位移激励下含负刚度的惯容减振系统参数优化解析研究

王 珏[1],张 莹[1],黄 愫[2],叶会然[1],周 叮[3]

(1. 河海大学机电工程学院,江苏 常州 213022;2. 上汽大众汽车有限公司,上海 310000;
3. 南京工业大学土木工程学院,江苏 南京 211816)

摘要: 为抑制位移激励下主结构的振动,提出了三种含有负刚度的惯容减振系统(N-ISD),推导了各系统分别在H_∞和H_2优化准则下设计参数的解析解,探究了不同形式N-ISD系统振动控制的特点。建立位移激励下减振系统的动力学方程,得到结构的传递函数。针对简谐位移激励下的振动幅值,采用固定点理论推导了以H_∞范数为优化准则的设计参数解析解;针对随机激励下位移均方值,采用极值理论推导了以H_2范数为优化准则的设计参数解析解。通过与基于遗传算法的数值优化解对比,验证了上述最优设计参数解析解的有效性及优越性。对最优状态下的减振系统进行减振效果分析,结果表明:负刚度的引入能有效降低主结构的振幅放大因子和均方值,简谐激励下N-SPIS-Ⅱ型惯容系统反共振峰值更低,共振峰值间距更大,减振效果及稳定性更好;随机激励下N-SPIS-Ⅰ和N-SPIS-Ⅱ型惯容系统位移均方值均小于N-SIS型惯容系统,表现出更好的减振性能。

关键词: 惯容减振;位移激励;随机激励;负刚度;H_∞优化;H_2优化

中图分类号: TB535;TU352.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2023)03-0804-11

DOI:10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2023.03.023

引 言

随着人们对结构安全性、舒适性要求的提高,结构振动控制已经成为机械和土木工程界的核心问题之一。作用在减振结构上常见的外部激励有源自机械振动引起的激振力,源自地震引起的加速度激振,源自地面或轨道不平顺引起的底部位移激励等。动力吸振器(Dynamic Vibration Absorber,DVA)可以通过大量消耗这些外部激励作用在结构上产生的能量,实现对主结构振动的被动控制。Den Hartog[1]提出了在弹簧-质量吸振器上加入阻尼元件的调谐质量阻尼器(Tuned Mass Damper,TMD),进一步降低了主结构的振幅且拓宽了减振频带,同时提出了力激振下TMD减振结构H_∞优化的固定点理论。Warburton[2]提出了随机白噪声激励下TMD减振结构基于H_2优化的设计参数解析解。在此基础上,由弹簧、阻尼器和质量元件构成的不同形式的DVA得到了发展,如将阻尼元件替换为黏弹性元件的三要素型DVA[3],将阻尼器接到固定结构上的接地式DVA[4]等。由于主结构在力激励、底部位移激励的情况下,参数优化设计并不等价[5],因此研究者们对不同振源下含TMD的结构开展了H_∞或H_2优化准则下设计参数的解析或数值求解,取得了丰硕的成果[6-8]。尽管这些TMD型动力吸振器都获得了不错的减振效果,但是为达到较好的减振效果,一般需要较大的附加质量,再加上质量块的单端点特性,使得其在结构中的安装受到限制。

与传统的质量块不同,最早用于赛车减振中的惯容器是一种双端点机械元件[9],它可将质量块的直线运动等效为惯容器中飞轮的旋转运动,从而用很小的物理质量实现了千倍级参振质量的动力特性[10],因而惯容-弹簧-阻尼(Inerter-Spring-Damper,ISD)减振系统得到了关注和发展[11-12]。Hu等[13]推导了三种典型的惯容系统(混联Ⅰ型惯容系统(Series-Parallel-Ⅰ Inerter System,SPIS-Ⅰ)、混联Ⅱ型惯容系统(SPIS-Ⅱ)和串联型惯容系统(Series Inerter System,SIS)在H_∞或H_2优化准则下的设计参数解析解。李壮壮等[14]、隋鹏等[15]提出了含有不同结构形式的ISD减振系统,并基于固定点理论推

收稿日期: 2022-05-07;**修订日期:** 2022-09-23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(52178474,51978336);河海大学优秀硕士学位论文培育项目(1091422003521);江苏省自然科学基金资助项目(BK20221233);中央高校基本业务费资助项目(B210202127);常州市科技计划项目(CJ20210138);江苏省研究生科研与实践创新计划项目(SJCX22_0168)。

导了集中力激振下主结构在H_∞优化下的解析解，取得了很好的减振效果。潘超等[16]、Pan等[17-18]提出了含不同ISD减振系统的单自由度及多自由度动力学模型，基于数值优化法求解了地震激励下主结构在H_2优化下的数值解，并拟合成了适用于工程的经验公式。文永奎等[19]、陈政清等[20]采用不同的数值优化算法提出了将多个并联惯容系统用于单自由减振的H_∞优化，以及将两类典型惯容系统用于桥梁减震的H_2优化。因此，惯容减振系统为工程减振(震)提供了更大的发展空间。

除了惯容，负刚度装置也因具有较大的承载能力、能在一定条件下降低系统的固有频率[21]等特点，成为了近年来的研究热点。与传统正刚度元件不同，负刚度元件的荷载变化量与变形量方向相反，表现为对结构的推力，从而辅助系统的运动。Wang等[22]系统地比较和评估了分别含惯容和含负刚度的减振系统在基于H_∞优化下对主结构的能量耗散能力和在地震动下的抗震性能。刘海平等[23]利用序列二次规划算法提出了简谐力激振下一种非接地负刚度动力吸振器H_∞优化设计的数值解。邢昭阳等[24]将放大机构应用于含负刚度弹簧元件的动力吸振器，基于H_∞优化推导出了力激励下的解析解。近期，范舒铜等[25]基于Maxwell模型，提出了一种含有惯容和接地负刚度的动力吸振器，推导了力激励下基于H_∞优化的解析解。Baduidana等[26]对含负刚度的混联I型惯容系统的最优参数进行了推导，证明了含有负刚度元件的惯容减振模型会表现出更好的减振性能。Islam等[27]利用固定点理论推导了加速度激励下含负刚度的惯容减振系统在H_∞优化下的设计参数，并验证了含该参数减振系统的结构在地震响应下的减振效果。由此可见，将惯容和负刚度联合应用具有令人满意的减振效果，可为研究人员提供一种思路，为工程应用提供一种有益的选择。

含有负刚度的惯容减振系统的研究仍处于初步阶段，近期文献主要针对主结构受力激振或者加速度激振下的减振问题，且大多基于H_∞准则进行参数优化。但是对于一些由地面或轨道不平顺引起的结构振动问题，从简谐位移激励和随机位移激励两方面对含负刚度的惯容减振系统分别基于H_∞和H_2准则进行参数优化，得到便于工程应用的设计参数解析解十分有必要，但目前这方面的研究较少。因此，本文将负刚度元件引入三种典型的SPIS-Ⅰ，SPIS-Ⅱ和SIS型惯容减振系统，提出了三种N-ISD减振系统。求解了简谐位移激励下的主结构幅频函数以及随机激励下的主结构位移均方值，分别基于H_∞优化和H_2优化准则推导了三种N-ISD减振系统相应的最优设计参数解析表达式，并与基于遗传算法的数值最优解进行了对比验证，最后通过算例分析评价了三个N-ISD系统的减振效果。

1　动力学建模及求解

本文将负刚度元件k_n与惯容元件并联，提出了三种典型的含负刚度的混联Ⅰ型惯容系统N-SPIS-Ⅰ(如图1(a)所示)，含负刚度的混联Ⅱ型惯容系统N-SPIS-Ⅱ(如图1(b)所示)以及含负刚度的串联型惯容系统N-SIS(如图1(c)所示)。其中，m为主结构的质量；b为惯容系数；c为阻尼系数；k，k_1和k_n分别为主结构刚度系数、惯容系统刚度系数和负刚度系数；x_1为主结构位移；x_2和x_3分别为弹簧-阻尼-惯容三种元件间的端点位移。当$k_n=0$时可退化为典型的SPIS-Ⅰ，SPIS-Ⅱ和SIS型惯容减振系统。

