

# 周期与色噪声联合作用下分数阶 Duffing 振子 非平稳响应的无记忆方法

李书进<sup>1</sup>, 张志聪<sup>1</sup>, 孔凡<sup>2</sup>, 韩仁杰<sup>1</sup>

(1. 武汉理工大学土木工程与建筑学院, 湖北 武汉 430070;

2. 合肥工业大学土木与水利工程学院, 安徽 合肥 230009)

**摘要:** 基于统计线性化提出了一种求解周期与色噪声激励联合作用下分数阶 Duffing 系统非平稳响应的无记忆方法。将系统响应分解为确定性周期和零均值随机分量之和, 则原非线性运动方程可等效地化为一组耦合的、分别以确定性和随机动力响应为未知量的分数阶微分方程。利用无记忆化方法将确定性和随机分数阶微分方程转化为相应的常微分方程。利用统计线性化方法处理随机常微分方程, 得到关于随机响应二阶矩的李雅普诺夫方程。利用数值算法联立求解李雅普诺夫微分方程和确定性常微分方程。通过 Monte Carlo 模拟, 验证此方法的适用性和精度。

**关键词:** 非平稳响应; 分数阶系统; 无记忆方法; 统计线性化; 联合激励

**中图分类号:** O324; O322 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2023)04-0923-11

**DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2023.04.005

## 引言

分数阶微积分近几十年在工程界得到广泛的关注<sup>[1]</sup>。分数阶微积分的一个重要工程应用是黏弹性材料的力学模型的建立。与标准线性固体模型(Standard Linear Solid Model)相比, 分数阶导数模型能以较少的参数拟合实验获得黏弹性松弛和蠕变数据<sup>[2]</sup>; 此外, 分数阶微分方程可很好地描述动力激励下装备黏弹性控制装置(如: 天然橡胶支座<sup>[3]</sup>、黏滞阻尼器<sup>[4]</sup>和黏弹性阻尼器<sup>[5-6]</sup>等)的动力行为。因此, 研究这类分数阶运动方程的求解方法成为学者们关注的重点。然而, 大量研究集中在分数阶运动方程的确定性分析<sup>[7-8]</sup>, 关于它们的随机分析尚较少涉及。分数阶线性系统的随机动力响应可采用频域方法<sup>[9]</sup>和时域方法<sup>[10]</sup>, 它们可视为整数阶系统经典线性随机方法的延伸。同样地, 分数阶非线性系统的随机分析方法, 如统计线性化<sup>[11]</sup>、随机平均法<sup>[12-13]</sup>、路径积分<sup>[14]</sup>等也可视为整数阶系统经典非线性方法的扩展。最近, Kong 等在 Monte Carlo 模拟的框架下提出了分数阶线性或非线性系统平稳响应的多谐波平衡方法<sup>[15]</sup>和非平稳响应的小波-Galerkin 法<sup>[16]</sup>。此外, 还有一些非经典方法, 如利用特征向量展开求解具有 1/2 阶分数阶阻尼的单自由度系统的确定性<sup>[17]</sup>和随机响应<sup>[18]</sup>。

与整数阶导数不同, 分数阶导数的一个重要特性在于其记忆性, 即当前状态的分数阶导数依赖于所有历史状态, 它导致了求解确定性分数阶微分方程的长时响应非常耗时。为此, 人们发展了一种处理分数阶导数的无记忆法, 即采用变量代换将分数阶导数等效地转化为若干整数阶导数。这种方法最早由 Yuan 等<sup>[19]</sup>在确定性分数阶系统动力响应分析的背景下提出。随后, 大量研究集中于解释该方法的等效力学模型<sup>[20]</sup>、提高计算精度<sup>[21-22]</sup>和改进计算效率<sup>[23]</sup>等方面。文献[24]将这种方法应用于线性随机振动; 文献[25]将这种方法应用于非线性系统随机动力响应的 Monte Carlo 模拟。

