(6): 24-29.
- [16] Zhou A Q, Liu X J, Zhang S X, et al. Wind tunnel test of the influence of an interphase spacer on the galloping control of iced eight-bundled conductors[J]. Cold Regions Science and Technology, 2018, 155: 354-366.
- [17] Cui F, Liu X, Zhang S, et al. The impact of interphase spacers on galloping control of three-phase iced eight-bundled transmission lines: an experimental study[J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 2021, 36(1): 371-382.
- [18] Brand L. The Pi theorem of dimensional analysis[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1957, 1(1): 35-45.
- [19] Tu S, Ur Rehman S, Waqas M, et al. ModPSO-CNN: an evolutionary convolution neural network with application to visual recognition[J]. Soft Computing, 2021, 25: 2165-2176.
- [20] Kaimal J C, Wyngaard J C, Izumi Y, et al. Spectral characteristics of surface-layer turbulence[J]. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 1972, 98(417): 563-589.

Multi-rigid-body dynamic model and analysis for wind-induced deflection calculation of overhead lines

HU Xin, WANG Zhang-qi, TIAN Rui

(Hebei Key Laboratory of Electric Machinery Health Maintenance & Failure Prevention, North China Electric Power University, Baoding 071003, China)

Abstract: In order to accurately and efficiently calculate the dynamic wind-induced deflection displacement response of overhead lines, and further prevent the occurrence of wind-induced deflection flashover accidents, this paper considers the characteristics of the wind-induced deflection of the overhead lines and the relative movement of each insulator in the insulator string, multiples rigid rods and torsion springs are used to connect to each other to simulate overhead conductor. According to the mechanical relationship of wind-induced deflection and the principle of energy conservation, a multi-rigid-body model and dynamic equations of wind-induced deflection of overhead lines are established. A physical simulation model wind tunnel test is designed by dimensional analysis

and similarity theory to verify the accuracy of the multi-rigid-body model. Through numerical simulation analysis based on engineering examples, and comparing the calculation time of the multi-rigid-body model and the general software finite element model, the efficiency of the multi-rigid-body model is verified. The results show that the multi-rigid-body dynamic model of wind-induced deflection of overhead lines can show the wind-induced response law of each insulator string and each conductor. The calculation accuracy can meet the needs of engineering application, and the calculation efficiency is better than the finite element model.

Key words: overhead lines; wind-induced deflection displacement response; multi-rigid-body dynamic model; wind tunnel test; numerical simulation

作者简介: 胡 鑫(1987—),男,博士研究生。电话:(0312)7525434;E-mail: hill_ddhx@foxmail.com。

通讯作者: 王璋奇(1964—),男,博士,教授。电话:(0312)7525453;E-mail: wangzq2093@163.com。

附录

$$\mathbf{A}_i^{(*)} = \begin{bmatrix} B_i^{(*)}(1) & \cdots & C_i^{(*)}(1, n_{li}) \\ \vdots & & \vdots \\ A_i^{(*)}(n_{li}, 1) & \cdots & B_i^{(*)}(n_{li}) \end{bmatrix} \quad (\text{A1})$$

$$\mathbf{A}_i^k = \begin{bmatrix} B_i^k(1) & & \\ & \ddots & \\ & & K_i^G(0) + B_i^k(n_{li}) + \\ & & & K_{i-1}^G(n_{i-1}) \end{bmatrix} \quad (\text{A2})$$

$$\mathbf{I}_{i+1}^{(*)} = \begin{bmatrix} I_{i+1}^{(*)}(1, 1) & \cdots & I_{i+1}^{(*)}(1, n_{li+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ I_{i+1}^{(*)}(n_{li}, 1) & \cdots & I_{i+1}^{(*)}(n_{li}, n_{li+1}) \end{bmatrix} \quad (\text{A3})$$

$$\mathbf{H}_{i-1}^{(*)} = \begin{bmatrix} H_{i-1}^{(*)}(1, 1) & \cdots & H_{i-1}^{(*)}(1, n_{li-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ H_{i-1}^{(*)}(n_{li}, 1) & \cdots & H_{i-1}^{(*)}(n_{li}, n_{li-1}) \end{bmatrix} \quad (\text{A4})$$

$$\mathbf{J}_i^k = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad \cdots \quad -K_i^G(0)/l_i]^T \quad (\text{A5})$$

$$\mathbf{N}_i^k = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad \cdots \quad -K_{i-1}^G(n_{i-1})/l_i]^T \quad (\text{A6})$$