当主结构在地面位移激励$u(t)$作用下，根据达朗贝尔原理可建立上述三种含有负刚度的惯容减振系统的主结构运动控制方程如下：

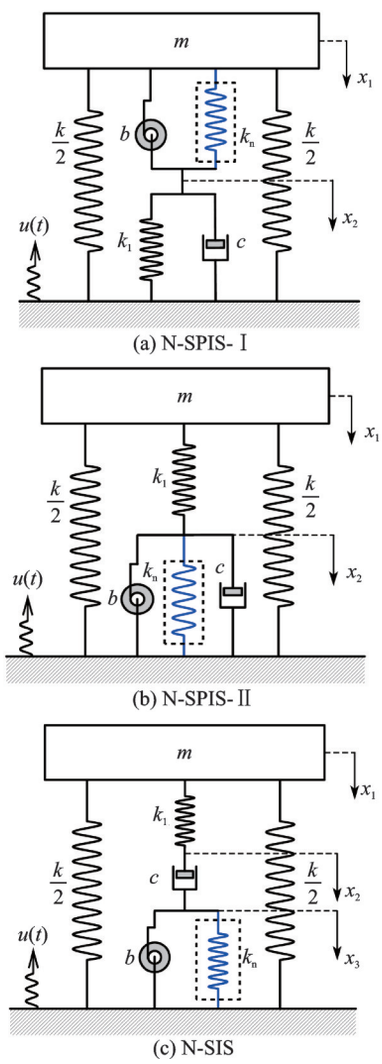

图1　含负刚度的典型惯容减振系统

Fig. 1　Typical inerter-spring-damper with negative stiffness systems

N-SPIS-Ⅰ系统：

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1+k(x_1-u)+b(\ddot{x}_1-\ddot{x}_2)+k_n(x_1-x_2)=0 \\ b(\ddot{x}_2-\ddot{x}_1)+k_n(x_2-x_1)+k_1(x_2-u)+c(\dot{x}_2-\dot{u})=0 \end{cases} \tag{1a}$$

N-SPIS-Ⅱ系统：

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1+k(x_1-u)+k_1(x_1-x_2)=0 \\ b(\ddot{x}_2-\ddot{u})+k_1(x_2-x_1)+k_n(x_2-u)+c(\dot{x}_2-\dot{u})=0 \end{cases} \tag{1b}$$

N-SIS系统：

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1+k(x_1-u)+k_1(x_1-x_2)=0 \\ k_1(x_2-x_1)+c(\dot{x}_2-\dot{x}_3)=0 \\ c(\dot{x}_3-\dot{x}_2)+b(\ddot{x}_3-\ddot{u})+k_n(x_3-u)=0 \end{cases} \tag{1c}$$

引入下列参数：惯质比 $\delta=b/m$；刚度比 $\alpha=k_1/k$；负刚度比 $\kappa=k_n/k$；固有频率 $\omega_0=\sqrt{k/m}$；阻尼比 $\xi=c/(2m\omega_0)$；频率比 $\lambda=\omega/\omega_0$。代入式(1a)～(1c)所述运动学方程后进行拉普拉斯变换，得到主结构的传递函数为：

$$H_i(s)=\frac{X_{1\text{-}i}}{U}=\frac{N_{3\text{-}i}s^3+N_{2\text{-}i}s^2+N_{1\text{-}i}s+N_{0\text{-}i}}{D_{5\text{-}i}s^5+D_{4\text{-}i}s^4+D_{3\text{-}i}s^3+D_{2\text{-}i}s^2+D_{1\text{-}i}s+D_{0\text{-}i}} \tag{2}$$

式中 $X_{1\text{-}i}$为主结构的振幅；U为地面位移激励的振幅；$s=\mathrm{j}\lambda$，其中虚数$\mathrm{j}=\sqrt{-1}$；$i=1,2,3$分别表示含负刚度的N-SPIS-Ⅰ，N-SPIS-Ⅱ和N-SIS型减振系统。各系统中传递函数的系数表达式如下：

$$\begin{cases} N_{0\text{-}1}=\alpha+\kappa+\alpha\kappa \\ N_{1\text{-}1}=2(1+\kappa)\xi \\ N_{2\text{-}1}=\delta(1+\alpha) \\ N_{3\text{-}1}=2\delta\xi \end{cases},\quad \begin{cases} N_{0\text{-}2}=\alpha+\kappa+\alpha\kappa \\ N_{1\text{-}2}=2(1+\alpha)\xi \\ N_{2\text{-}2}=\delta(1+\alpha) \\ N_{3\text{-}2}=0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} N_{0\text{-}3}=\alpha\kappa \\ N_{1\text{-}3}=2(\alpha+\kappa+\alpha\kappa)\xi \\ N_{2\text{-}3}=\alpha\delta \\ N_{3\text{-}3}=2\delta(1+\alpha)\xi \end{cases} \tag{3a}$$

$$\begin{cases} D_{0\text{-}1}=\alpha+\kappa+\alpha\kappa \\ D_{1\text{-}1}=2(1+\kappa)\xi \\ D_{2\text{-}1}=\alpha+\delta+\alpha\delta+\kappa \\ D_{3\text{-}1}=2(1+\delta)\xi \\ D_{4\text{-}1}=\delta \\ D_{5\text{-}1}=0 \end{cases},\quad \begin{cases} D_{0\text{-}2}=\alpha+\kappa+\alpha\kappa \\ D_{1\text{-}2}=2(1+\alpha)\xi \\ D_{2\text{-}2}=\alpha+\delta+\alpha\delta+\kappa \\ D_{3\text{-}2}=2\xi \\ D_{4\text{-}2}=\delta \\ D_{5\text{-}2}=0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} D_{0\text{-}3}=\alpha\kappa \\ D_{1\text{-}3}=2(\alpha+\kappa+\alpha\kappa)\xi \\ D_{2\text{-}3}=\alpha(\delta+\kappa) \\ D_{3\text{-}3}=2(\alpha+\delta+\alpha\delta+\kappa)\xi \\ D_{4\text{-}3}=\alpha\delta \\ D_{5\text{-}3}=2\delta\xi \end{cases} \tag{3b}$$

2 参数优化

2.1 基于H_∞准则的参数优化

根据三种含负刚度的惯容减振系统的主结构传递函数，定义其振幅放大因子$G_i=|H_i(s)|$，则N-SPIS-Ⅰ，N-SPIS-Ⅱ，N-SIS型减振系统的振幅放大因子均可整理为如下形式：

$$G_i=|H_i(s)|=\sqrt{\frac{A_i^2+B_i^2\xi^2}{C_i^2+D_i^2\xi^2}},\ i=1,2,3 \tag{4}$$

式中 振幅放大因子中的相关系数表达式分别为：

$$\begin{cases} A_1=\alpha+\kappa+\alpha\kappa-(1+\alpha)\delta\lambda^2 \\ B_1=2\lambda(1+\kappa-\delta\lambda^2) \\ C_1=\alpha+\kappa+\alpha\kappa-(\alpha+\delta+\alpha\delta+\kappa)\lambda^2+\delta\lambda^4 \\ D_1=2\lambda[1+\kappa-(1+\delta)\lambda^2] \end{cases} \tag{5a}$$

$$\begin{cases} A_2=\alpha+\kappa+\alpha\kappa-(1+\alpha)\delta\lambda^2 \\ B_2=2\lambda(1+\alpha) \\ C_2=\alpha+\kappa+\alpha\kappa-(\alpha+\delta+\alpha\delta+\kappa)\lambda^2+\delta\lambda^4 \\ D_2=2\lambda(1+\alpha-\lambda^2) \end{cases} \tag{5b}$$

$$\begin{cases} A_3=-\alpha(\kappa-\delta\lambda^2) \\ B_3=-2\lambda[\alpha+\kappa+\alpha\kappa-(1+\alpha)\delta\lambda^2] \\ C_3=\alpha(\lambda^2-1)(\kappa-\delta\lambda^2) \\ D_3=-2\lambda[\alpha+\kappa+\alpha\kappa-(\alpha+\delta+\alpha\delta+\kappa)\lambda^2+\delta\lambda^4] \end{cases} \tag{5c}$$