另一方面, 实际工程中存在系统或结构受到确定性和随机激励联合作用的情况。研究者们主要关注白噪声作用下非线性系统的平稳响应密度函数解<sup>[26]</sup>和系统稳定性<sup>[27]</sup>。最近, 考虑到工程随机动力系统的特殊性, 人们发展了联合激励下整数阶非线性集中质量系统平稳响应的统计线性化方法<sup>[28]</sup>, 并将其扩展应用于非线性分数阶集中质量<sup>[29]</sup>和连续质量系统<sup>[30]</sup>。这种方法本质上基于统计线性化, 具有处理多种工程随机问题的潜力。随后, 孔凡等将这种方法推广到联合激励下多自由度滞回系统<sup>[31-32]</sup>、非平稳响应<sup>[33]</sup>的情况。

本文利用无记忆方法处理分数阶导数, 并基于统计线性化发展一种联合激励下分数阶 Duffing 振

子非平稳响应的方法。方法的具体步骤如下:首先,将响应分解为周期和随机响应分量的组合,得到两个耦合的、关于周期和随机响应分量的分数阶微分方程;随后,利用无记忆方法将分数阶微分方程去记忆化后转化为不含分数阶项的确定性和随机常微分方程组;接着,利用统计线性化方法处理随机常微分方程组,得到关于随机响应二阶矩的李雅普诺夫方程;最后,同时求解确定性常微分方程组和李雅普诺夫方程可得所有响应分量。

## 1 运动方程分解

单自由度分数阶 Duffing 系统在确定性周期和非平稳随机激励联合作用下的运动方程为:

$$m\ddot{x}(t) + cD^\alpha x(t) + kx(t) + \epsilon kx^3(t) = f(t) + Q(t) \quad (1)$$

式中  $x(t)$  和  $\ddot{x}(t)$  为系统的位移和加速度;  $m$ ,  $c$  和  $k$  分别为质量、阻尼和刚度系数;  $\epsilon$  为非线性强度系数;  $D^\alpha x(t)$  为 Caputo 定义下的分数阶导数, 即:

$$D^\alpha x(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \dot{x}(\tau) d\tau, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2)$$

式中  $\Gamma(\alpha)$  为伽马函数。周期激励  $f(t)$  和非平稳激励  $Q(t)$  分别为:

$$f(t) = \sum_{l=1}^N F_l \sin(\omega_l t + \theta_l), \\ Q(t) = a(t)Q_s(t) \quad (3)$$

式中  $F_l$  为第  $l$  阶谐波激励;  $\omega_l$ ,  $\theta_l$  分别为第  $l$  次谐波的频率和相位;  $Q_s(t)$  为零均值平稳随机过程;

$$a(t) = A[\exp(-\mu_1 t) - \exp(-\mu_2 t)] \quad (4)$$

为调制函数且  $A$  为调制函数峰值, 其中  $\mu_1, \mu_2$  为控制调制函数非平稳性的参数。

将非平稳响应  $x(t)$  表示为:

$$x(t) = \mu_x(t) + \hat{x}(t) \quad (5)$$

式中  $\mu_x$  为确定性响应分量;  $\hat{x}$  为零均值随机响应分量。将式(5)代入式(1)中可得:

$$m(\ddot{\mu}_x + \ddot{\hat{x}}) + cD^\alpha(\mu_x + \hat{x}) + k(\mu_x + \hat{x}) + \epsilon k(\mu_x + \hat{x})^3 = f(t) + Q(t) \quad (6)$$

为方便计算, 省略响应量的时间参数。对式(6)左右两边同时求数学期望得:

$$m\ddot{\mu}_x + cD^\alpha(\mu_x) + k\mu_x + \epsilon k(3\mu_x\sigma_{\hat{x}}^2 + \mu_x^3) = f(t) \quad (7)$$

式中  $\sigma_{\hat{x}}^2$  为  $\hat{x}$  的方差。用式(6)减去式(7)得:

$$m\ddot{\hat{x}} + cD^\alpha(\hat{x}) + k\hat{x} + \epsilon k(\mu_x + \hat{x})^3 - \epsilon k(3\mu_x\sigma_{\hat{x}}^2 + \mu_x^3) = Q(t) \quad (8)$$

