

# 含润滑介质的正交各向异性结合面接触特性研究

王世军<sup>1</sup>, 崔圣奇<sup>1</sup>, 吴敬伟<sup>2</sup>, 卫娟娟<sup>1</sup>, 李鹏阳<sup>1</sup>

(1. 西安理工大学机械与精密仪器工程学院, 陕西 西安 710048;

2. 西安昆仑工业(集团)有限责任公司技术部, 陕西 西安 710043)

**摘要:** 提出了一种含润滑介质的正交各向异性结合面法向接触刚度的分形模型。该模型基于含椭圆修正因子的 Hertz 接触理论, 并根据考虑润滑介质的侧向泄漏的平均雷诺方程, 推导出固体接触刚度与流体刚度之间的解析关系。通过分析不同因素对结合面的法向接触刚度的影响, 发现当无量纲固体真实接触面积小于 0.05 时, 结合面的法向接触刚度受流体刚度的影响较大。随着润滑介质发生侧向泄漏, 固体真实接触面积逐渐增大, 固体接触刚度对结合面的法向接触刚度的影响越来越显著。给定不同预紧力, 对比试验与有限元仿真获得的前三阶固有频率, 其最大相对误差为 4.11%, 证明本文构建的模型可以准确地预测结合面的接触性能。

**关键词:** 椭球形微凸体; Hertz 接触理论; 法向接触刚度; 平均雷诺方程; 有限元法

**中图分类号:** TH113.1; TB123 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2023)04-0909-14

**DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2023.04.004

## 引言

机械结构的有限元仿真分析中, 对单个零件进行模态或应力、变形分析时, 通常可以得到较为准确的结果, 仿真结果与试验结果可以很接近。而整机结构是由多个零件装配而成的, 对整机结构进行有限元仿真得到的结果与试验结果往往存在较大差异, 主要原因在于结合面的影响。由于含润滑介质的正交各向结合面在整机结构中大量存在, 即便是非滑动的固定联接面之间, 通常也存在润滑介质, 完全纯净的接触表面在实际的机械设备中通常并不存在, 所以建立准确的结合面接触模型是提高机械整机性能分析准确性的关键<sup>[1]</sup>。

不同的表面加工方式会产生不同的表面纹理, 导致表面接触特性存在差异。根据表面纹理特征的不同, 常见的机械加工表面可以分为各向同性结合面和各向异性结合面。文献[2-6]探讨了不含润滑介质的各向异性结合面的接触特性, 文献[7-9]研究了含润滑介质的各向同性结合面的接触特性。

在各向异性结合面的研究中, Chung 等<sup>[2]</sup>将微凸体形状假设为椭球体, 考虑不同椭圆率对接触点接触变形的影响, 构建了粗糙表面椭球形微凸体弹性微观接触的分形模型, 但该模型并未对接触刚度进行分析。Buczowski 等<sup>[3]</sup>应用统计模型对各向

异性粗糙表面的接触特性进行研究, 认为微凸体峰顶可以用椭圆抛物线表示。王世军等<sup>[4]</sup>提出一种结合部法向刚度预估方法, 采用接触表面的二维轮廓测量数据建立接触分析模型, 预测相互接触的两个各向异性表面在加工纹理相同时的接触刚度。刘伟强等<sup>[5]</sup>通过映射法求解出曲面曲率, 并依据 Hertz 曲面接触理论, 提出了椭圆抛物体形微凸体弹性接触的建模方法。谭文兵等<sup>[6]</sup>应用各向异性分形几何理论, 将微凸体形状等效为抛物面形, 对结合面的法向接触刚度进行分析。

针对含润滑介质的结合面接触特性, 屈重年等<sup>[7]</sup>基于分形理论和平均雷诺方程, 推导出结合面的固体接触刚度和液体的等效接触刚度, 提出了两个粗糙接触表面在含润滑介质状态下的动态刚度建模方法。高志强等<sup>[8]</sup>基于 GW, KKE 和 AF 模型, 结合流体动力润滑方程, 研究了动态载荷对固-液结合面接触特性的影响。李玲等<sup>[9]</sup>对等效润滑介质厚度与固体刚度之间的关系进行研究, 求解了流、固两种刚度的耦合解析式, 建立了混合润滑状态下结合面的动态接触刚度模型。

本文应用含椭圆修正因子的 Hertz 接触理论和考虑润滑介质的侧向泄漏的平均雷诺方程, 研究了含润滑介质的正交各向异性结合面的接触特性, 分析了相关参数对结合面的法向接触刚度的影响规律, 最后将试验模型和有限元分析模型得到的固有

频率对比,建立了结合面的法向接触刚度模型。

### 1 正交各向异性结合面

平面磨削的表面,微观纹理表现出正交各向异性特性,两个这样的粗糙表面按照相同纹理方向组成的结合面,也表现出正交各向异性。图1为粗糙度  $Ra=0.8$  的平面磨削表面。对于正交各向异性结合面,其表面上带有条形纹理,且纹理具有方向性,为了使建立的模型更符合纹理特征,本文将正交各向异性结合面上微凸体的形状等效为椭球形。假设椭圆接触面的长轴与粗糙表面上顺纹理方向相同,忽略椭球形微凸体之间相互作用对接触特性的影响。



图1 平面磨削表面

Fig.1 Planar grinding surface

### 2 含润滑介质的结合面建模

图2(a)为含润滑介质的结合面法向接触示意图。将结合面的弹性接触等效为刚性理想平面与单个粗糙面的接触,如图2(b)所示,其中  $h$  表示刚性理想平面与单个粗糙表面的法向距离。依据文献[10],将结合面的法向接触刚度  $K_n$  按照并联弹簧模型等效为固体接触刚度  $K_a$  与流体刚度  $K_l$ ,如图2(c)所示。

结合面的法向接触刚度为:

$$K_n = K_a + K_l \tag{1}$$

### 3 结合面固体刚度建模

#### 3.1 椭球形微凸体的接触模型

图3表示两个椭球形微凸体正向接触的几何形状。

原点附近的曲面表示为:

$$z_1 = A_1x^2 + B_1y^2 + C_1xy + \dots \tag{2}$$

在此略去了  $x$  和  $y$  的更高次项。通过选取适当

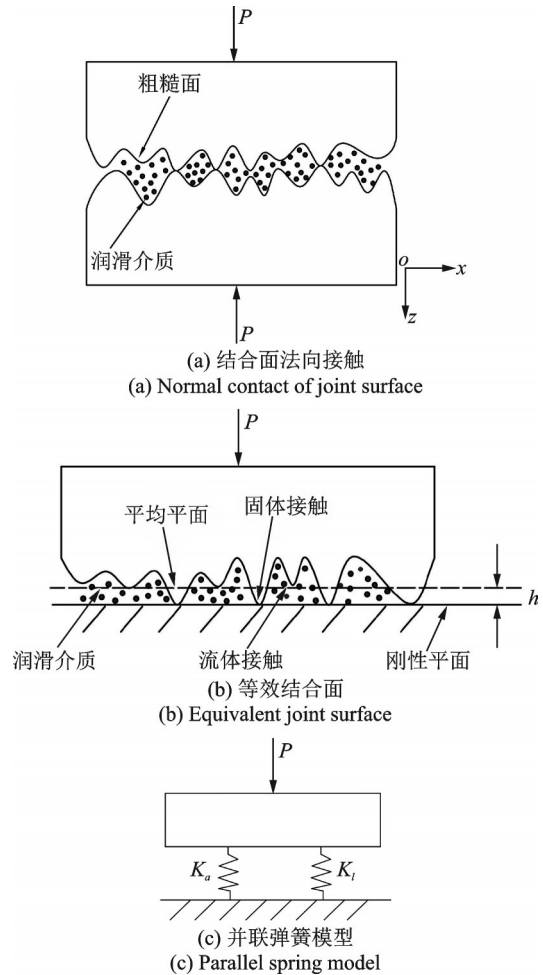


图2 含润滑介质的结合面法向接触示意图

Fig.2 Schematic diagram of normal contact of the joint surface with lubrication medium

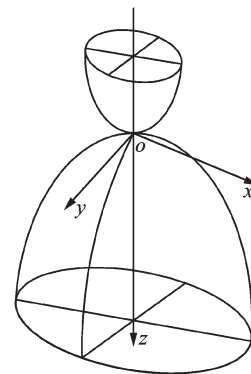


图3 椭球形微凸体正向接触的几何形状

Fig.3 Geometry of ellipsoidal asperities with positive contact

的  $x, y$  轴和  $x_1, y_1$  轴,可消去式(2)中的  $xy$  项,则式(2)可改写为:

$$z_1 = \frac{1}{2R'_1}x_1^2 + \frac{1}{2R''_1}y_1^2 \tag{3}$$

式中  $R'_1, R''_1$  为接触曲面  $z_1$  在原点处的主曲率半径。

与  $z_1$  接触的曲面方程为<sup>[11]</sup>:

$$z_2 = -\frac{1}{2R'_2}x_2^2 + \frac{1}{2R''_2}y_2^2 \tag{4}$$

式中  $R'_2, R''_2$  为与接触曲面  $z_1$  对称的接触曲面  $z_2$  在  
原点处的主曲率半径。

两椭球形微凸体之间的距离  $h_1 = z_1 - z_2$ 。联  
立式(3)和(4)得:

$$z_1 - z_2 = \frac{1}{2R'_1} x_1^2 + \frac{1}{2R''_1} y_1^2 + \frac{1}{2R'_2} x_2^2 - \frac{1}{2R''_2} y_2^2 \quad (5)$$