简谐位移激励下基于H_∞范数的优化目标是使主结构的最大振幅放大系数最小，即$G_{i\max}$最小。下面以N-SPIS-Ⅱ型惯容系统为例，简述其参数优化过程。根据已推导出的N-SPIS-Ⅱ型惯容系统的振幅放大因子，可绘制出N-SPIS-Ⅱ型惯容系统的幅频曲线如图2所示。当阻尼比ξ取不同值时，曲线均通过两个与阻尼比ξ无关的定点P和Q(假定$\lambda_P<$

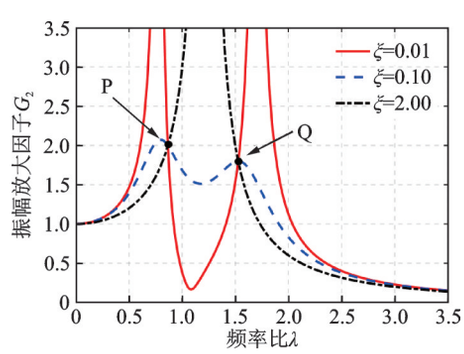

图2 N-SPIS-Ⅱ型惯容减振系统幅频曲线($\delta=0.2$，$\alpha=0.5$，$\kappa=-0.1$)

Fig. 2 Amplitude-frequency curves of the N-SPIS-Ⅱ system ($\delta=0.2$，$\alpha=0.5$，$\kappa=-0.1$)

λ_Q)。因此，根据固定点理论，将P，Q两点调整到同一高度并使得这两点处于曲线最大位置，即可得到系统H_∞优化下的设计参数。

由于定点P和Q与阻尼比ξ的取值无关，根据固定点理论，要使这两点等高，只需使这两点在阻尼比$\xi\to 0$和$\xi\to\infty$时的响应值相等，即：

$$\left|\frac{A_2}{C_2}\right|=\left|\frac{B_2}{D_2}\right| \tag{6}$$

考虑到定点间的相位相反，上式可变形为：

$$\frac{1+\alpha}{1+\alpha-\lambda^2}=-\frac{\alpha+\kappa+\alpha\kappa-(1+\alpha)\delta\lambda^2}{\alpha+\kappa+\alpha\kappa-(\alpha+\delta+\alpha\delta+\kappa)\lambda^2+\delta\lambda^4} \tag{7}$$

为简化计算，令$\lambda^2=\Omega$，则式(7)可化简为：

$$(1+\alpha-\Omega)\left[\alpha+\kappa+\alpha\kappa-\delta(1+\alpha)\Omega\right]+(1+\alpha)\left[\alpha+\kappa+\alpha\kappa-(\alpha+\delta+\alpha\delta+\kappa)\Omega+\Omega^2\delta\right]=0 \tag{8}$$

求解式(8)，即可求得P，Q两点的广义横坐标：

$$\Omega_P,\ \Omega_Q=\frac{\alpha^2(1+2\delta)+2\alpha(1+2\delta+\kappa)+2(\delta+\kappa)\mp\sqrt{\left[2(\delta+\kappa)+\alpha(2+\alpha+4\delta+2\alpha\delta+2\kappa)\right]^2-16\delta(\alpha+\kappa+\alpha\kappa)(1+\alpha)^2}}{4\delta(1+\alpha)} \tag{9}$$

要使P，Q两点等高，只需两点横坐标满足：

$$\frac{1+\alpha}{1+\alpha-\Omega_P}=-\frac{1+\alpha}{1+\alpha-\Omega_Q} \tag{10}$$

将式(9)代入式(10)，即可求出P，Q两点等高时的最优刚度比：

$$\alpha_{2opt}=\frac{1-2\delta+\kappa-\sqrt{1-2\delta+\kappa^2}}{2\delta-1} \tag{11}$$

定点等高后，若要使N-SPIS-Ⅱ型惯容系统的振幅放大因子最小，还需使P，Q两点处于幅频曲线的最大极值点。根据极值条件，只需P，Q两点处振幅放大因子的一阶偏导数都等于零，即：

$$\left.\frac{\partial G_2^2}{\partial\Omega}\right|_{\Omega=\Omega_P}=0,\ \left.\frac{\partial G_2^2}{\partial\Omega}\right|_{\Omega=\Omega_Q}=0 \tag{12}$$

将式(9)和式(11)代入上式，可直接求得P，Q两定点处所对应的阻尼比平方值ξ_P^2和ξ_Q^2。取二者均值的算术平方根为系统的最优阻尼比，则N-SPIS-Ⅱ型惯容减振系统的最优阻尼比为：

$$\xi_{2opt}=\sqrt{\frac{3\delta\left[1-\sqrt{1-2\delta+\kappa^2}+\delta\left(\kappa-2+\sqrt{1-2\delta+\kappa^2}\right)\right]}{4(2\delta-1)}} \tag{13}$$

将求得的最优刚度比和最优阻尼比的解析解代入振幅放大因子表达式，即可求得N-SPIS-Ⅱ型惯容减振系统固定点处对应的峰值为：

$$G_{2max}=\sqrt{\frac{\delta\left[1-\delta+\kappa^2-\kappa(1+\Delta_2)+\Delta_2\right]}{(\delta-\kappa)^2}} \tag{14a}$$

同理，可分别求得N-SPIS-Ⅰ和N-SIS型惯容减振系统固定点处对应的峰值如下：

$$G_{1max}=\frac{(2+\delta+2\kappa+2\delta\kappa-\kappa^2+\Delta_1)\sqrt{\delta(1+\delta)\left\{\kappa^2\left[2+\kappa(2+\kappa)\right]+\delta^2\left[5+4\kappa(2+\kappa)\right]-2\delta\left[-1+\kappa(1+\kappa)(1+2\kappa)\right]-\Delta_1\left(\delta+2\delta\kappa-\kappa^2\right)\right\}}}{4\sqrt{2}(1+\delta)(\delta-\kappa)^2(1+\kappa)} \tag{14b}$$

$$G_{3max}=\sqrt{\frac{\delta(2+\delta)}{(\delta-\kappa)^2}} \tag{14c}$$

含负刚度的N-SPIS-Ⅰ，N-SPIS-Ⅱ和N-SIS型惯容系统在上述最优振幅放大因子状态下对应的最优刚度比和最优阻尼比的解析解如表1所示。

2.2　基于H_2准则的参数优化

在实际工程中，系统受到的激励大多为随机激励。因此，有必要对上述三种惯容减振系统在随机激励下的响应进行讨论。假设主结构受功率谱密度为$S(\omega)=S_0$的白噪声位移激励。则三种减振系统的主结构位移均方值都可表示为：

$$E\left[x_{1-i}^2\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|H_i(s)\right|^2S_0\mathrm{d}\omega=\omega_0S_0\int_{-\infty}^{+\infty}\left|H_i(\mathrm{i}\lambda)\right|^2\mathrm{d}\lambda \tag{15}$$

无量纲化位移响应均方值，令：

$$\sigma_i^2=\frac{E\left[x_{1-i}^2\right]}{2\pi\omega_0S_0}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|H_i(\mathrm{i}\lambda)\right|^2\mathrm{d}\lambda \tag{16}$$