可见, 式(7)和式(8)为含有分数阶导数项的耦

合方程。以下利用分数阶导数项的无记忆方法, 将分数阶微分方程去记忆化为不含分数阶导数的常微分方程组。

## 2 分数阶系统无记忆化

式(2)中的伽马函数定义为:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-z} z^{\alpha-1} dz \quad (9)$$

并满足:

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \quad (10)$$

将式(9)和式(10)代入式(2)可得:

$$D^\alpha x(t) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^t \left( \int_0^\infty e^{-z} \left[ \frac{z}{t-\tau} \right]^\alpha \frac{dz}{z} \right) \dot{x}(\tau) d\tau \quad (11)$$

定义:

$$z = (t-\tau)y^2 \quad (12)$$

将式(12)代入式(11)有:

$$D^\alpha x(t) = \frac{2\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty y^{2\alpha-1} \left( \int_0^t e^{-(t-\tau)y^2} \dot{x}(\tau) d\tau \right) dy \quad (13)$$

引入:

$$\phi(y, t) = y^{2\alpha-1} \int_0^t e^{-(t-\tau)y^2} \dot{x}(\tau) d\tau \quad (14)$$

式(13)可化为:

$$D^\alpha x(t) = \frac{2\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty \phi(y, t) dy \quad (15)$$

同理, 式(7)中:

$$D^\alpha(\mu_x) = \frac{2\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty \phi_1(y, t) dy \quad (16)$$

其中:

$$\phi_1(y, t) = y^{2\alpha-1} \int_0^t e^{-(t-\tau)y^2} \dot{\mu}_x(\tau) d\tau \quad (17)$$

式(8)中:

$$D^\alpha(\hat{x}) = \frac{2\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty \phi_2(y, t) dy \quad (18)$$

其中:

$$\phi_2(y, t) = y^{2\alpha-1} \int_0^t e^{-(t-\tau)y^2} \dot{\hat{x}}(\tau) d\tau \quad (19)$$

将式(15)和式(18)分别代入式(7)和式(8)

可得:

$$m\ddot{\mu}_x + \frac{2c\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty \phi_1(y, t) dy + k\mu_x + \epsilon k(3\mu_x\sigma_{\hat{x}}^2 + \mu_x^3) = f(t) \quad (20)$$

$$m\ddot{\hat{x}} + \frac{2c\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty \phi_2(y, t) dy + k\hat{x} +$$

$$\epsilon k(\mu_x + \hat{x})^3 - \epsilon k(3\mu_x \sigma_x^2 + \mu_x^3) = Q(t) \quad (21)$$

进一步将式(17)和(19)对时间求导,可得:

$$\dot{\phi}_1(y, t) = y^{2\alpha-1} \dot{\mu}_x(t) - y^2 \phi_1(y, t) \quad (22)$$

$$\dot{\phi}_2(y, t) = y^{2\alpha-1} \dot{\hat{x}}(t) - y^2 \phi_2(y, t) \quad (23)$$

称式(20)~(23)为分数阶运动方程的无记忆形式。观察式(17)和式(19),可知:

$$\phi_1(y, 0) = 0, \phi_2(y, 0) = 0 \quad (24)$$

联立式(20)~(23)即可解得随机分量与确定性分量。为此,首先,需要在特定离散点  $y_1, y_2, \dots, y_n$  对式(22)和(23)离散;其次,采用微分方程数值算法(初始条件为式(24))求解离散后的方程(共  $2n$  个)并得到  $\phi_1(y_i, t), \phi_2(y_i, t), i = 1, 2, \dots, n$ ;最后,将它们代入式(20)和(21)后求解未知响应量  $\mu_x, \hat{x}$ 。其中,式(20)和(21)中的积分采用在离散点  $y_1, y_2, \dots, y_n$  处的求和近似。文献[24-25]就采用了这种直接离散求和的方式近似分数阶导数无记忆化后的积分。该离散方法虽简单直观,但计算量较大。