将式(5)中含有  $R', R''$  的项进行合并,如下式  
所示:

$$z_1 - z_2 = Ax^2 + By^2 = \frac{1}{2R'} x^2 + \frac{1}{2R''} y^2 \quad (6)$$

式中  $R', R''$  为相对主曲率半径。

主曲率坐标轴  $x_1$  与  $x_2$  的夹角  $\theta$  如图4所示。主  
曲率半径与  $A, B$  之间的关系为:

$$A + B = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R''_1} + \frac{1}{R'_2} + \frac{1}{R''_2} \right) \quad (7)$$

$$B - A = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R''_1} \right)^2 + \left( \frac{1}{R'_2} - \frac{1}{R''_2} \right)^2 + \right. \\ \left. 2 \left( \frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R''_1} \right) \left( \frac{1}{R'_2} - \frac{1}{R''_2} \right) \cos(2\theta) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

$$\frac{B - A}{A + B} = \cos \theta \quad (9)$$

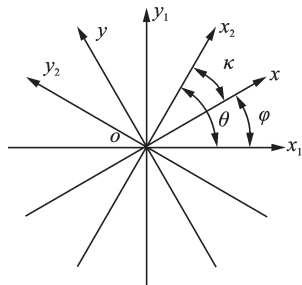


图4 主曲率坐标轴夹角

Fig. 4 The angle between the coordinate axes of principal curvature

引入与  $R', R''$  有关的等效曲率半径<sup>[12]</sup>:

$$R_e = \sqrt{R'R''} = \frac{1}{2\sqrt{AB}} \quad (10)$$

椭圆接触面的长、短半轴  $a, b$  的参数值分别为:

$$a = m \left[ \frac{3P}{4E^*(A+B)} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (11)$$

$$b = n \left[ \frac{3P}{4E^*(A+B)} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (12)$$

式中  $m, n$  为主曲率半径夹角相关系数;  $E^*$  为材料的  
复合弹性模量, 且有  $\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$ ;  $E_1$  和  
 $E_2$  分别表示材料各自的弹性模量;  $\nu_1$  和  $\nu_2$  分别表示  
材料各自的泊松比。

图5为椭球形微凸体微观接触示意图。可以看

出,微凸体承受方向为法向,大小为  $P$  的载荷。在  $P$   
的作用下,微凸体产生的变形量为  $\delta$ 。

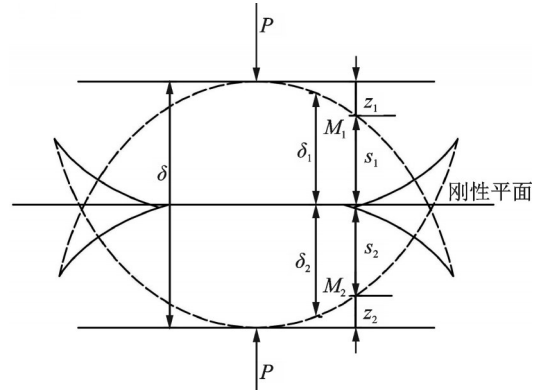


图5 椭球形微凸体微观接触示意图

Fig. 5 Schematic diagram of microscopic contact between ellipsoidal asperities

### 3.1.1 弹性阶段

当  $\delta \leq \delta_c$  时,为弹性变形阶段。此时微凸体弹  
性载荷  $p_e$ 、弹性接触面积  $s_e$  及临界变形量  $\delta_c$  可分别  
表示为<sup>[2]</sup>:

$$p_e = \frac{4}{3} E^* R_e^{\frac{1}{2}} \delta^{\frac{3}{2}} F_2^{-\frac{2}{3}}(e) \quad (13)$$

$$s_e = \pi R_e \delta F_2^{-1}(e) \quad (14)$$

$$\delta_c = \left( \frac{\pi KH}{2E^*} \right)^2 R_e F_2^{-\frac{2}{3}}(e) \quad (15)$$

式中 硬度系数  $K = 0.454 + 0.4\nu$ ,  $\nu$  为两材料中较  
软材料的泊松比;  $H$  为较软材料的硬度,  $H = 2.8\sigma_y$ ,  
 $\sigma_y$  为较软材料的屈服强度;  $F_2(e)$  为椭圆修正因子。

### 3.1.2 弹塑性过渡阶段

当  $\delta_c \leq \delta \leq 110\delta_c$  时,为弹塑性变形阶段。弹  
塑性变形又可以被分为两个阶段,当  $\delta_c \leq \delta \leq 6\delta_c$  时,  
为弹塑性第一阶段;当  $6\delta_c \leq \delta \leq 110\delta_c$  时,为弹塑性  
第二阶段。此时微凸体弹塑性载荷  $p_{ep}$  及弹塑性接  
触面积  $s_{ep}$  可分别表示为<sup>[11]</sup>:

当  $1 \leq \frac{\delta}{\delta_c} \leq 6$  时:

$$p_{ep1} = \frac{2}{3} KH\pi R_e \delta_c \times 1.03 \left( \frac{\delta}{\delta_c} \right)^{1.425} F_2^{-\frac{2}{3}}(e) \quad (16)$$

$$s_{ep1} = 0.93\pi R_e \delta_c \left( \frac{\delta}{\delta_c} \right)^{1.136} \quad (17)$$

当  $6 \leq \frac{\delta}{\delta_c} \leq 110$  时:

$$p_{ep2} = \frac{2}{3} KH\pi R_e \delta_c \times 1.40 \left( \frac{\delta}{\delta_c} \right)^{1.263} F_2^{-\frac{2}{3}}(e) \quad (18)$$

$$s_{ep2} = 0.94\pi R_e \delta_c \left( \frac{\delta}{\delta_c} \right)^{1.146} \quad (19)$$

### 3.1.3 完全塑性阶段

当  $\delta \geq 110\delta_c$  时,为塑性变形阶段。此时微凸体塑性载荷  $p_p$  及塑性接触面积  $s_p$  分别为<sup>[11]</sup>:

$$p_p = 2\pi HR_e \delta F_2^{-\frac{2}{3}}(e) \quad (20)$$

$$F_2(e) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{4}{\pi e^2} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} \left[ \left(\frac{a}{b}\right)^2 K_2(e) - K_1(e) \right]^{\frac{1}{6}} \times [K_1(e) - K_2(e)]^{\frac{1}{6}} \frac{4}{\pi e^2} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}} K_1(e) \quad (22)$$

式中 椭圆离心率  $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ ; 第一类椭圆积分

$$K_1(e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}}$$

$$K_2(e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} d\theta.$$

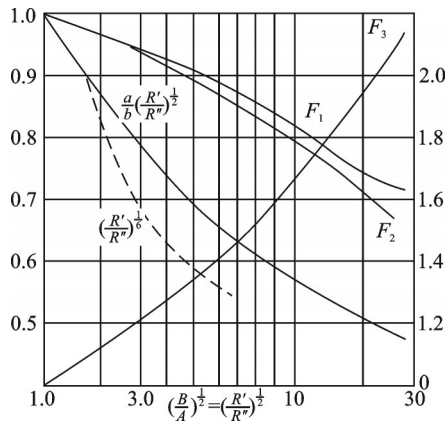


图6 椭圆形状  $b/a$ 、椭圆修正因子  $F_2(e)$  与相对主曲率半径的比值  $R'/R''$

Fig. 6 Ratio of elliptical shape  $b/a$ , elliptical correction factor  $F_2(e)$  to relative principal curvature of radius curvature  $R'/R''$

### 3.2 椭球形微凸体的法向接触刚度模型

通过 W-M 函数模拟粗糙表面轮廓,得到微凸体的变形量  $\delta$  为<sup>[13-14]</sup>:

$$\delta = 2^{3-D} \pi^{\frac{D-2}{2}} G^{D-1} (\ln \alpha)^{\frac{1}{2}} s^{\frac{2-D}{2}} \quad (23)$$

式中  $D$  为分形维数,  $1 < D < 2$ ;  $s$  表示椭圆形接触面的接触面积;  $G$  为分形粗糙度;  $\alpha$  为常数,当粗糙表面服从正态分布时,  $\alpha = 1.5$ 。

变形量  $\delta$  与等效接触半径和  $c = \sqrt{ab}$  之间的关系为:

$$c^2 = ab = \delta R_e F_2^{-1}(e) \quad (24)$$

椭圆形接触面的接触面积为:

$$s = \pi ab = \pi c^2 = \pi \delta R_e F_2^{-1}(e) \quad (25)$$

联立式(23),(24)及(25),则椭球形微凸体的等效曲率半径为:

$$R_e = \frac{\frac{D}{s^2}}{2^{4-D} \pi^{\frac{D}{2}} G^{D-1} (\ln \alpha)^{\frac{1}{2}}} F_2(e) \quad (26)$$

$$s_p = 2\pi R_e \delta \quad (21)$$

图6为椭圆修正因子  $F_2(e)$  与椭圆形状  $b/a$ , 相对主曲率半径比值  $R'/R''$  的关系曲线。图中,  $F_1, F_2, F_3$  为椭圆修正因子。椭圆修正因子  $F_2(e)$  的表达式为:

接触载荷  $p$  和接触刚度  $k$  的关系为  $k = \frac{dp}{d\delta}$ 。联立式(13),(14),(23)及(26),弹性阶段的接触载荷  $p_e$  及接触刚度  $k_e$  分别为:

$$p_e = \frac{4}{3} E^* 2^{2.5-D} \pi^{\frac{D-3}{2}} G^{D-1} (\ln \alpha)^{\frac{1}{2}} s^{\frac{3-D}{2}} F_2^{-\frac{1}{6}}(e) \quad (27)$$

$$k_e = \frac{4E^*(3-D)s^{\frac{1}{2}}}{3\sqrt{2\pi}(2-D)} F_2^{-\frac{7}{6}}(e) \quad (28)$$