由留数定理可以得到各系统主结构的无量纲化位移均方值解析解如下：

表 1 H_∞准则下含负刚度惯容减振模型最优设计参数解析解

Tab. 1 Analytical solution of optimal design parameters of N-ISDs based on H_∞ optimization

模型	最优刚度比 $\alpha_{i\mathrm{opt}}$	最优阻尼比 $\xi_{i\mathrm{opt}}$
N-SPIS-Ⅰ	$\dfrac{2[1+\kappa(\delta-1)]+5\delta-\kappa^2-\Delta_1}{4(1+\delta)(1+\kappa)}$	$\sqrt{\dfrac{\delta(1+\delta)E(D_1+D_2)}{16(1+\kappa)}}$
N-SPIS-Ⅱ	$\dfrac{1-2\delta+\kappa-\Delta_2}{2\delta-1}$	$\sqrt{\dfrac{3\delta[1+\delta(\kappa-2+\Delta_2)-\Delta_2]}{4(2\delta-1)}}$
N-SIS	$\dfrac{2(\delta-\kappa)}{2+\kappa}$	$\sqrt{\dfrac{\delta(2+\delta)(\delta-\kappa)^2\{\kappa^2+2\delta[3+\kappa(3+\kappa)]\}}{[4\delta^2(2+\kappa)+2\delta(9+5\kappa)-\kappa^2][\kappa^2-2\delta(1+\kappa)]^2}}$

注:各模型优化参数解析解中相关变量符号的具体表达式见附录。

N-SPIS-Ⅰ系统:

$$\sigma_1^2=\frac{\delta^2+(1+\kappa)^2-\delta(1+2\kappa)}{(\delta-\kappa)^2}\xi+\frac{\alpha(-2+\delta-\kappa)(\delta-\kappa)+(\delta-\kappa)^2+\alpha^2(1+\kappa)}{4(\delta-\kappa)^2\xi} \tag{17a}$$

N-SPIS-Ⅱ系统:

$$\sigma_2^2=\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha^2}\xi+\frac{\alpha^3\delta^2+\alpha^2[1+3\delta^2+\kappa-2\delta(1+\kappa)]}{4\alpha^2\xi}+\frac{\alpha[3\delta^2+\kappa(2+\kappa)-2\delta(1+2\kappa)]+(\delta-\kappa)^2}{4\alpha^2\xi} \tag{17b}$$

N-SIS系统:

$$\sigma_3^2=\left[\frac{(1+\alpha)^2}{\alpha^2}+\frac{1+\delta}{(\delta-\kappa)^2}+\frac{2(1+\alpha)}{\alpha(-\delta+\kappa)}\right]\xi+\frac{1}{4\xi} \tag{17c}$$

随机激励下基于H_2范数的优化目标是使主结构响应曲线下的面积最小化,即主结构的位移均方值最小。同样以N-SPIS-Ⅱ型惯容系统为例,简述其参数优化过程。上述含负刚度的惯容减振系统的位移均方值表达式均可整理成如下形式:

$$\sigma_i^2=F_i(\alpha)\xi+\frac{G_i(\alpha)}{\xi} \tag{18}$$

可得N-SPIS-Ⅱ型惯容系统的最小位移均方值和最优阻尼比表达式如下:

$$\sigma_{2\min}^2=2\sqrt{F_2(\alpha)G_2(\alpha)} \tag{19}$$

$$\xi_{2\mathrm{opt}}=\sqrt{G_2(\alpha)/F_2(\alpha)} \tag{20}$$

二者均是关于刚度比的表达式,即要想求解位移均方值和阻尼比的最优解析解,只需求解出N-SPIS-Ⅱ型惯容系统在主结构位移均方值最小状态下对应的最优刚度比。根据极值理论,建立方程:

$$\frac{\partial\sigma_{2\min}^2}{\partial\alpha}=0 \tag{21}$$

整理得:

$$\alpha^4\delta^2+\alpha^2[-2-9\delta^2-\kappa(4+\kappa)+2\delta(3+4\kappa)]-\alpha^3\delta^2+\alpha(\delta-\kappa)(6-11\delta+5\kappa)-4(\delta-\kappa)^2=0 \tag{22}$$

解式(22)可得N-SPIS-Ⅱ型惯容系统的最优刚度比,则相应的最优阻尼比和最小位移均方值解析解分别为:

$$\xi_{2\mathrm{opt}}=\frac{\sqrt{\alpha^3\delta^2+(\delta-\kappa)^2+\alpha(\delta-\kappa)(-2+3\delta-\kappa)+\alpha^2[1+3\delta^2+\kappa-2\delta(1+\kappa)]}}{2(1+\alpha)} \tag{23}$$

$$\sigma_{2\min}^2=\sqrt{\frac{(1+\alpha)^2\{\alpha^3\delta^2+(\delta-\kappa)^2+\alpha(\delta-\kappa)(-2+3\delta-\kappa)+\alpha^2[1+3\delta^2+\kappa-2\delta(1+\kappa)]\}}{\alpha^4}} \tag{24a}$$

同理,可求N-SPIS-Ⅰ和N-SIS型惯容减振系统在H_2优化准则下的最小位移均方值解析解如下:

$$\sigma_{1\min}^2=\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{[\delta^2+\kappa^2-2\delta(2+\kappa)][\delta^2+(1+\kappa)^2-\delta(1+2\kappa)]}{(\delta-\kappa)^2(1+\kappa)}} \tag{24b}$$

$$\sigma_{3\min}^2=\sqrt{\frac{\delta}{(\delta-\kappa)^2}} \tag{24c}$$

表2为上述三种含负刚度的惯容减振系统在其位移均方值最小时对应的刚度比和阻尼比解析解。

3 算例验证

3.1 H_∞优化下解析解与数值解对比

为验证基于H_∞优化准则下含负刚度的三种惯

表 2　H_2准则下含负刚度的惯容减振模型最优设计参数解析解

Tab. 2　Analytical solution of optimal design parameters of N-ISDs based on H_2 optimization

模型	最优刚度比 $\alpha_{i\,\mathrm{opt}}$	最优阻尼比 $\xi_{i\mathrm{opt}}$
N-SPIS-Ⅰ	$\dfrac{(\delta-\kappa-2)(\delta-\kappa)}{-2(1+\kappa)}$	$\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{(\delta-\kappa)^2\left[-\delta^2+2\delta(2+\kappa)-\kappa^2\right]}{(1+\kappa)\left[\delta^2-\delta(1+2\kappa)+(1+\kappa)^2\right]}}$
N-SPIS-Ⅱ	$-4(\delta-\kappa)^2+\alpha(\delta-\kappa)(6-11\delta+5\kappa)-\alpha^2\left[9\delta^2-2\delta(3+4\kappa)+\kappa(4+\kappa)+2\right]-\alpha^3\delta^2+\alpha^4\delta^2=0$	$\dfrac{\{\alpha^2\left[3\delta^2-2\delta(1+\kappa)+\kappa+1\right]+\alpha(\delta-\kappa)(3\delta-\kappa-2)+\alpha^3\delta^2+(\delta-\kappa)^2\}^{\frac{1}{2}}}{2(1+\alpha)}$
N-SIS	$\dfrac{\delta-\kappa}{1-\delta+\kappa}$	$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(\delta-\kappa)^2}{\delta}}$