为此,对式(20)和式(21)使用高斯-拉盖尔(Gauss-Laguerre)积分公式,即:

$$\int_0^\infty \phi_1(y, t) dy \approx \sum_{i=1}^n w_i e^{y_i} \phi_1(y_i, t) \quad (25)$$

$$\int_0^\infty \phi_2(y, t) dy \approx \sum_{i=1}^n w_i e^{y_i} \phi_2(y_i, t) \quad (26)$$

式中  $w_i$  和  $y_i (i = 1, \dots, n)$  分别为拉盖尔权重和节点。使用式(12)和(13)去记忆化,用式(25)和(26)离散化的方法首先由 Yuan 和 Agrawal 提出,被称为 Yuan-Agrawal 方法<sup>[19]</sup>。该方法适用于分数阶导数  $0 < \alpha < 1$  的情况,且其去记忆化过程为精确求解,而离散化过程则为近似求解,其计算精度会随着拉盖尔积分节点数的增加而增加。

联立式(20),(22)和(25)可得状态空间微分方程:

$$\dot{p}_1 = p_2 \quad (27)$$

$$\dot{p}_2 = \frac{1}{m} f(t) - \frac{k}{m} p_1 - \epsilon k(3p_1 \sigma_x^2 + p_1^3) - \frac{2c \sin(\pi\alpha)}{\pi m} \sum_{i=1}^n w_i e^{y_i} \phi_1(y_i, t) \quad (28)$$

$$\dot{\phi}_1(y_i, t) = y_i^{2\alpha-1} \dot{\mu}_x(t) - y_i^2 \phi_1(y_i, t), \quad (29)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$G(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{k + 3\epsilon k(\sigma_x^2 + \mu_x^2)}{m} & 0 & -\frac{ca_1}{m} & \dots & -\frac{ca_n}{m} \\ 0 & y_1^{2\alpha-1} & -y_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & y_n^{2\alpha-1} & 0 & \dots & -y_n^2 \end{bmatrix} \quad (38)$$

式中  $p = [p_1 \ p_2]^T = [\mu_x \ \dot{\mu}_x]^T$ 。式(28)包含未知量  $\sigma_x$ ,只利用式(27)~(29)无法求解响应。因此,需联立随机响应分量方程求解。

同样地,联立式(21),(23)和式(26)可得到关于随机响应分量的微分方程:

$$m\ddot{\hat{x}} + \frac{2c \sin(\pi\alpha)}{\pi} \sum_{i=1}^n w_i e^{y_i} \phi_2(y_i, t) + k\hat{x} + \epsilon k(\mu_x + \hat{x})^3 - \epsilon k(3\mu_x \sigma_x^2 + \mu_x^3) = Q(t) \quad (30)$$

$$\dot{\phi}_2(y_i, t) = y_i^{2\alpha-1} \dot{\hat{x}}(t) - y_i^2 \phi_2(y_i, t), \quad (31)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

随后,采用统计线性化方法处理无记忆随机微分方程(30)和(31)。

### 3 统计线性化方法

利用统计线性化方法将式(30)化为等效的线性方程:

$$m\ddot{\hat{x}} + \frac{2c \sin(\pi\alpha)}{\pi} \sum_{i=1}^n w_i e^{y_i} \phi_2(y_i, t) + (k + k_e) \hat{x} = Q(t) \quad (32)$$

式中  $k_e$  为等效线性刚度。根据式(30)与式(32)的差别在均方意义上最小的准则<sup>[34]</sup>,并引入响应的高斯假定,有:

$$k_e = E \left[ \frac{\partial (\epsilon k(\mu_x + \hat{x})^3 - \epsilon k(3\mu_x \sigma_x^2 + \mu_x^3))}{\partial \hat{x}} \right] = \frac{3\epsilon k(\sigma_x^2 + \mu_x^2)}{3\epsilon k(\sigma_x^2 + \mu_x^2)} \quad (33)$$