联立式(15),(16),(17),(23)及(26),弹塑性第一阶段的接触载荷  $p_{ep1}$  和接触刚度  $k_{ep1}$  分别为:

$$p_{ep1} = 0.343 (KH)^{0.15} E^{*0.85} \pi^{0.425D-1.275} G^{0.85(D-1)} \times 2^{3.825-0.85D} (\ln \alpha)^{0.425} s^{1.425-0.425D} F_2^{\frac{23}{120}}(e) \quad (29)$$

$$k_{ep1} = \frac{1.03 \times 2^{1.825+0.15D} (KH)^{0.15} E^{*0.85}}{3\pi^{0.075D+0.275} G^{0.15(D-1)}} \times \frac{s^{0.075D+0.425} (1.425-0.425D)}{(\ln \alpha)^{0.075} (2-D)} F_2^{-\frac{2561}{3000}}(e) \quad (30)$$

联立式(15),(18),(19),(23)及(26),弹塑性第二阶段的接触载荷  $p_{ep2}$  和接触刚度  $k_{ep2}$  分别为:

$$p_{ep2} = 0.466 (KH)^{0.474} E^{*0.526} \pi^{0.263D-0.789} G^{0.526(D-1)} \times 2^{2.367-0.526D} (\ln \alpha)^{0.263} s^{1.263-0.263D} F_2^{\frac{191}{750}}(e) \quad (31)$$

$$k_{ep2} = \frac{1.40 \times 2^{0.367+0.474D} (KH)^{0.474} E^{*0.526}}{3\pi^{0.237D-0.211} G^{0.474(D-1)}} \times \frac{s^{0.237D+0.263} (1.263-0.263D)}{(\ln \alpha)^{0.237} (2-D)} F_2^{-\frac{397}{500}}(e) \quad (32)$$

联立式(20),(21),(23)及(26),完全塑性阶段的接触载荷  $p_p$  为:

$$p_p = Hs F_2^{\frac{1}{3}}(e) \quad (33)$$

### 3.3 椭球形微凸体的法向接触刚度改进模型

MB模型中的面积分布函数为<sup>[15]</sup>:

$$n(s') = \left| \frac{dN(A > s')}{ds'} \right| = \frac{D}{2} \psi^{\frac{2-D}{2}} s_i^{\frac{D}{2}} s'^{-\left(\frac{D}{2}+1\right)} \quad (34)$$

式中  $s'$  为微凸体接触截面积,  $s' = 2s$ ,  $s$  为微凸体接触面积;  $s'_i$  为最大接触点截面积,  $s'_i = 2s_i$ ,  $s_i$  为最大接触点面积;  $\psi$  为域扩展因子。

$D$  与  $\psi$  之间的解析关系式为<sup>[16]</sup>:

$$\psi^{\frac{2-D}{D}} - \left(1 + \psi^{-\frac{D}{2}}\right)^{\frac{2-D}{D}} = \frac{2-D}{D}, \psi > 1 \quad (35)$$

结合面真实接触面积为:



$$A_r = \int_{s'_c}^{s'_l} n(s') s' ds' + \int_{\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{D-1}} s'_c}^{s'_l} n(s') s' ds' + \int_{\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{D-1}} s'_c}^{\left(\frac{1}{110}\right)^{\frac{1}{D-1}} s'_c} n(s') s' ds' + \int_0^{\left(\frac{1}{110}\right)^{\frac{1}{D-1}} s'_c} n(s') s' ds' \quad (36)$$

式中  $s'_l$  为微凸体临界接触截面积,  $s'_c = 2s_c$ ,  $s_c$  为微凸体临界接触面积。

将式(34)代入式(36)得:

$$A_r = \frac{2D}{2-D} \psi^{\frac{2-D}{2}} s_l \quad (37)$$

结合面法向接触总载荷为<sup>[17]</sup>:

$$P = P_e + P_{ep1} + P_{ep2} + P_p = \int_{s'_c}^{s'_l} p_e \cdot n(s') ds' + \int_{\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{D-1}} s'_c}^{s'_l} p_{ep1} \cdot n(s') ds' + \int_{\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{D-1}} s'_c}^{\left(\frac{1}{110}\right)^{\frac{1}{D-1}} s'_c} p_{ep2} \cdot n(s') ds' + \int_0^{\left(\frac{1}{110}\right)^{\frac{1}{D-1}} s'_c} p_p \cdot n(s') ds' \quad (38)$$

当  $1 < D < 2$  且  $D \neq 1.5$ , 结合面无量纲法向接触载荷为时:

$$P^* = \frac{2^{\frac{12-3D}{2}} G^{*(D-1)} (\ln \alpha)^{\frac{1}{2}} \psi^{\left(\frac{2-D}{2}\right)^2} D \left(\frac{2-D}{D}\right)^{\frac{D}{2}}}{3\pi^{\frac{3-D}{2}} (3-2D)} \times A_r^{\frac{D}{2}} \left[ \left(\frac{2-D}{D}\right)^{\frac{3-2D}{2}} \psi^{\frac{-2D^2+7D-6}{4}} A_r^{\frac{3-2D}{2}} - s_c^{\frac{3-2D}{2}} \right] \times F_2^{\frac{1}{6}}(e) + \frac{2^{4.25-1.275D} G^{*0.85(D-1)} (\ln \alpha)^{0.425} \psi^{\left(\frac{2-D}{2}\right)^2} D \left(\frac{2-D}{D}\right)^{\frac{D}{2}}}{3(1.425-0.925D)} \times 1.03 \times A_r^{\frac{D}{2}} (2.8K\varphi)^{0.15} \pi^{0.425D-1.275} s_c^{*1.425-0.925D} \times \left[ 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1.425-0.925D}{D-1}} \right] F_2^{\frac{23}{120}}(e) + \frac{2^{2.63-0.789D} G^{*0.526(D-1)} (\ln \alpha)^{0.263} \psi^{\left(\frac{2-D}{2}\right)^2} D \left(\frac{2-D}{D}\right)^{\frac{D}{2}}}{3(1.263-0.763D)} \times 1.40 \times A_r^{\frac{D}{2}} (2.8K\varphi)^{0.474} \pi^{0.263D-0.789} s_c^{*1.263-0.763D} \times \left[ \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1.263-0.763D}{D-1}} - \left(\frac{1}{110}\right)^{\frac{1.263-0.763D}{D-1}} \right] F_2^{\frac{191}{750}}(e) + \frac{2K\varphi\psi^{\left(\frac{2-D}{2}\right)^2} D \left(\frac{2-D}{D}\right)^{\frac{2-D}{2}} A_r^{\frac{D}{2}} s_c^{\frac{2-D}{2}} \left(\frac{1}{110}\right)^{\frac{2-D}{2D-2}}}{2-D} F_2^{\frac{1}{3}}(e) \quad (39)$$

式中  $A_r^*$  为结合面无量纲真实接触面积,  $s_c^*$  为无量纲临界接触面积,  $G^*$  为无量纲分形粗糙度参数。

当  $1 < D < 2$  且  $D = 1.5$  时, 结合面无量纲法向接触载荷为:

$$P^* = \frac{2^{3.75} G^{*0.5} (\ln \alpha)^{0.5} \psi^{0.0625} \times 1.5}{3\pi^{0.75}} \times \left(\frac{A_r^*}{3}\right)^{0.75} \ln\left(\frac{A_r^*}{3\psi^{0.1875} s_c^*}\right) F_2^{\frac{1}{6}}(e) + \frac{1.03 \times 2^{2.34} G^{*0.425} (\ln \alpha)^{0.425} \psi^{0.0625} \times 1.5 \left(\frac{A_r^*}{3}\right)^{0.75}}{0.1125} \times (2.8K\varphi)^{0.15} \pi^{-0.6375} s_c^{*0.0375} \left[ 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^{0.075} \right] F_2^{\frac{23}{120}}(e) + \frac{1.40 \times 2^{1.45} G^{*0.263} (\ln \alpha)^{0.263} \psi^{0.0625} \times 1.5 \left(\frac{A_r^*}{3}\right)^{0.75}}{0.3555} \times (2.8K\varphi)^{0.474} \pi^{-0.3945} s_c^{*0.1185} \left[ \left(\frac{1}{6}\right)^{0.237} - \left(\frac{1}{110}\right)^{0.237} \right] \times F_2^{\frac{191}{750}}(e) + \frac{2K\varphi\psi^{0.0625} \times 1.5 \left(\frac{A_r^*}{3}\right)^{0.75} s_c^{*0.25} \left(\frac{1}{110}\right)^{0.5}}{0.5} F_2^{\frac{1}{3}}(e) \quad (40)$$

式中  $\varphi$  为材料的塑性指数,  $\varphi = \sigma_y/E^*$ 。

固体法向接触刚度  $K_a$  为<sup>[18]</sup>:

$$K_a = K_e + K_{ep1} + K_{ep2} = \int_{s'_c}^{s'_l} k_e \cdot n(s') ds' + \int_{\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{D-1}} s'_c}^{s'_l} k_{ep1} \cdot n(s') ds' + \int_{\left(\frac{1}{110}\right)^{\frac{1}{D-1}} s'_c}^{\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{D-1}} s'_c} k_{ep2} \cdot n(s') ds' \quad (41)$$