容减振系统最优参数解析解的正确性，采用遗传算法（Genetic Algorithm，GA）在优化目标 $\max\limits_{\delta,\kappa,\alpha,\xi}\left\{\max(G_i)\right\}$ 下，分别对 N-SPIS-Ⅰ，N-SPIS-Ⅱ和 N-SIS 型惯容系统的刚度比和阻尼比进行数值优化，并将数值优化结果与解析解进行对比，结果如图 3 和图 4 所示。遗传算法是一种通过模拟自然进化过程来寻找最优解的随机搜索算法。相比传统优化算法，其通用性更强，不需要辅助信息就能求出优化问题的最优解。与传统优化算法相比，其全局搜索能力更强，计算精度更高，具有较强的鲁棒性。对 N-SPIS-Ⅰ和 N-SPIS-Ⅱ型惯容系统，其最优刚度比和阻尼比的解析解与数值解几乎完全吻合，而 N-SIS 型减振系统在惯质比较小时，其解析解与优化数值解有一定的差异。为此，图 5 给出了三种含负刚度的惯容减振系统最优状态下其主结构振幅放大因子的解析结果和数值结果对比。从图 5(c)可以看出，对于 N-SIS 型惯容系统，在惯质比较小情况下，解析解获得的结果优于数值解。因此，基于 H_∞ 优化准则得出的解析解比基于遗传算法得到的数值解更加稳定，可避免 GA 优化算法在寻找最优解时可能存在的局部最优问题。

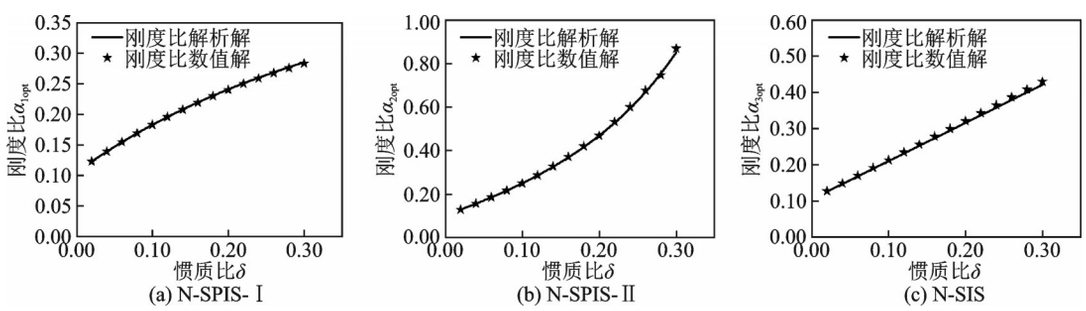

图 3　H_∞准则下含负刚度的惯容减振系统最优刚度比对比曲线

Fig. 3　Optimal stiffness ratio comparison curves of N-ISDs under H_∞ criterion

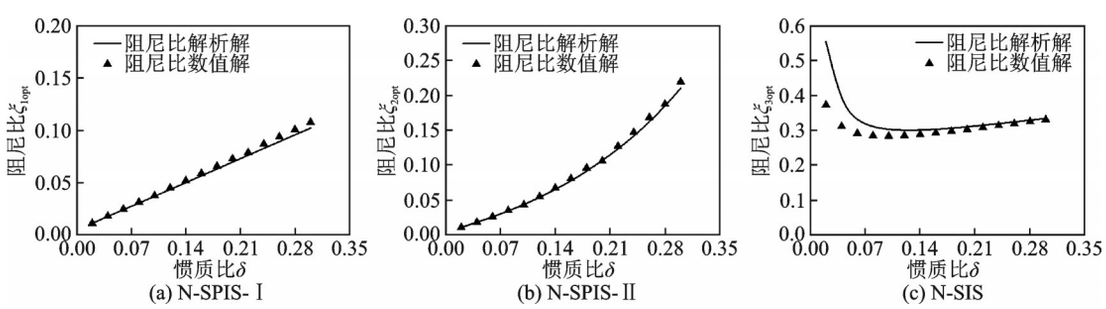

图 4　H_∞准则下含负刚度的惯容减振系统最优阻尼比对比曲线

Fig. 4　Optimal damping ratio comparison curves of N-ISDs under H_∞ criterion

3.2　H_2优化下解析解与数值解对比

为验证基于 H_2优化准则下含负刚度的三种惯容减振系统最优参数解析解的正确性，采用 GA 优化算法求解 N-SPIS-Ⅰ，N-SPIS-Ⅱ和 N-SIS 型惯容减振

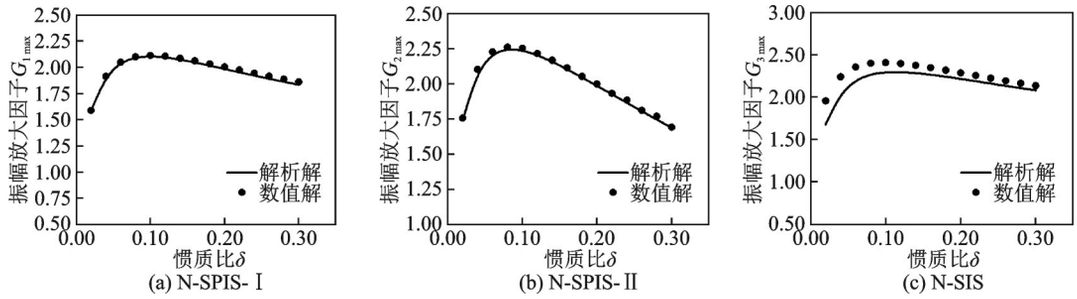

图5 位移激励下含负刚度的惯容减振系统最优振幅对比曲线

Fig. 5 Optimal amplitude comparison curves of N-ISDs under displacement excitation

系统在 $\min\limits_{\delta,\kappa,\alpha,\xi}\left\{\sigma_i^2\right\}$ 目标下的最优刚度比和阻尼比的数值解，其解析结果与数值优化结果的对比曲线如图6和图7所示。由图可知，N-SPIS-Ⅰ，N-SPIS-Ⅱ和N-SIS型减振系统在最优状态下，其最优刚度比和阻尼比的解析结果与数值优化结果一致，验证了基于H_2优化准则推导出的最优设计参数解析解的有效性。