式中 $(*) = m, c$ 。

$$A_i^m(j, r) = \left\{ m_{li} \left(\frac{1}{2} + n_{li} - j \right) + \frac{mL_{i-1}}{n_{i-1}} \sum_{k=1}^{n_{i-1}} \left[\frac{x_{i-1}^c(k)}{L_{i-1}} \right]^2 + \frac{mL_i}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \left[1 - \frac{x_i^c(k)}{L_i} \right]^2 \right\} l_i \cos [\bar{\theta}_i(r) - \bar{\theta}_i(j)] \quad (\text{A7})$$

$$B_i^m(j) = \left\{ m_{li} \left(\frac{1}{4} + n_{li} - j \right) + \frac{mL_{i-1}}{n_{i-1}} \sum_{k=1}^{n_{i-1}} \left[\frac{x_{i-1}^c(k)}{L_{i-1}} \right]^2 + \frac{mL_i}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \left[1 - \frac{x_i^c(k)}{L_i} \right]^2 \right\} l_i \quad (\text{A8})$$

$$C_i^m(j, r) = \left\{ m_{li} \left(\frac{1}{2} + n_{li} - r \right) + \frac{mL_{i-1}}{n_{i-1}} \sum_{k=1}^{n_{i-1}} \left[\frac{x_{i-1}^c(k)}{L_{i-1}} \right]^2 + \frac{mL_i}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \left[1 - \frac{x_i^c(k)}{L_i} \right]^2 \right\} l_i \cos [\bar{\theta}_i(r) - \bar{\theta}_i(j)] \quad (\text{A9})$$

$$D_{i-1}^m(j, k) = \frac{mx_{i-1}^c(k)}{n_{i-1}} l_{i-1}^c(k) \cdot \cos [\bar{\theta}_i(j) - \bar{\varphi}_{i-1}] \quad (\text{A10})$$

$$E_i^m(j, k) = \frac{mL_i}{n_i} \left[1 - \frac{x_i^c(k)}{L_i} \right] l_i^c(k) \cos [\bar{\theta}_i(j) - \bar{\varphi}_i] \quad (\text{A11})$$

$$H_{i-1}^m(j, r) = \frac{mL_{i-1}}{n_{i-1}} l_i \left\{ \left[1 - \frac{x_{i-1}^c(k)}{L_{i-1}} \right] \frac{x_{i-1}^c(k)}{L_{i-1}} \cos [\bar{\theta}_i(j) - \bar{\theta}_{i-1}(r)] \right\} \quad (\text{A12})$$

$$I_{i+1}^m(j, r) = \frac{mL_i}{n_i} l_i \left\{ \left[1 - \frac{x_i^c(k)}{L_i} \right] \frac{x_i^c(k)}{L_i} \cos [\bar{\theta}_i(j) - \bar{\theta}_{i+1}(r)] \right\} \quad (\text{A13})$$

$$A_i^c(j, r) = l_i \left\{ \phi \bar{V}_i(n_{li} - j + 1) + \frac{\bar{V}_i L_i}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \left[1 - \frac{x_i^c(k)}{L_i} \right]^2 + \frac{\bar{V}_i L_{i-1}}{n_{i-1}} \sum_{k=1}^{n_{i-1}} \left[\frac{x_{i-1}^c(k)}{L_{i-1}} \right]^2 \right\} \cdot [2 \cos \bar{\theta}_i(r) \cos \bar{\theta}_i(j) + \sin \bar{\theta}_i(r) \sin \bar{\theta}_i(j)] \quad (\text{A14})$$

$$B_i^c(j) = \left\{ \phi \bar{V}_i \left(\frac{1}{2} + n_{li} - j \right) + \frac{\bar{V} \phi L_i}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \left[1 - \frac{x_i^c(k)}{L_i} \right]^2 + \frac{\bar{V} \phi L_{i-1}}{n_{i-1}} \sum_{k=1}^{n_{i-1}} \left[\frac{x_{i-1}^c(k)}{L_{i-1}} \right]^2 \right\} \cdot l_i [\cos^2 \bar{\theta}_i(j) + 1] \quad (\text{A15})$$

$$C_i^c(j, r) = l_i \left\{ \phi \bar{V}_i \left(\frac{1}{2} + n_{li} - r \right) + \frac{\bar{V} \phi L_i}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \left[1 - \frac{x_i^c(k)}{L_i} \right]^2 + \frac{\bar{V} \phi L_{i-1}}{n_{i-1}} \sum_{k=1}^{n_{i-1}} \left[\frac{x_{i-1}^c(k)}{L_{i-1}} \right]^2 \right\} \cdot [2 \cos \bar{\theta}_i(j) \cos \bar{\theta}_i(r) + \sin \bar{\theta}_i(j) \sin \bar{\theta}_i(r)] \quad (\text{A16})$$

$$D_{i-1}^c(j, k) = \frac{\phi \bar{V} x_{i-1}^c(k)}{n_{i-1}} l_{i-1}^c(k) [2 \cos \bar{\theta}_i(j) \cos \bar{\varphi}_{i-1} + \sin \bar{\theta}_i(j) \sin \bar{\varphi}_{i-1}] \quad (\text{A17})$$

$$E_i^c(j, k) = \frac{\phi \bar{V} L_i l_i^c(k)}{n_i} \left(1 - \frac{x_i^c(k)}{L_i} \right) [2 \cos \bar{\varphi}_i \cos \bar{\theta}_i(j) + \sin \bar{\varphi}_i \sin \bar{\theta}_i(j)] \quad (\text{A18})$$