将式(28), (30), (32), (34)代入式(41)中, 得结合面法向接触刚度  $K_a$ :

$$K_a = \frac{4E^* \psi^{\frac{2-D}{2}} D(3-D)}{3\sqrt{2\pi} (1-D)(2-D)} \left( \frac{1}{s'_l} - \frac{D}{s'_l s_c^{\frac{1-D}{2}}} \right) F_2^{\frac{7}{6}}(e) + \frac{1.03 \times 2^{0.825+0.15D} E^{*0.85} \psi^{\frac{2-D}{2}} (KH)^{0.15}}{3\pi^{0.075D+0.275} G^{0.15(D-1)} (\ln \alpha)^{0.075} (2-D)} \times \frac{D(1.425-0.425D)}{0.425(1-D)} \frac{D}{s'_l s_c^{0.425(1-D)}} \times \left[ 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^{-0.425} \right] F_2^{\frac{2561}{3000}}(e) + \frac{1.40 \times 2^{0.474D-0.633} E^{*0.526} \psi^{\frac{2-D}{2}} (KH)^{0.474}}{3\pi^{0.237D-0.211} G^{0.474(D-1)} (\ln \alpha)^{0.237} (2-D)} \times \frac{D(1.263-0.263D)}{0.263(1-D)} \frac{D}{s'_l s_c^{0.263(1-D)}} \times \left[ \left(\frac{1}{6}\right)^{-0.263} - \left(\frac{1}{110}\right)^{-0.263} \right] F_2^{\frac{397}{500}}(e) \quad (42)$$

将式(42)量纲一化可得固体无量纲法向接触刚度:

$$K_a^* = \frac{4\psi^{\left(\frac{2-D}{2}\right)^2} D(3-D)}{3\sqrt{2\pi}(2-D)(1-D)} \left(\frac{2-D}{D}\right)^{\frac{D}{2}} A_r^* \frac{D}{2} \times$$

$$\left[ \left(\frac{2-D}{D}\right)^{\frac{1-D}{2}} \psi^{\frac{-D^2+3D-2}{4}} A_r^* \frac{1-D}{2} - s_c^* \frac{1-D}{2} \right] F_2^{-\frac{7}{6}}(e) +$$

$$\frac{1.03 \times 2^{0.825+0.15D} \psi^{\left(\frac{2-D}{2}\right)^2} (2.8K\varphi)^{0.15} D}{3\pi^{0.075D+0.275} G^{*0.15(D-1)} (\ln \alpha)^{0.075} (2-D)} \times$$

$$\frac{(1.425-0.425D) \left(\frac{2-D}{D}\right)^{\frac{D}{2}} A_r^* \frac{D}{2} s_c^{*0.425(1-D)}}{0.425(1-D)} \times$$

$$\left[ 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^{-0.425} \right] F_2^{-\frac{2561}{3000}}(e) +$$

$$\frac{1.40 \times 2^{0.474D-0.633} \psi^{\left(\frac{2-D}{2}\right)^2} (2.8K\varphi)^{0.474} D}{3\pi^{0.237D-0.211} G^{*0.474(D-1)} (\ln \alpha)^{0.237} (2-D)} \times$$

$$\frac{(1.263-0.263D) \left(\frac{2-D}{D}\right)^{\frac{D}{2}} A_r^* \frac{D}{2} s_c^{*0.263(1-D)}}{0.263(1-D)} \times$$

$$\left[ \left(\frac{1}{6}\right)^{-0.263} - \left(\frac{1}{110}\right)^{-0.263} \right] F_2^{-\frac{397}{500}}(e) \quad (43)$$

## 4 结合面流体刚度建模

### 4.1 流体刚度建模的基本假设

在流体刚度的建模中,假设润滑介质是牛顿流体,忽略润滑介质厚度方向压力的变化。由于润滑介质厚度仅百分之几毫米,压力不会发生明显变化,接触表面的润滑介质的流速与表面速度相同,沿润滑介质厚度方向的黏度为定值。

### 4.2 一般形式的雷诺方程

一般形式的雷诺方程为<sup>[19]</sup>:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h_2^3}{\eta} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho h_2^3}{\eta} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right) =$$

$$6 \left[ \frac{\partial}{\partial x} (U\rho h_2) + \frac{\partial}{\partial y} (V\rho h_2) + 2\rho \frac{\partial h_2}{\partial t} \right] \quad (44)$$

式中  $U = U_0 + U_h$  为粗糙表面在  $x$  方向的速度之和;  $V = V_0 + V_h$  为粗糙表面在  $y$  方向的速度之和;  $f$  为润滑介质挤压膜承受的压力;  $h_2$  为润滑介质的厚度;  $\eta$  为润滑介质的黏度;  $\rho$  为润滑介质的密度;  $t$  为时间。

### 4.3 两平行板之间的载荷模型

图7为挤压润滑介质压力分布示意图。假设两平行板在  $y$  方向的宽度为  $L$  且为无限长,  $x$  方向的板长为  $B$ ; 且在  $y$  方向无侧向泄漏。

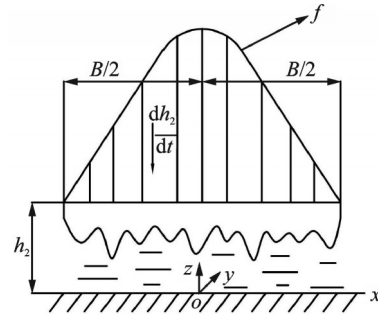


图7 挤压润滑介质压力分布示意图

Fig. 7 Schematic diagram of squeeze lubrication medium pressure distribution

现将两平行板无限靠近,考虑到  $\frac{dh_2}{dt}$  为负,可将雷诺方程改写为:

$$\frac{d}{dx} \left( h^3 \cdot \frac{df}{dx} \right) = -12\eta \frac{dh_2}{dt} \quad (45)$$

由于两板平行,所以  $h_2$  不是  $x$  的函数,则可将式(45)改写为:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -12\eta \frac{1}{h_2^3} \frac{dh_2}{dt} \quad (46)$$

对式(46)积分得:

$$f = -6\eta \frac{1}{h_2^3} \frac{dh_2}{dt} x^2 + Cx + C_1 \quad (47)$$

根据边界条件:

当  $x=0, f=f_{\max}, \frac{df}{dx}=0$ , 则有  $C=0$ ; 当  $x=\pm \frac{B}{2}, f=0$ , 则  $C_1 = 6\eta \frac{1}{4h_2^3} \frac{dh_2}{dt} B^2$ 。

将  $C, C_1$  代入式(47)中,得:

$$f = 6\eta \frac{1}{h_2^3} \frac{dh_2}{dt} \left( \frac{B^2}{4} - x^2 \right) \quad (48)$$

则两板之间的载荷为:

$$W = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} fL dx =$$

$$6\eta L \frac{1}{h_2^3} \frac{dh_2}{dt} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \left( \frac{B^2}{4} - x^2 \right) dx =$$

$$\eta L \frac{1}{h_2^3} \frac{dh_2}{dt} B^3 \quad (49)$$

### 4.4 接触面积与流量因子的关系

将雷诺方程改写为含有流量因子的形式<sup>[20]</sup>:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \phi_x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \phi_y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \phi_c \frac{12\eta}{h_2^3} \frac{\partial h_2}{\partial t} \quad (50)$$

式中  $\phi_x, \phi_y$  为压力流量因子;  $\phi_c$  为接触流量因子。

圆形接触面是各向同性结合面上两球形微凸体受到载荷作用形成的。将接触面形状由椭圆形等效为圆形。假设接触面内长、短轴  $a, b$  相等且等于等效接触半径  $c$ , 即  $a = b = c$ 。正交各向异性结合面在  $x, y$  方向的压力流量因子可以等效为各向同性结合面的压力流量因子。正交各向异性的结合面的流量因子与名义接触面积  $A_a$ 、固体真实接触面积  $A_r$  的关系为:

$$\phi_x = \phi_y = \frac{A_r}{A_a} \quad (51)$$

接触因子  $\phi_c$  表示润滑介质所占的比例, 则有:

$$\phi_c = \frac{A_0}{A_a} = \frac{A_a - A_r}{A_a} \quad (52)$$

#### 4.5 不考虑 $y$ 方向的侧向泄漏

当泄漏仅存在于  $x$  方向时, 式(45)可以表示为:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{\phi_c}{\phi_x} 12\eta \frac{1}{h_2^3} \frac{dh_2}{dt} \quad (53)$$

则两平行板之间的载荷为:

$$W_f = \frac{\eta}{h_2^3} \frac{\phi_c}{\phi_x} \frac{dh_2}{dt} LB^3 \quad (54)$$

#### 4.6 考虑 $y$ 方向的侧向泄漏

图7所示两平行板在  $y$  方向上的长度均为有限长。由于受到挤压, 在  $x$  和  $y$  方向都会发生侧向泄漏。当考虑  $y$  方向的侧向泄漏时, 需要在式(54)中引入由 Cameron<sup>[21]</sup> 根据  $B/L$  获得的载荷修正系数  $\kappa$ 。表1给出了  $B/L$  与  $\kappa$  的对应值。

无侧向泄漏时,  $B/L=0$ 。考虑侧向泄漏情况下的载荷可以表示为:

表1 载荷修正系数

Tab.1 Correction coefficient of loads

$B/L$	$\kappa$
1	0.421
5/6	0.498
2/3	0.580
1/2	0.633
2/5	0.748
1/3	0.790
1/4	0.845
1/5	0.874
1/10	0.937
0	1

$$W_f = \kappa \frac{\eta}{h_2^3} \frac{\phi_c}{\phi_x} \frac{dh_2}{dt} LB^3 \quad (55)$$

对式(55)进行修正并无量纲化:

$$W_f^* = \frac{W_f}{A_a E_l} = \frac{\kappa}{A_a E_l} \frac{\eta}{\phi_x} \frac{dh_2}{h_2^3 dt} LB^3 \quad (56)$$