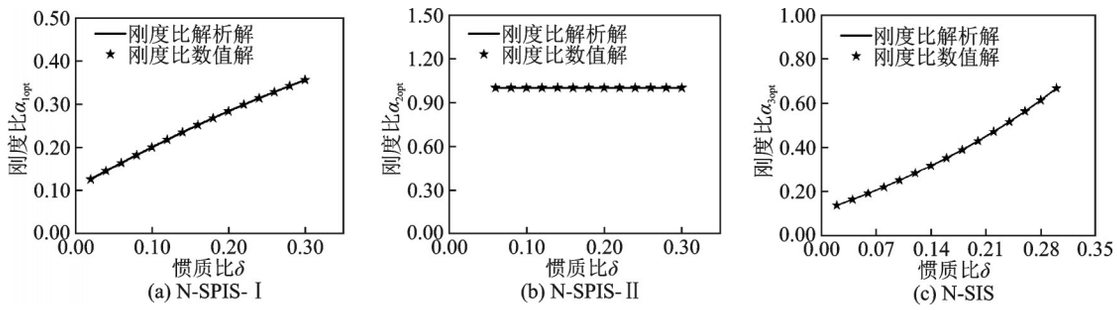

图6 H_2准则下含负刚度的惯容减振系统最优刚度比对比曲线

Fig. 6 Optimal stiffness ratio comparison curves of N-ISDs under H_2 criterion

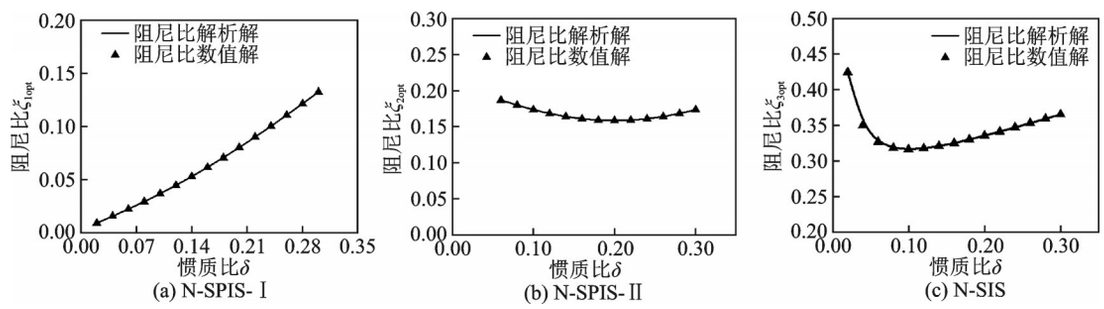

图7 H_2准则下含负刚度的惯容减振系统最优阻尼比对比曲线

Fig. 7 Optimal damping ratio comparison curves of N-ISDs under H_2 criterion

4 不同模型的减振效果评价

4.1 简谐位移激励下的减振效果评价

根据表1推导的三种含负刚度的惯容减振模型的最优刚度比和最优阻尼比解析解，可以得到N-SPIS-Ⅰ，N-SPIS-Ⅱ和N-SIS型惯容减振系统各自处于最优状态下的幅频曲线。图8为选取惯质比$\delta=0.2$和负刚度比$\kappa=-0.1$时，不含负刚度和含有负刚度的三种典型惯容减振系统的幅频曲线对比。从图8中同种颜色的虚线和实线对比可知：含有负刚度的N-SPIS-Ⅰ，N-SPIS-Ⅱ，N-SIS型惯容减振系统的振幅放大因子均低于不含负刚度的SPIS-Ⅰ，SPIS-Ⅱ和SIS型惯容减振系统，说明负刚度的增加可以有效降低惯容减振系统主结构的幅值。另外，从图8中不同种颜色的实线对比可知：相比N-SPIS-Ⅰ和N-SIS型惯容减振系统，N-SPIS-Ⅱ型惯容减振系统的反共振峰值更低，共振峰值的间距更大。因此，简谐位移激励下N-SPIS-Ⅱ型惯容系统的减振效果及稳定性更好。

4.2 随机激励下的减振效果评价

图9分别给出了N-SPIS-Ⅰ，N-SPIS-Ⅱ和N-SIS型惯容减振系统主结构的位移均方值随刚度比、阻尼比的变化曲面。由图9(a)和9(c)可知，对于N-SPIS-Ⅰ和N-SIS型惯容系统，位移均方值与

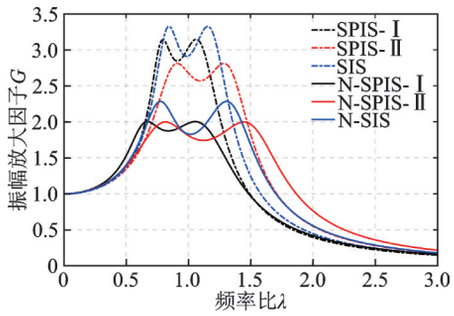

图 8　三种 N-ISD 系统和三种 ISD 系统振幅放大因子对比曲线

Fig. 8　Comparison of amplitude-frequency curves between three N-ISD systems and three ISD systems

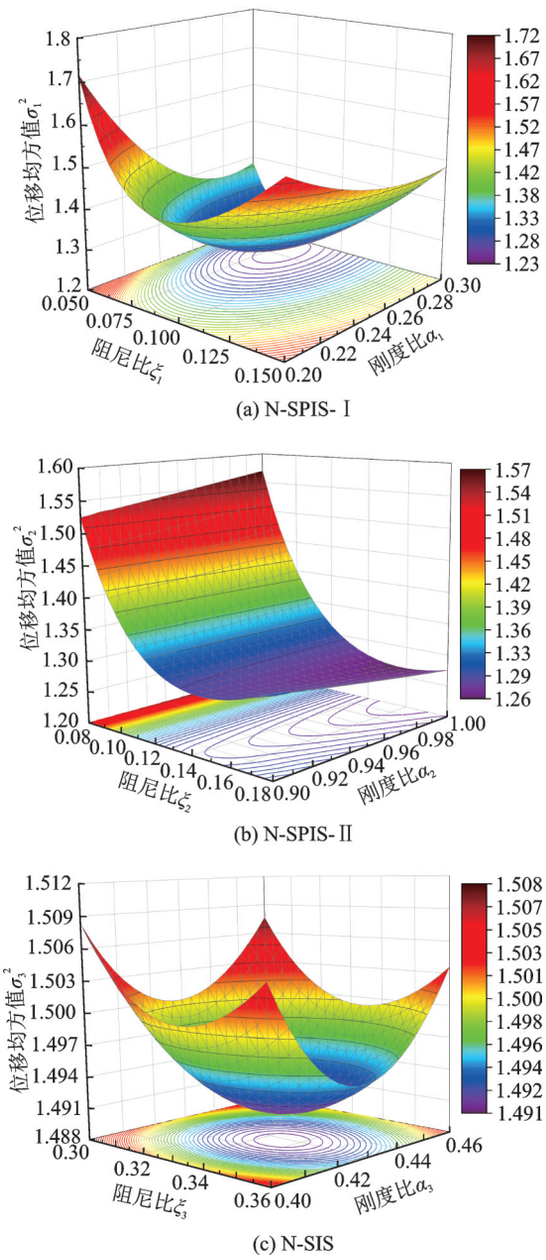

图 9　三种 N-ISD 系统的主结构位移均方值随刚度比和阻尼比的变化曲面图（$\delta=0.2$，$\kappa=-0.1$）

Fig. 9　The variation of the displacement mean square value of primary system with three N-ISDs with stiffness ratio and damping ratio ($\delta=0.2$, $\kappa=-0.1$)

刚度比间的关系不单调，存在最优刚度比使得位移均方值最小，此时直接求解极值方程就能得到相应的最优刚度比。但是，对图 9(b)中的 N-SPIS-Ⅱ型惯容系统，在刚度比取值区间内，位移均方值与刚度比间的关系为单调递减，要使该系统的位移均方值最小，即刚度比取最大值 1。确定了 N-SPIS-Ⅰ，N-SPIS-Ⅱ和 N-SIS 型惯容减振系统的最优刚度比后，代入优化后的位移均方值表达式，即可求解出这三种含负刚度的惯容减振系统基于 H_2 优化准则下的最小位移均方值。

表 3 给出了随机激励下，含有负刚度的 N-SPIS-Ⅰ，N-SPIS-Ⅱ和 N-SIS 型惯容减振系统分别相对于不含负刚度的 SPIS-Ⅰ，SPIS-Ⅱ和 SIS 型惯容减振系统的位移均方值及衰减率。由表 3 中数据可知，含有负刚度的 N-SPIS-Ⅰ，N-SPIS-Ⅱ和 N-SIS 型惯容减振系统的位移均方值小于不含负刚度的惯容减振系统，说明负刚度元件的引入能够有效降低惯容减振系统主结构的位移均方值，N-ISD 惯容系统相比 ISD 型惯容系统可以表现出更好的减振性能。另外，N-SPIS-Ⅰ和 N-SPIS-Ⅱ型惯容减振系统的位移均方值均低于 N-SIS 型惯容减振系统，但两者之间位移均方值相差不大，说明在随机位移激励下 N-SPIS-Ⅰ和 N-SPIS-Ⅱ型惯容减振系统的减振效果比 N-SIS 型惯容系统更佳。

表 3　N-ISD 系统与经典 ISD 系统的位移均方值及衰减率对比

Tab. 3　Comparison of displacement mean square and attenuation rate between N-ISD systems and classical ISD systems

模型	位移均方值 $\sigma_{i\min}^2$	衰减率/%
SPIS-Ⅰ	1.99750	38.44
N-SPIS-Ⅰ	1.22965	
SPIS-Ⅱ	1.90211	33.50
N-SPIS-Ⅱ	1.26491	
SIS	2.23607	33.33
N-SIS	1.49071	

5　结　论

惯容器和负刚度元件本质上均表现出负刚度特性，能够辅助减振结构中黏性阻尼器的运动，从而产生阻尼放大效应。负刚度元件表现出来的负刚度特性不受激振频率的影响，而惯容器与激振频率相关且在较高频率下的负刚度效应愈发明显。将负刚度元件、惯容器、弹簧元件和阻尼元件进行不同的串并