以下考虑  $Q_s(t)$  为白噪声和色噪声的两种情况。

#### 3.1 $Q_s(t)$ 为白噪声

此时,

$$Q_s(t) = w(t) \quad (34)$$

式中  $w(t)$  为功率谱密度为  $S_0$  的白噪声过程。将式(31),(32)化为状态方程的形式,即:

$$\dot{q} = G(t)q + Q(t) \quad (35)$$

式中

$$q = [\hat{x} \ \dot{\hat{x}} \ \phi_2(y_1, t) \ \dots \ \phi_2(y_n, t)]^T \quad (36)$$

$$Q(t) = [0 \ Q(t)/m \ \dots \ 0 \ 0]^T \quad (37)$$

其中,  $a_i = \frac{2\sin(\pi\alpha)}{\pi} \omega_i e^{\nu_i}, i = 1, \dots, n_0$

与式(34)对应的李雅普诺夫方程为:

$$\dot{v} = G(t)v^T + vG(t)^T + \Theta(t) \quad (39)$$

式中  $v$  为  $q$  的协方差矩阵,  $\Theta(t) = [\theta_{ij}]$ , 且有:

$$\theta_{ij} = \begin{cases} \frac{2\pi A^2 [\exp(-\mu_1 t) - \exp(-\mu_2 t)]^2 S_0}{m^2}, & i=j=2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (40)$$

联立式(39)和式(27)~(29), 并利用数值算法(例如龙格-库塔法)求解可同时获得确定响应  $\mu_x$  和随机响应标准差  $\sigma_x$ 。

### 3.2 $Q_s(t)$ 为色噪声

此时, 假定  $Q_s(t)$  的功率谱密度  $S(\omega)$  为金井清谱的形式, 即:

$$S(\omega) = \frac{1 + 4\zeta_g^2 \frac{\omega^2}{\omega_g^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_g^2}\right)^2 + 4\zeta_g^2 \frac{\omega^2}{\omega_g^2}} \cdot S_0 \quad (41)$$

式中  $\zeta_g$  为场地阻尼比,  $\omega_g$  为特征周期。将  $Q_s(t)$  表示为白噪声经过成型滤波器的形式:

$$\nu_1 \dot{\Phi} + \nu_0 \Phi = Q_s(t) \quad (42)$$

$$\ddot{\Phi} + \lambda_1 \dot{\Phi} + \lambda_0 \Phi = \omega(t) \quad (43)$$

式中  $\Phi$  为 2 维滤波器的前置输出;  $\omega(t)$  为功率谱密度为  $S_0$  的零均值高斯噪声;  $\lambda_0, \lambda_1$  和  $\nu_0, \nu_1$  为滤波器参数且  $\nu_0 = \omega_g^2, \nu_1 = 2\zeta_g \omega_g, \lambda_0 = \omega_g^2, \lambda_1 = 2\zeta_g \omega_g$ 。

联立式(31), (32)和式(42), (43)得:

$$\dot{X} = H(t)X + W \quad (44)$$

式中

$$X = [\hat{x} \ \dot{\hat{x}} \ \Phi \ \dot{\Phi} \ \phi_2(y_1, t) \ \phi_2(y_2, t) \ \dots \ \phi_2(y_n, t)]^T,$$

$$H(t) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

$$W = [w_i]_{4+n}, w_i = \begin{cases} 0, & \text{其他} \\ \omega(t), & i = 4 \end{cases}$$

且

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3\epsilon k(\sigma_x^2 + \mu_x^2) + k}{m} & 0 & \frac{a(t)\nu_0}{m} & \frac{a(t)\nu_1}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda_0 & -\lambda_1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{ca_1}{m} & -\frac{ca_2}{m} & \dots & -\frac{ca_n}{m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{4 \times n},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & y_1^{2\alpha-1} & 0 & 0 \\ 0 & y_2^{2\alpha-1} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & y_n^{2\alpha-1} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times 4},$$

$$D = \begin{bmatrix} -y_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -y_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -y_n^2 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

与式(44)对应的李雅普诺夫方程为:

$$\dot{V} = H(t)V^T + VH(t)^T + P \quad (45)$$

式中

$$P = [p_{ij}], p_{ij} = \begin{cases} 2\pi S_0, & i=j=4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases};$$