式中  $E_l$  为润滑介质的弹性模量, 且有  $\frac{1}{E_l} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} - \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)$ 。

对式(56)求导, 则流体法向刚度为<sup>[22]</sup>:

$$K_l^* = \frac{dW_f^*}{dh_2^*} = \frac{3B^2 \kappa \eta}{E_l h_2^{4*}} \frac{dh_2^*}{dt} (A_r^{*-1} - 1) \quad (57)$$

式中  $h_2^*$  为润滑介质的无量纲厚度,  $h_2^* = \frac{h}{h_0}$ 。

结合面无量纲法向接触总刚度为:

$$K_n^* = K_a^* + K_l^* \quad (58)$$

## 5 分析结果与讨论

图8为不同分形参数  $D$  下  $A_r^*$  与  $K_n^*$  的关系曲线, 分别选取  $A_r^* = 0 \sim 0.5$ ,  $\eta = 0.018 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,  $G^* = 1 \times 10^{-9}$ ,  $\varphi = 0.1$ ,  $D = 1.2 \sim 1.9$ 。图9为分形维数  $D = 1.4$  时  $G^*$  与  $K_n^*$  的关系曲线, 分别选取  $G^*$  为  $1 \times 10^{-9}$ ,  $1 \times 10^{-10}$ ,  $1 \times 10^{-11}$ 。图10为分形维数  $D = 1.6$  时  $\eta$  与  $K_n^*$  的关系曲线, 分别选取  $\eta$  为  $0.018$ ,  $0.15$  和  $0.4 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ 。图11为分形维数  $D = 1.4$  时  $\varphi$  与  $K_n^*$  的关系曲线, 分别选取  $\varphi$  为  $0.01$ ,  $0.1$ ,  $1$ 。图12为分形维数  $D = 1.6$  时  $A_r^*$  与  $K^*$  的关系曲线, 其中  $K^*$  包括结合面的无量纲法向接触总刚度  $K_n^*$ 、固体接触刚度  $K_a^*$  与流体刚度  $K_l^*$ 。图13为润滑介质侧向泄漏对  $K_n^*$  的影响曲线。图14为结合面纹理方向对  $K_n^*$  的影响曲线。

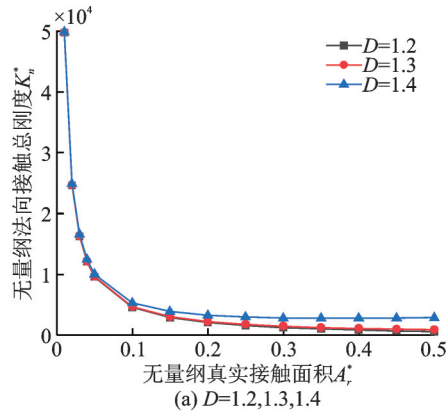
对图8~14进行分析可得如下结果:

(a) 根据图8可知, 当  $D < 1.4$  时, 随着  $A_r^*$  的增大  $K_n^*$  反而减小; 当  $D > 1.4$  时, 随着  $A_r^*$  的增大  $K_n^*$  呈现先减小后增大的趋势。由图8还可以看出, 当  $D < 1.7$  时,  $K_n^*$  与  $A_r^*$  具有明显的非线性关系; 当  $D > 1.7$  时,  $K_n^*$  与  $A_r^*$  呈近似线性关系。

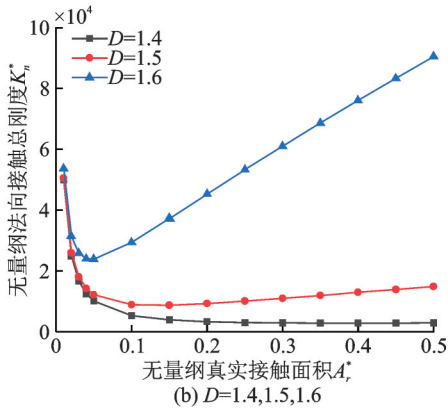
(b) 根据图9可知, 随着  $G^*$  的增大  $K_n^*$  反而减小, 这是因为分形粗糙度越大, 结合面越粗糙, 摩擦系数越大, 导致结合面的法向接触刚度降低。

(c) 根据图10可知, 随着  $\eta$  的增大  $K_n^*$  也在逐渐增大。

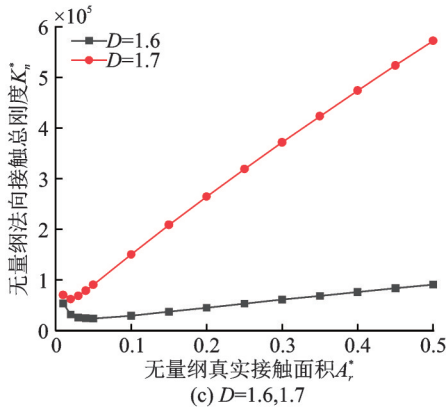
(d) 根据图11可知, 当  $\varphi$  增大,  $K_n^*$  也随之增大, 材料的屈服强度增大, 无量纲临界接触面积呈现减小的趋势。粗糙表面间弹性接触面积的增加, 导致



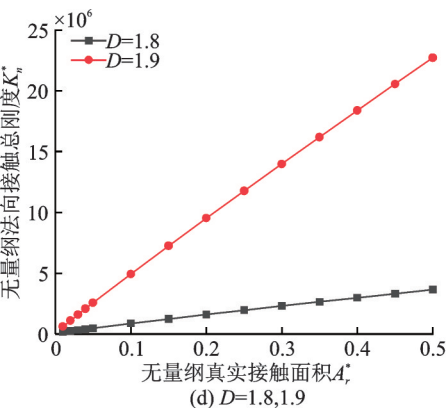
(a)  $D=1.2, 1.3, 1.4$



(b)  $D=1.4, 1.5, 1.6$



(c)  $D=1.6, 1.7$



(d)  $D=1.8, 1.9$

图8  $D, A_r^*$ 对  $K_n^*$  的影响

Fig. 8 Influence of  $D$  and  $A_r^*$  on  $K_n^*$

结合面的法向接触刚度增大。

(e) 图12为  $K_n^*, K_a^*, K_l^*$  与  $A_r^*$  的关系曲线。当  $A_r^* < 0.05$  时,  $K_l^*$  对  $K_n^*$  的影响较大; 随着  $A_r^*$  逐渐增大,  $K_a^*$  逐渐成为影响  $K_n^*$  的主要因素。

(f) 根据图13可知, 与考虑润滑介质侧向泄漏

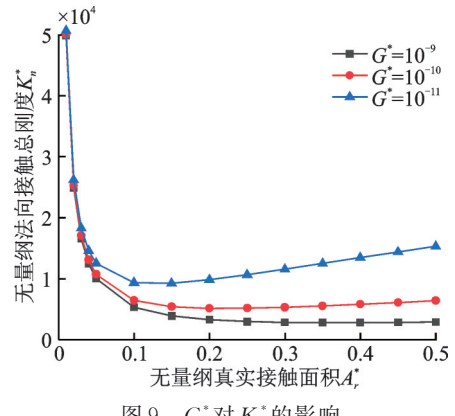


图9  $G^*$ 对  $K_n^*$  的影响

Fig. 9 Influence of  $G^*$  on  $K_n^*$

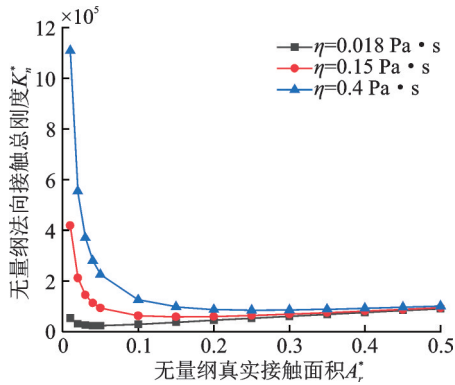


图10  $\eta$ 对  $K_n^*$  的影响

Fig. 10 Influence of  $\eta$  on  $K_n^*$

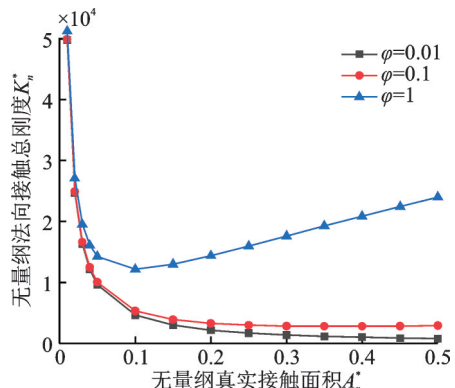


图11  $\phi$ 对  $K_n^*$  的影响

Fig. 11 Influence of  $\phi$  on  $K_n^*$

时的  $K_n^*$  相比, 不考虑润滑介质侧向泄露时的  $K_n^*$  较大。这是因为不考虑润滑介质侧向泄露时的法向载荷为式(56), 考虑润滑介质侧向泄露时的法向载荷为式(57)。公式(57)在公式(56)的基础上引入取值范围在0.421~1之间的修正系数  $\kappa$ 。但随着真实接触面积的增加, 两种情况下的  $K_n^*$  越来越接近。

(g) 由图14可以看出, 若考虑结合面加工纹理方向为各向同性, 则整个结合面的法向接触载荷和法向接触刚度都将增大, 但增大的趋势不明显。这是因为各向同性结合面只是正交各向异性结合面的