联组合,可以形成不同刚度的减振系统,从而产生不同的减振效果。因此,本文在典型的三种惯容减振模型基础上,将负刚度元件与惯容元件并联,提出了三种含有负刚度的N-SPIS-I,N-SPIS-II和N-SIS型惯容减振系统。分别基于H_∞和H_2优化准则,推导了含有负刚度的惯容减振系统的最优刚度比和最优阻尼比的解析解。通过减振系统的算例对比及分析可以得出以下结论:

(1)简谐位移激励和随机位移激励下,N-SPIS-Ⅰ,N-SPIS-Ⅱ和N-SIS型惯容减振系统的最优设计参数解析解与基于遗传算法的数值优化结果几乎一致,验证了解析解的有效性。但是解析结果比数值优化结果更加稳定,避免了遗传算法可能存在的局部优化问题。

(2)对于惯质比相同的减振系统,引入合适的负刚度可以有效提高主结构的减振性能。简谐位移激励下,含有负刚度的惯容减振系统的振幅放大因子低于不含负刚度的惯容减振系统;随机位移激励下,含有负刚度的惯容减振系统的主结构位移均方值小于不含负刚度的惯容减振系统。

(3)N-SPIS-Ⅱ型惯容减振系统在简谐位移激励下较其他两个含负刚度的惯容系统的减振效果及稳定性更好;N-SPIS-Ⅰ和N-SPIS-Ⅱ型惯容减振系统在随机位移激励下的主结构位移均方值均低于N-SIS型惯容减振系统。

参考文献:

[1] Den Hartog J P. Mechanical Vibrations[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1965.

[2] Warburton G B. Optimum absorber parameters for various combinations of response and excitation parameters[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 1982, 10(3): 381-401.

[3] Asami T, Nishihara O. Analytical and experimental evaluation of an air damped dynamic vibration absorber: design optimizations of the three-element type model[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 1999, 121(3): 334-342.

[4] Ren M Z. A variant design of the dynamic vibration absorber[J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 245(4): 762-770.

[5] 刘耀宗, 郁殿龙, 赵宏刚, 等. 被动式动力吸振技术研究进展[J]. 机械工程学报, 2007, 43(3): 14-21.
LIU Yaozong, YU Dianlong, ZHAO Honggang, et al. Review of passive dynamic vibration absorbers[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2007, 43(3): 14-21.

[6] Toshihiko A, Osamu N, Arm M B. Analytical solutions to H_∞ and H_2 optimization of dynamic vibration absorbers attached to damped linear systems[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2002, 124(2): 284-295.

[7] 文永奎, 胡九战, 向文腾, 等. TMD对密频结构减震的参数优化及性能研究[J]. 地震工程与工程振动, 2015, 35(5): 23-28.
WEN Yongkui, HU Jiuzhan, XIANG Wenteng, et al. Study on parametric optimization and performance of TMDs for seismic control of structure with closely spaced frequencies[J]. Earthquake Engineering and Engineering Dynamics, 2015, 35(5): 23-28.

[8] Yang F, Sedaghati R, Esmailzadeh E. Vibration suppression of structures using tuned mass damper technology: a state-of-the-art review[J]. Journal of Vibration and Control, 2022, 28(7-8): 812-836.

[9] Smith M C. Synthesis of mechanical networks: the inerter[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(10): 1648-1662.

[10] Ma R, Bi K, Hao H. Inerter-based structural vibration control: a state-of-the-art review[J]. Engineering Structures, 2021, 243: 112655.

[11] 张瑞甫, 曹嫣如, 潘超. 惯容减震(振)系统及其研究进展[J]. 工程力学, 2019, 36(10): 8-27.
ZHANG Ruifu, CAO Yanru, PAN Chao. Inerter system and its state-of-the-art[J]. Engineering Mechanics, 2019, 36(10): 8-27.

[12] Ikago K, Saito K, Inoue N. Seismic control of single-degree-of-freedom structure using tuned viscous mass damper[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2012, 41(3): 453-474.

[13] Hu Y, Chen M Z Q, Shu Z, et al. Analysis and optimisation for inerter-based isolators via fixed-point theory and algebraic solution[J]. Journal of Sound and Vibration, 2015, 346(1): 17-36.

[14] 李壮壮, 申永军, 杨绍普, 等. 基于惯容-弹簧-阻尼的结构减振研究[J]. 振动工程学报, 2018, 31(6): 157-163.
LI Zhuangzhuang, SHEN Yongjun, YANG Shaopu, et al. Study on vibration mitigation based on inerter-spring-damping structure[J]. Journal of Vibration Engineering, 2018, 31(6): 157-163.

[15] 隋鹏, 申永军, 杨绍普. 一种含惯容和接地刚度的动力吸振器参数优化[J]. 力学学报, 2021, 53(5): 1412-1422.
SUI Peng, SHEN Yongjun, YANG Shaopu. Parameters optimization of a dynamic vibration absorber with inerter and grounded stiffness[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2021, 53(5): 1412-1422.

[16] 潘超, 张瑞甫, 王超, 等. 单自由度混联Ⅱ型惯容减震体系的随机地震响应与参数设计[J]. 工程力学,

2019，36(1)：129-137.
PAN Chao，ZHANG Ruifu，WANG Chao，et al. Stochastic seismic response and design of structural system with series-parallel-Ⅱ inerter system [J]. Engineering Mechanics，2019，36(1)：129-137.

[17] Pan C，Zhang R. Design of structure with inerter system based on stochastic response mitigation ratio [J]. Structural Control and Health Monitoring，2018，25(6)：e2169.

[18] Pan C，Jiang J，Zhang R，et al. Closed-form design formulae for seismically isolated structure with a damping enhanced inerter system[J]. Structural Control and Health Monitoring，2021，28(12)：e2840.

[19] 文永奎，陈政清，韩冰，等. TVMD的减振机理及其提升连续梁减震性能的研究[J]. 振动工程学报，2018，31(4)：599-610.
WEN Yongkui，CHEN Zhengqing，HAN Bing，et al. Control mechanism of TVMD and its performance improvement for seismic mitigation of continuous bridge [J]. Journal of Vibration Engineering，2018，31(4)：599-610.

[20] 陈政清，张继峰，牛华伟，等. MTVMD对结构减震参数优化及偏离性分析[J]. 湖南大学学报(自然科学版)，2020，47(9)：1-9.
CHEN Zhengqing，ZHANG Jifeng，NIU Huawei，et al. Optimization and deviation analysis of structural shock absorption parameters based on MTVMD [J]. Journal of Hunan University(Natural Sciences)，2020，47(9)：1-9.

[21] 陈杰，孙维光，吴杨俊，等. 基于惯容负刚度动力吸振器的梁响应最小化[J]. 振动与冲击，2020，39(8)：15-22.
CHEN Jie，SUN Weiguang，WU Yangjun，et al. Minimization of beam response using inerter-based dynamic vibration absorber with negative stiffness[J]. Journal of Vibration and Shock，2020，39(8)：15-22.

[22] Wang M，Sun F F，Nagarajaiah S，et al. Frequency-dependency/independency analysis of damping magnification effect provided by tuned inerter absorber and negative stiffness amplifying damper considering soil-structure interaction[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2022，172：108965.

[23] 刘海平，黄志锋，王岩，等. 非接地负刚度动力吸振器动力学设计及优化[J/OL]. 振动工程学报：1-7 [2022-03-07]，http://kns.cnki.net/kcms/detail/32.1349.TB.20220303.1032.002.html.
LIU Haiping，HUANG Zhifeng，WANG Yan，et al. Dynamic design and optimization of dynamic vibration absorber with ungrounded negative stiffness [J/OL]. Journal of Vibration Engineering：1-7 [2022-03-07]，http://kns. cnki. net/kcms/detail/32.1349. TB.20220303.1032.002.html.