$$H_{i-1}^c(j, r) = \frac{\phi \bar{V} L_{i-1}}{n_{i-1}} l_i [2 \cos \bar{\theta}_i(j) \cos \bar{\theta}_{i-1}(r) + \sin \bar{\theta}_i(j) \sin \bar{\theta}_{i-1}(r)] \sum_{k=1}^{n_{i-1}} \frac{x_{i-1}^c(k)}{L_{i-1}} \left[1 - \frac{x_{i-1}^c(k)}{L_{i-1}} \right] \quad (\text{A19})$$

$$I_{i+1}^c(j, r) = \frac{\phi \bar{V} L_i}{n_i} l_i [2 \cos \bar{\theta}_i(j) \cos \bar{\theta}_{i+1}(r) + \sin \bar{\theta}_i(j) \sin \bar{\theta}_{i+1}(r)] \sum_{k=1}^{n_i} \frac{x_i^c(k)}{L_i} \left[1 - \frac{x_i^c(k)}{L_i} \right] \quad (\text{A20})$$

$$B_i^k(j) = \frac{1}{\cos \bar{\theta}_i(j)} \left\{ \left(\frac{1}{2} + n_{li} - j \right) m_{li} g + \frac{mg L_{i-1}}{n_{i-1}} \sum_{k=1}^{n_{i-1}} \frac{x_{i-1}^c(k)}{L_{i-1}} + \frac{mg L_i}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \left[1 - \frac{x_i^c(k)}{L_i} \right] \right\} \quad (\text{A21})$$

$$O_i^m(k) = \frac{m L_i}{n_i} \{ [l_i^c(k)]^2 + [\rho_i^c(k)]^2 \} \quad (\text{A22})$$

$$P_i^m(j, k) = \frac{m l_i L_i}{n_i} \left[1 - \frac{x_i^c(k)}{L_i} \right] l_i^c(k) \cos [\bar{\theta}_i(j) - \bar{\varphi}_i] \quad (\text{A23})$$

$$Q_i^m(j, k) = \frac{m l_i x_i^c(k)}{n_i} l_i^c(k) \cos [\bar{\theta}_{i+1}(j) - \bar{\varphi}_i] \quad (\text{A24})$$

$$O_i^c(k) = \frac{\phi \bar{V} L_i}{n_i} [l_i^c(k)]^2 (\cos^2 \bar{\varphi}_i + 1) \quad (\text{A25})$$

$$P_i^c(j, k) = \frac{\phi \bar{V} L_i l_i l_i^c(k)}{n_i} \left[1 - \frac{x_i^c(k)}{L_i} \right] [2 \cos \bar{\theta}_i(j) \cos \bar{\varphi}_i + \sin \bar{\theta}_i(j) \sin \bar{\varphi}_i] \quad (\text{A26})$$

$$Q_i^c(j, k) = \frac{\phi \bar{V} l_i l_i^c(k) x_i^c(k)}{n_i} [2 \cos \bar{\theta}_{i+1}(j) \cos \bar{\varphi}_i + \sin \bar{\theta}_{i+1}(j) \sin \bar{\varphi}_i] \quad (\text{A27})$$

$$O_i^k(k) = \frac{mg L_i}{n_i \cos \bar{\varphi}_i} l_i^c(k) + \frac{K_i^E(k) \Delta S_i(k) \cdot [l_i^r(k)]^2}{S_i^f(k)} + \frac{\sigma_0 [l_i^r(k)]^2}{x_i^c(k+1) - x_i^c(k)} + K_i^G(k) + \frac{K_i^E(k-1) \cdot \Delta S_i(k-1) [l_i^r(k)]^2}{S_i^f(k-1)} + \frac{\sigma_0 [l_i^r(k)]^2}{x_i^c(k) - x_i^c(k-1)} + K_i^G(k-1) \quad (\text{A28})$$

$$R_i^k(k-1) = -K_i^G(k-1) - \frac{K_i^E(k-1) \cdot \Delta S_i(k-1) l_i^r(k) l_i^r(k-1)}{S_i^f(k-1)} - \frac{\sigma_0 l_i^r(k) l_i^r(k-1)}{x_i^c(k) - x_i^c(k-1)} \quad (\text{A29})$$

$$S_i^k(k+1) = -K_i^G(k) - \frac{K_i^E(k) \Delta S_i(k) \cdot l_i^r(k) l_i^r(k+1)}{S_i^f(k)} - \frac{\sigma_0 l_i^r(k) l_i^r(k+1)}{x_i^c(k+1) - x_i^c(k)} \quad (\text{A30})$$

$$F_i^c(k) = \frac{2 \phi \bar{V} L_i l_i^c(k)}{n_i} V_i^*(k) \cos \bar{\varphi}_i \quad (\text{A31})$$

$$F_i^w(j) = \left[\phi (n_{li} - j + 1) \cdot 2 \bar{V}_i V_{li}^* + \frac{2 \bar{V} \phi L_i}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \left(1 - \frac{x_i^c(k)}{L_i} \right) V_i^*(k) + \frac{2 \bar{V} \phi L_{i-1}}{n_{i-1}} \sum_{k=1}^{n_{i-1}} \frac{x_{i-1}^c(k)}{L_{i-1}} V_{i-1}^*(k) \right] \cos \bar{\theta}_i(j) \quad (\text{A32})$$