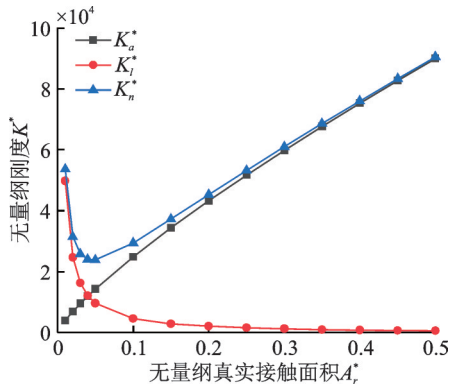


图 12  $A_r^*$  与  $K^*$  的关系

Fig. 12 Relationship between  $A_r^*$  and  $K^*$

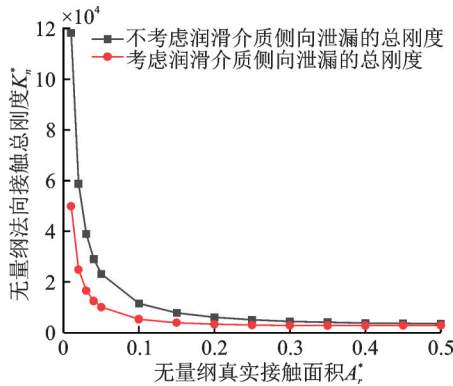


图 13 润滑介质侧向泄漏对  $K_n^*$  的影响

Fig. 13 Influence of the lateral leakage of lubricating medium on  $K_n^*$

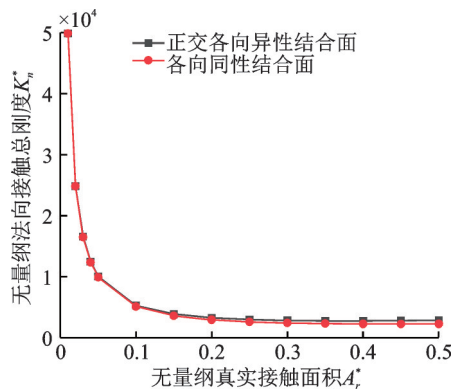


图 14 结合面纹理方向对  $K_n^*$  的影响

Fig. 14 Influence of texture direction of joint surface on  $K_n^*$

一种特殊情况。

## 6 试验及有限元验证

图 15 中的试验装置包含两个金属板与四个 M20 螺栓。上、下试样用螺栓固定,两金属板接触面为具有正交各向异性特性的平面磨削表面。

上金属板的材料为钢,下金属板的材料为铸铁。上下金属板长 400 mm,宽 300 mm,厚度分别为 25 mm 和 40 mm。两个金属板表面并未完全接

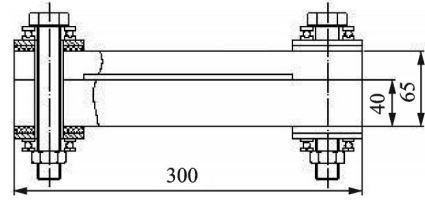


图 15 试验装置示意图 (单位:mm)

Fig. 15 Schematic diagram of the experimental device (Unit:mm)

触,在上金属板的接触表面加工凹槽,凹槽尺寸为宽 200 mm,深 5 mm,上、下金属板的材料特性参数如表 2 所示。

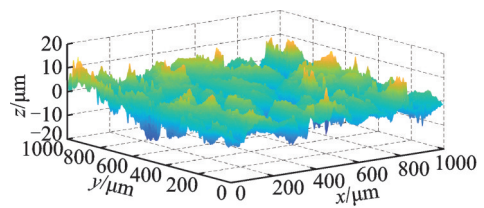
表 2 金属板的机械性能

Tab. 2 Mechanical properties of metal planes

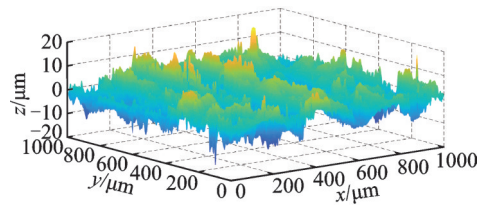
金属板	弹性模量/ GPa	泊松比 $\nu$	密度/ ( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )	屈服强度/ MPa	硬度/ MPa
上金属板	207	0.28	8100	353	500
下金属板	101	0.245	6980	240	700

### 6.1 试样表面形貌分析

本文选用徕卡共聚焦显微镜 DCM3D 对试样真实表面进行测量。采样间隔在  $x, y$  方向均为  $1\ \mu\text{m}$ ,  $z$  方向均为  $0\ \mu\text{m}$ ,采样区域为  $1000 \times 1000\ \mu\text{m}^2$ 。图 16 为试样表面的轮廓图。图 17 为上、下试样的表面轮廓曲线。



(a) 上试样表面形貌  
(a) Surface profile of upper specimen



(b) 下试样表面形貌  
(b) Surface profile of lower specimen

图 16 三维正交各向异性表面形貌

Fig. 16 Three-dimensional orthotropic surface profile

本文使用功率谱密度法(PSD)<sup>[21]</sup>得到上、下试样的分形维数  $D$  分别为 1.855 和 1.903,分形粗糙度  $G$  分别为  $7.837 \times 10^{-11}$  和  $2.041 \times 10^{-10}$ 。

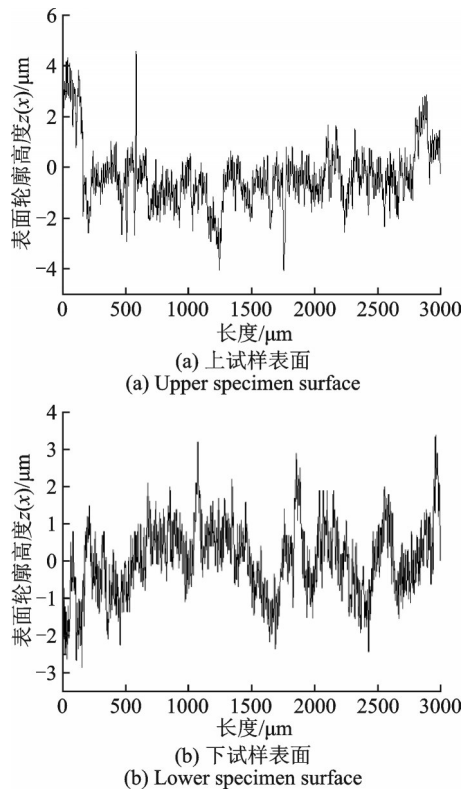


图17 试样的表面形貌曲线

Fig. 17 Profile curve of specimen surface

6.2 试验模态分析

锤击法模态试验装置如图18所示。在金属板表面布置9个激振点,并在金属板边缘均匀排布8个加速度传感器拾振,传感器的相关参数如表3所示。

使用阿尔泰 USB2085 动态数据采样仪对数据进行采集和转化。最后对已获取信号进行时域、频域分析来获取模型的固有频率。



图18 锤击法试验装置

Fig. 18 Experimental device of hammer pulse method

表3 IC压电式加速度传感器相关参数

Tab. 3 Parameters of IC piezoelectric acceleration sensors

仪器相关参数	参数数值
采样频率/Hz	0.7~10000
量程/g	50
灵敏度/(mV·g <sup>-1</sup> )	100
分辨率/g	0.0002

结合面法向面压选取最大值 1.0 MPa, 试验中接触面的名义接触面积为 0.08619 m<sup>2</sup>, 每个螺栓上的拧紧力矩为 86.2 N·m。试验振型如图19所示, 从上到下分别为第一阶振型, 第二阶振型, 第三阶振型。

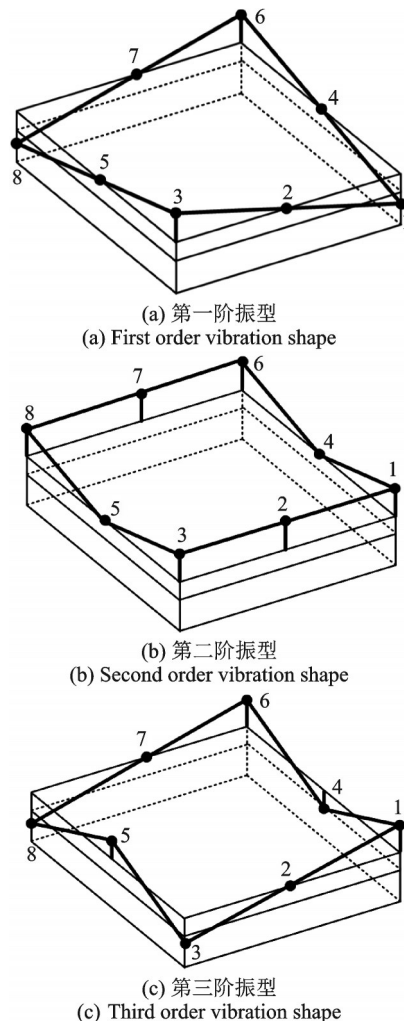


图19 试验振型图

Fig. 19 Vibration shapes from experiments

6.3 有限元建模及结果

对上述试验装置进行有限元建模分析<sup>[1,23]</sup>。本文应用文献[24-26]提出的虚拟材料的方法, 将结合面刚度模型用以下参数来等效:

(1)法向弹性模量:

$$E_n = K^* E \frac{h_3}{\sqrt{A_a}} \tag{59}$$

式中  $h_3$  表示虚拟接触层等效厚度;  $K^*$  表示结合部单元一法向接触刚度。

(2)切向弹性模量:

$$E_\tau = \frac{D\phi^{2-D} a_l}{A_a(2-D)} E \tag{60}$$

(3)切变模量:

$$G_{\tau} = K_i^* \bar{G} \frac{h_3}{\sqrt{A_a}} \quad (61)$$

式中  $K_i^*$  表示结合部无量纲切向接触刚度,  $\bar{G}$  表示等效剪切模量。

(4)法向泊松比:

$$\nu_n = -\frac{\epsilon_x}{\epsilon_z} \quad (62)$$

式中  $\epsilon_x$  表示法向应变, 分析得  $\epsilon_x = 0$ , 则式(62)为0。

(5)切向泊松比:

$$\nu_{\tau} = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} \quad (63)$$