[24] 邢昭阳，申永军，邢海军，等. 一种含放大机构的负刚度动力吸振器的参数优化[J]. 力学学报，2019，51(3)：894-903.
XING Zhaoyang，SHEN Yongjun，XING Haijun，et al. Parameters optimization of a dynamic vibration absorber with amplifying mechanism and negative stiffness [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics，2019，51(3)：894-903.

[25] 范舒铜，申永军. 含惯容和接地刚度的黏弹性动力吸振器的参数优化[J]. 振动工程学报，2022，35(4)：814-825.
FAN Shutong，SHEN Yongjun. Parameter optimization of viscoelastic dynamic vibration absorber with inerter and grounded stiffness[J]. Journal of Vibration Engineering，2022，35(4)：814-825.

[26] Baduidana M，Wang X，Kenfack-Jiotsa A. Parameters optimization of series-parallel inerter system with negative stiffness in controlling a single-degree-of-freedom system under base excitation [J]. Journal of Vibration and Control，2022，28(7-8)，864-881.

[27] Islam N U，Jangid R S. Optimum parameters and performance of negative stiffness and inerter based dampers for base-isolated structures [J]. Bulletin of Earthquake Engineering，2023，21：1411-1438.

Analytical study on optimal inerter vibration absorbers with negative stiffness under displacement excitations

WANG Jue[1]，*ZHANG Ying*[1]，*HUANG Su*[2]，*YE Hui-ran*[1]，*ZHOU Ding*[3]

(1.College of Mechanical & Electrical Engineering，Hohai University，Changzhou 213022，China；2.SAIC Volkswagen Automotive Co.，Ltd.，Shanghai 310000，China；3.College of Civil Engineering，Nanjing Tech University，Nanjing 211816，China)

Abstract: Three typical inerter-spring-damper with negative stiffness (N-ISD) are presented to reduce the vibration of the primary system which is subjected to the displacement excitation from the base. The analytical expressions of stiffness ratio and damping ratio are derived based on the H_∞ and H_2 optimization design for the N-ISDs. The differential governing equations of a primary system equipped with three different N-ISDs subjected to displacement excitation are firstly developed according to D′Alembert′s prin-

ciple. Then the transfer function of the primary system can be further obtained. The analytical solutions for H_∞ optimization of N-ISDs are presented based on the fixed-point theories to minimize the maximum amplitude of the primary system under harmonic displacement excitation. The analytical solutions for H_2 optimization designs are presented based on the extreme value theory to minimize the mean squared displacements of the primary system under random excitation. The validity and superiority of the analytical solutions of parameter optimization for N-ISDs are verified by comparing the present results with the numerical results determined by genetic algorithms. Finally, the effects of vibration control with different types of N-ISDs are further explored. The numerical examples indicate that N-ISDs show a better vibration reduction performance than ISDs. N-SPIS-Ⅱ system shows a lower anti-resonance peak and larger resonance peak spacing under the harmonic excitations than two other N-ISDs systems. Moreover, the mean squared displacements of N-SPIS-Ⅰ and N-SPIS-Ⅱ systems are less than that of N-SIS under random excitation.

Key words: inerter vibration absorber; displacement excitation; random excitation; negative stiffness; H_∞ optimization; H_2 optimization

作者简介: 王 珏(1988—),女,博士,副教授。E-mail: juewang@hhu.edu.cn。

附录

$$\Delta_1=\sqrt{-8\delta(1+\kappa)^3+\left[2+\kappa(2+\kappa)+\delta(3+2\kappa)\right]^2},$$

$$\Delta_2=\sqrt{1-2\delta+\kappa^2},$$

$$E=2+3\delta+2\kappa+2\delta\kappa+\kappa^2+\Delta_1,$$

$$\begin{aligned}D_1=\Bigg\{&-\frac{1}{8(1+\delta)(1+\kappa)}\delta(-6-9\delta-2\kappa-6\delta\kappa+\kappa^2+\Delta_1)\left(1+\kappa-\frac{\phi}{\delta E}\right)^2\cdot\\&\left[4\kappa-\frac{-2-5\delta+2\kappa-2\delta\kappa+\kappa^2+\Delta_1}{1+\delta}+\frac{(-6-9\delta-2\kappa-6\delta\kappa+\kappa^2+\Delta_1)\phi}{(1+\delta)^2(1+\kappa)E}\right]+2\left[1+\kappa-\frac{\phi}{(1+\delta)E}\right]^2\cdot\\&\left[-\delta-\kappa+\frac{-2-5\delta+2\kappa-2\delta\kappa+\kappa^2+\Delta_1}{4(1+\kappa)}+\frac{2\phi}{(1+\delta)E}\right]\left[\kappa-\frac{(1+\kappa)(-2-5\delta+2\kappa-2\delta\kappa+\kappa^2+\Delta_1)}{4(1+\delta)(1+\kappa)}-\right.\\&\left.\frac{(2+9\delta+2\kappa+6\delta\kappa+3\kappa^2-\Delta_1)\phi}{4\delta(1+\delta)(1+\kappa)E}+\frac{\phi^2}{\delta(1+\delta)^2E^2}\right]\Bigg\}\Bigg/\left\{\phi\left(1+\kappa-\frac{\phi}{\delta E}\right)\left[1+\kappa-\frac{\phi}{(1+\delta)E}\right]\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_2=\Bigg\{&-\frac{1}{8(1+\delta)(1+\kappa)}\delta(-6-9\delta-2\kappa-6\delta\kappa+\kappa^2+\Delta_1)\left(1+\kappa-\frac{\psi}{\delta E}\right)^2\cdot\\&\left[4\kappa-\frac{-2-5\delta+2\kappa-2\delta\kappa+\kappa^2+\Delta_1}{1+\delta}+\frac{(-6-9\delta-2\kappa-6\delta\kappa+\kappa^2+\Delta_1)\psi}{(1+\delta)^2(1+\kappa)E}\right]+2\left[1+\kappa-\frac{\psi}{(1+\delta)E}\right]^2\cdot\\&\left[-\delta-\kappa+\frac{-2-5\delta+2\kappa-2\delta\kappa+\kappa^2+\Delta_1}{4(1+\kappa)}+\frac{2\psi}{(1+\delta)E}\right]\left[\kappa-\frac{(1+\kappa)(-2-5\delta+2\kappa-2\delta\kappa+\kappa^2+\Delta_1)}{4(1+\delta)(1+\kappa)}-\right.\\&\left.\frac{(2+9\delta+2\kappa+6\delta\kappa+3\kappa^2-\Delta_1)\psi}{4\delta(1+\delta)(1+\kappa)E}+\frac{\psi^2}{\delta(1+\delta)^2E^2}\right]\Bigg\}\Bigg/\left\{\psi\left(1+\kappa-\frac{\psi}{\delta E}\right)\left[1+\kappa-\frac{\psi}{(1+\delta)E}\right]\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi=&4\delta(1+\delta)(1+\kappa)^2-(1+\kappa)\cdot\\&\sqrt{2\delta(1+\delta)\left\{\kappa^2\left[2+\Delta_1+\kappa(2+\kappa)\right]+\delta^2\left[5+4\kappa(2+\kappa)\right]-\delta\left[-2+\Delta_1+2\Delta_1\kappa+2\kappa(1+\kappa)(1+2\kappa)\right]\right\}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi=&4\delta(1+\delta)(1+\kappa)^2+(1+\kappa)\cdot\\&\sqrt{2\delta(1+\delta)\left\{\kappa^2\left[2+\Delta_1+\kappa(2+\kappa)\right]+\delta^2\left[5+4\kappa(2+\kappa)\right]-\delta\left[-2+\Delta_1+2\Delta_1\kappa+2\kappa(1+\kappa)(1+2\kappa)\right]\right\}}。\end{aligned}$$