$V$  为  $X$  的协方差矩阵。联立式(45)和式(27)~(29), 并由数值算法(例如龙格-库塔法)求解可获得未知量  $\mu_x, \sigma_x$ 。

## 4 数值算例

不失一般性, 确定性激励采用单谐波形式, 即:

$$f(t) = F_s \sin(\omega_0 t) \quad (46)$$

式中  $F_s$  为确定性激励幅值,  $\omega_0$  为确定性激励频率。随机激励为均匀调制白噪声或均匀调制色噪声。

### 4.1 $Q_s(t)$ 为白噪声

#### 4.1.1 典型参数设置的情况

选取系统参数  $m = 1, c = 0.4, k = 1, \alpha = 0.5, \epsilon = 0.1$ , 确定性激励参数  $F_s = 0.5, \omega_0 = 1$ , 随机激励参数  $S_0 = 0.4/\pi, A = 1, \mu_1 = 0.1, \mu_2 = 0.2$ 。其中  $m = 1, k = 1$  和  $S_0 = 0.4/\pi$  由归一化处理而来;  $F_s$  选为 0.5, 以使确定性响应与随机响应在一个数量级; 另外, 为使系统处于共振情况, 将确定性激励频率  $\omega_0$  选为 1; 拉盖尔节点数  $n = 2, n = 4$  和  $n = 8$ 。利用独立高斯分布序列生成白噪声样本 10000 条, 并乘以调制函数得到均匀调制白噪声。由所建议方法和蒙特卡罗模拟(Monte Carlo Simulation, MCS)得到位移均值与标准差, 分别如图 1(a) 和图 1(b) 所示。

从图 1(a) 可以看出, 即使当  $n = 2$  时, 本文所建议方法得到的响应均值与蒙特卡罗模拟所得结果吻

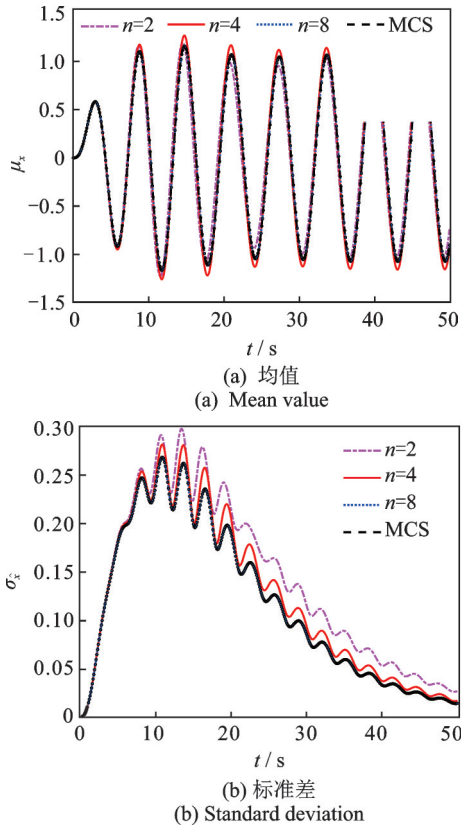


图 1 分数阶 Duffing 振子在谐波与调制白噪声联合作用下的位移

Fig. 1 Displacement of a Duffing oscillator subjected to combined harmonic and modulated white noise

合较好。由图 1(b)可知,建议方法所得的标准差精度随着  $n$  值的增加而提升;当  $n=8$  时,此方法所得到的标准差与 MCS 结果完全吻合。此外,由图 1(b)可见,所建议方法可以很好地捕捉由于突加激励、谐波激励的耦合效应和调制函数引起的非平稳效应。

下面分析该方法在不同参数下的适用性。定义确定性谐波分量模的时间平均为:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \sqrt{\mu^2(t)} dt$$

式中  $T$  为响应持时。

定义随机响应分量标准差的时间平均为:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma(t) dt$$