式中  $\epsilon_y$  表示切向应变, 分析得  $\epsilon_y = 0$ , 则式(63)为0。

(6)虚拟材料厚度为1 mm。

选择8节点的SOLID185类型单元,将模型划分为11140个单元,其中虚拟薄层数量为852个,如图20所示。

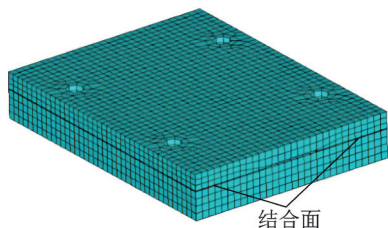


图20 含虚拟接触层的有限元模型

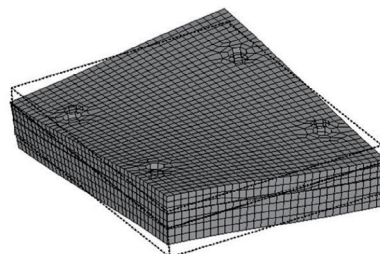
Fig. 20 Finite element model containing virtual contact layer

将非线性的有限元模型线性化后,建立包含常刚度接触层的有限元整机线性模型。通过对整机线性模型的模态分析获得包含接触层影响的整机振型。图21为有限元仿真第一阶到第三阶振型。

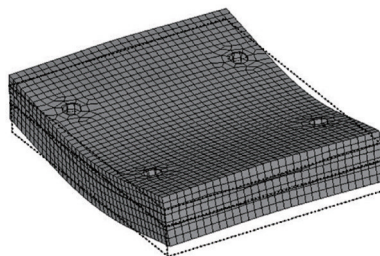
图22为有限元仿真计算流程。首先,建立粗糙表面接触特性理论模型。其次,基于虚拟材料法建立包含粗糙表面接触特性的有限元整机结构模型。通过非线性静力分析获得接触层在工作载荷下的接触刚度。其中,接触刚度包含固体部分的接触刚度和基于接触变形求得的流体刚度,此时的接触刚度为非线性。由于整机结构在工作时的载荷波动远小于静载荷,可以认为结构工作时的接触层刚度保持不变,这样非线性的有限元模型可以线性化。最后,静力分析获得的接触层刚度可以导入到模态分析模型中,这样得到的包含虚拟材料接触层的有限元整机模态分析模型是一个线性模型。通过对整机线性模型的模态分析可以获得包含接触层影响的整机振型和固有频率。

### 6.4 试验结果对比

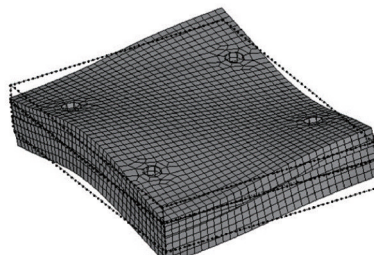
为了验证本文建立模型的有效性,将有限元仿



(a) 第一阶振型  
(a) First order vibration shape



(b) 第二阶振型  
(b) Second order vibration shape



(c) 第三阶振型  
(c) Third order vibration shape

图21 有限元仿真振型图

Fig. 21 Vibration shapes from FEA

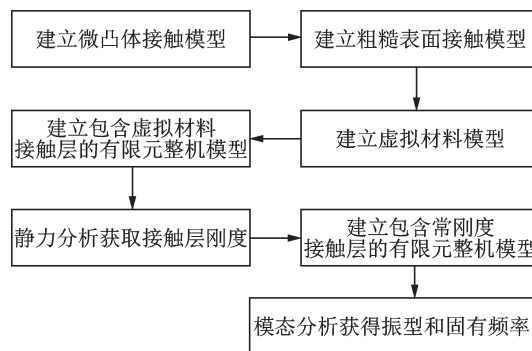


图22 有限元仿真计算流程

Fig. 22 Calculation process of finite element simulation

真固有频率与试验获得的固有频率进行对比。

表4中对比了拧紧力矩分别为10, 20, 30 N·m的有限元仿真固有频率与试验获得的固有频率。由表4可以看出,含润滑介质条件下的试验和有限元仿真获得的固有频率比不含润滑介质条件下的试验和有限元仿真获得的固有频率更高。这是因为在含润滑介质的正交各向异性结合面的法向接触总刚度的计算中,不仅考虑了微凸体的接触刚度,还考虑了润滑介质的刚度。



表4 有限元仿真固有频率与试验获得的固有频率对比

**Tab. 4 Comparison of finite element simulation natural frequency and experimental natural frequency**

力矩/(N·m)	阶数	含润滑介质试验/Hz	无润滑介质试验/Hz	含润滑介质有限元/Hz	无润滑介质有限元/Hz
10	1	910	828	875	798
	2	1221	1093	1208	1055
	3	1688	1453	1677	1490
20	1	1048	937	1033	961
	2	1390	1265	1341	1236
	3	2134	2015	2102	2006
30	1	1095	984	1050	1015
	2	1533	1421	1496	1386
	3	2201	2062	2186	2087

表5给出了含润滑介质条件下有限元仿真固有频率与试验固有频率的相对误差。由表5可以看出,在螺栓分别承受力矩为10, 20, 30 N·m工况下,含润滑介质条件下有限元仿真固有频率与试验固有频率的相对误差在0.65%~4.11%之间。

表5 含润滑介质条件下有限元仿真固有频率与试验固有频率的相对误差

**Tab. 5 Relative error of finite element simulation natural frequency and experimental natural frequency with lubricated media**

力矩/(N·m)	阶数	含润滑介质条件下的相对误差/%
10	1	3.84
	2	1.06
	3	0.65
20	1	1.43
	2	3.53
	3	1.49
30	1	4.11
	2	2.41
	3	0.68

图23是根据含润滑介质、无润滑介质情况下固有频率之间的相对误差拟合出的曲线。由图23可以看出,不论是试验测量还是有限元仿真获得的固有频率都随着预紧力的增大而增大,这是因为增大

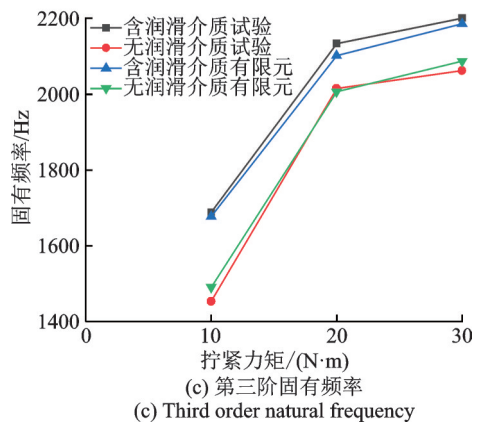
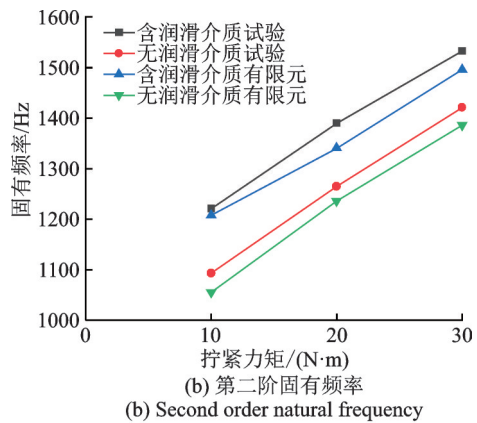
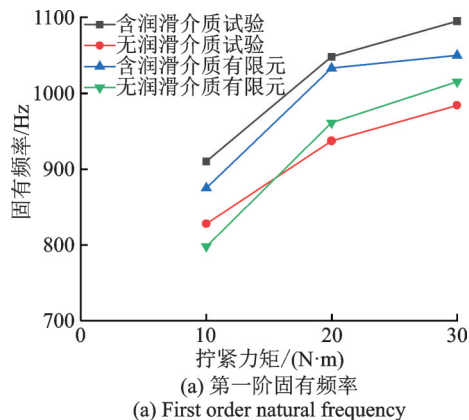


图23 不同预紧力下前三阶固有频率对比

Fig. 23 Comparison of the first three order natural frequencies under different preloads

螺栓的预紧力会使结合面的实际接触面积增大,导致结合面的接触刚度变大,从而使系统的固有频率增大。

## 7 结论

(1)对影响结合面的法向接触刚度的不同因素分析得出:当结合面刚发生接触时,流体刚度对结合面的法向接触刚度的影响较为明显,随着接触压力升高,固体接触刚度成为影响结合面的法向接触刚度的主要因素。

(2)含润滑介质的正交各向异性结合面的法向接触刚度 $K_n^*$ 与 $D$ ,  $\eta$ 及 $\varphi$ 呈单调递增关系,与 $G^*$ 呈单调递减关系。

(3)在含润滑介质的正交各向异性结合面的法向接触总刚度的计算中,不仅考虑了微凸体的接触刚度,还考虑了润滑介质的影响,因此,含润滑介质条件下的试验和有限元仿真获得的固有频率,比不含润滑介质条件下的试验和有限元仿真获得的固有频率有显著提高,表明整机分析中有必要考虑结合面中润滑介质的影响。

(4)含润滑介质条件下,有限元仿真的前三阶振型与模态试验的前三阶振型一致,有限元仿真的固有频率与模态试验的固有频率相比,最大相对误差为4.11%,证明本文提出的含润滑介质的正交各向异性结合面的法向接触刚度模型是合理的,可以较准确地预测结合面的接触性能。

#### 参考文献:

- [1] 王世军,赵金娟. 机械工程中的有限元方法[M]. 北京: 科学出版社, 2019: 239-241.  
Wang Shijun, Zhao Jinjuan. Finite Element Methods in Mechanical Engineering [M]. Beijing: Science Press, 2019: 239-241.
- [2] Chung J C, Lin J F. Fractal model developed for elliptical elastic-plastic asperity microcontacts of rough surfaces [J]. Journal of Tribology, 2004, 126(4): 646-654.
- [3] Buczkowski R, Kleiber M. Elasto-plastic statistical model of strongly anisotropic rough surfaces for finite element 3D-contact analysis [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, 195 (37-40): 5141-5161.
- [4] 王世军,赵金娟,张慧军,等. 一种结合部法向刚度的预估方法[J]. 机械工程学报, 2011, 47(21): 111-115.  
WANG Shijun, ZHAO Jinjuan, ZHANG Huijun, et al. A prediction method for the normal stiffness of the joint [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47 (21): 111-115.
- [5] 刘伟强,张进军,洪军,等. 椭圆抛物物体形微凸体弹性接触力学模型[J]. 西安交通大学学报, 2015, 49 (10): 34-40.  
LIU Weiqiang, ZHANG Jinjun, HONG Jun, et al. Elastic contact mechanics model for elliptical parabolic asperity bodies [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2015, 49(10): 34-40.
- [6] 谭文兵,兰国生,张学良,等. 依据各向异性分形理论的固定结合面椭圆弹塑性法向接触刚度建模及仿真分析[J]. 固体力学学报, 2021, 42(1): 63-76.  
TAN Wenbing, LAN Guosheng, ZHANG Xueliang, et al. Modeling and simulation analysis of elliptical normal contact stiffness of fixed bond surfaces based on anisotropic fractal theory [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2021, 42(1): 63-76.
- [7] 屈重年,伍良生,马建峰,等. 基于分形理论多孔含油介质结合面动态刚度研究[J]. 北京工业大学学报, 2013, 39(7): 976-980.  
QU Chongnian, WU Liangsheng, MA Jianfeng, et al. Study on the dynamic stiffness of the bond surface of porous oil-bearing media based on fractal theory [J]. Journal of Beijing University of Technology, 2013, 39(7): 976-980.
- [8] 高志强,路泽鑫,傅卫平,等. 固-液结合面法向动态接触刚度及阻尼的理论模型与实验分析[J]. 固体力学学报, 2021, 42(6): 682-696.  
GAO Zhiqiang, LU Zexin, FU Weiping, et al. Theoretical model and experimental analysis of normal dynamic contact stiffness and damping of solid-liquid bond surfaces [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2021, 42(6): 682-696.
- [9] 李玲,裴喜永,史小辉,等. 混合润滑状态下结合面法向动态接触刚度与阻尼模型[J]. 振动工程学报, 2021, 34(2): 243-252.  
LI Ling, PEI Xiyong, SHI Xiaohui, et al. Dynamic contact stiffness and damping model normal to the bond surface under mixed lubrication [J]. Journal of Vibration Engineering, 2021, 34(2): 243-252.
- [10] Johnson K L, Greenwood J A, Poon S Y. A simple theory of asperity contact in elastohydro-dynamic lubrication [J]. Wear, 1972, 19(1): 91-108.
- [11] Johnson K L. Contact Mechanics [M]. London: Cambridge University Press, 1985: 79-128.
- [12] 韩子锐. 应用椭球面接触系数的各向异性结合面接触特性研究[D]. 西安: 西安理工大学, 2021.  
HAN Zirui. Study on contact characteristics of anisotropic bonding surfaces by applying ellipsoidal contact coefficients [D]. Xi'an: Xi'an University of Technology, 2021.
- [13] Majumdar A A, Bhushan B. Role of fractal geometry in roughness characterization and contact mechanics of surfaces [J]. Journal of Tribology, 1990, 112(2): 205-216.
- [14] Majumdar A, Bhushan B. Fractal model of elastic-plastic contact between rough surfaces [J]. Journal of Tribology, 1991, 113(1): 1-11.
- [15] Wang S, Komvopoulos K. A fractal theory of the interfacial temperature distribution in the slow sliding regime: part I—elastic contact and heat transfer analysis [J]. Journal of Tribology, 1994, 116(4): 812-822.
- [16] Wang S, Komvopoulos K. A fractal theory of the interfacial temperature distribution in the slow sliding regime: part II—multiple domains, elastoplastic contacts



- and applications [J]. *Journal of Tribology*, 1994, 116(4): 824-832.
- [17] 李志涛, 王世军, 韩子锐, 等. 应用改进分形理论及连续变形理论的机械结合面切向刚度建模[J]. *西安交通大学学报*, 2020, 54(6): 107-114.
- LI Zhitao, WANG Shijun, HAN Zirui, et al. Modeling of tangential stiffness of mechanical joint surface using improved fractal theory and continuous deformation theory [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2020, 54(6): 107-114.
- [18] 张学良, 陈永会, 温淑花, 等. 考虑弹塑性变形机制的结合面法向接触刚度建模[J]. *振动工程学报*, 2015, 28(1): 91-99.
- ZHANG Xueliang, CHEN Yonghui, WEN Shuhua, et al. A normal contact stiffness model for bond surfaces considering elastic-plastic deformation mechanism [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2015, 28(1): 91-99.
- [19] 温诗铸, 黄平. 摩擦学原理[M]. 2版. 北京: 清华大学出版社, 2002.
- Wen Shizhu, Huang Ping. *Tribology Principle* [M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.
- [20] Wang Q J, Zhu D, Cheng H S, et al. Mixed lubrication analyses by a macro-micro approach and a full-scale mixed EHL modal[J]. *Journal of Tribology*, 2016, 126(1): 81-91.
- [21] Cameron A. *Basic Lubrication Theory*[M]. 3rd ed. London: Ellis Horwood Press, 1981: 143-144.
- [22] 卫娟娟. 含油结合面的接触特性研究[D]. 西安: 西安理工大学, 2021.
- WEI Juanjuan. Study on the contact characteristics of oil-bearing bond surfaces[D]. Xi'an: Xi'an University of Technology, 2021.
- [23] 赵金娟, 王世军, 杨超, 等. 基于横观各向同性假定的固定结合部本构关系及有限元模型[J]. *中国机械工程*, 2016, 27(8): 1007-1011.
- Zhao Jinjuan, Wang Shijun, Yang Chao, et al. Fixed bond natural structure relationship and finite element model based on transverse isotropic assumption[J]. *China Mechanical Engineering*, 2016, 27(8): 1007-1011.
- [24] 张学良, 范世荣, 温淑花, 等. 基于等效横观各向同性虚拟材料的固定结合部建模方法[J]. *机械工程学报*, 2017, 53(15): 141-147.
- Zhang Xueliang, Fan Shirong, Wen Shuhua, et al. A fixed bond modeling method based on equivalent transverse isotropic virtual material [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2017, 53(15): 141-147.
- [25] 贾文峰, 张学良, 温淑花, 等. 基于虚拟材料的结合面建模与参数获取方法[J]. *太原科技大学学报*, 2013, 34(5): 347-351.
- Jia Wenfeng, Zhang Xueliang, Wen Shuhua, et al. Virtual material-based bond surface modeling and parameter acquisition method [J]. *Journal of Taiyuan University of Science and Technology*, 2013, 34(5): 347-351.
- [26] 田红亮, 刘芙蓉, 方子帆, 等. 引入各向同性虚拟材料的固定结合部模型[J]. *振动工程学报*, 2013, 26(4): 561-573.
- Tian Hongliang, Liu Furong, Fang Zifan, et al. Introduction of isotropic virtual materials for fixed bond models [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2013, 26(4): 561-573.

## Contact characteristics of orthotropic joint with lubrication medium

WANG Shi-jun<sup>1</sup>, CUI Sheng-qi<sup>1</sup>, WU Jing-wei<sup>2</sup>, WEI Juan-juan<sup>1</sup>, LI Peng-yang<sup>1</sup>

(1.School of Mechanical and Precision Instrument Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China;

2.Technology Department, Xi'an Kunlun Industry (Group) Co., Ltd., Xi'an 710043, China)

**Abstract:** A fractal model of normal contact stiffness of orthotropic joint with lubrication medium is proposed. The model adopts the Hertz contact theory with elliptic correction factor, and based on the mean Reynolds equation with lateral leakage of the lubrication medium. Then, deducing the analytical relationship between the solid contact stiffness and the fluid stiffness. By means of analyzing the influence of different factors on the normal contact stiffness of joint, it is found that when the dimensionless real contact area between solids is less than 0.05, the normal contact stiffness of joint is mainly affected by fluid stiffness. With the occurrence of lateral leakage of lubrication medium, real contact area between solids is gradually large, and the influence of solid contact stiffness on the normal contact stiffness of the joint becomes more and more significant. Giving different normal preload and comparing the first three orders of natural frequencies obtained from experiments and finite element analysis, the maximum relative error between frequencies is 4.11%, which proves that the model proposed in this paper can predict the contact performance of joint more accurately.

**Key words:** ellipsoidal asperity; Hertz contact theory; normal contact stiffness; mean Reynolds equation; finite element method

**作者简介:** 王世军(1967—),男,博士,副教授,硕士生导师。电话:13468810607; E-mail: wsjxaut@qq.com。