$T$  过大会导致随机分量标准差的时间平均过小且随各参数变化不明显,因此需对  $T$  的取值加以限制。选定标准差对时间积分占总积分面积 97% 左右的时间点为截止时间  $T$ 。本文中 50 s 时标准差积分占 1000 s 时的 97.34%, 所以截止时间选为 50 s。

4. 1. 2 非线性强度的影响

其他参数与 4.1.1 节选取相同,非线性强度系数  $\epsilon$  取 0~1。采用所建议方法与蒙特卡罗模拟计算得到的确定性响应模的时间平均对比如图 2 所示;标

准差时间平均对比如图 3 所示。

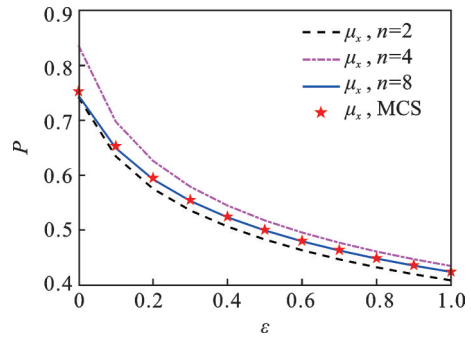


图 2 非线性强度对分数阶 Duffing 振子确定性响应模的时间平均的影响

Fig. 2 Influence of the degree-of-nonlinearity on the time-averaged modulus of the deterministic response component of the fractional-order Duffing oscillator

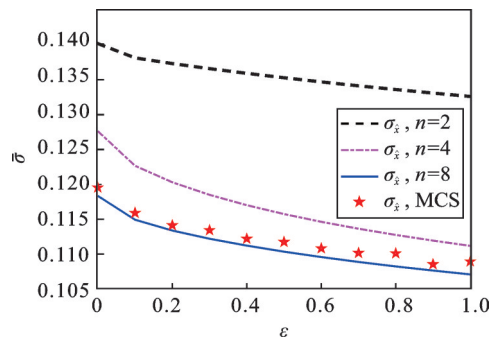


图 3 非线性强度对分数阶 Duffing 振子随机响应标准差时间平均的影响

Fig. 3 Influence of the degree-of-nonlinearity on the time-averaged standard deviation of the stochastic response component of the fractional-order Duffing oscillator

从图 2, 3 可见,在其他参数不变的情况下,确定性响应随非线性强度增加而降低;位移标准差随非线性强度增加而略有降低。在所有非线性强度情况下,所建议方法的精度随着  $n$  的增加而提高; $n=8$  时,两种方法吻合较好。

4. 1. 3 激励幅值的影响

为研究确定性激励幅值对此方法适用性的影响,保持其他参数不变,确定性激励幅值  $F_0$  取 0~2。本文所建议方法与蒙特卡罗模拟计算得到的确定性响应模的时间平均对比如图 4 所示;时变标准差的时间平均对比如图 5 所示。

由图 4, 5 可知,在其他参数不变的情况下,确定性响应随谐波激励幅值增大而增大;位移标准差随谐波激励幅值增大而减小。不同确定性激励幅值下,拉盖尔节点数对随机响应的影响比对确定性响应的的影响更加明显。 $n=8$  时,所建议方法得到的结果与蒙特卡罗模拟高度吻合,显示了该方法在不同确定性响应幅值下的适用性。

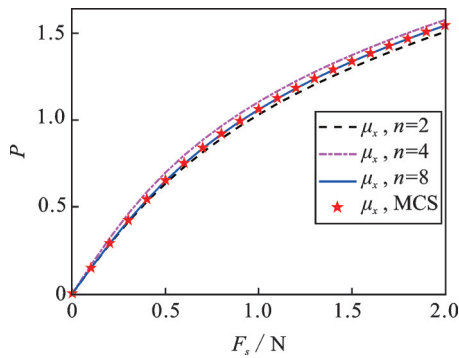


图4 谐波激励幅值对分数阶 Duffing 系统确定性响应模的时间平均的影响

Fig. 4 Influence of the harmonic excitation amplitude on the time-averaged modulus of the deterministic response component of the fractional-order Duffing oscillator

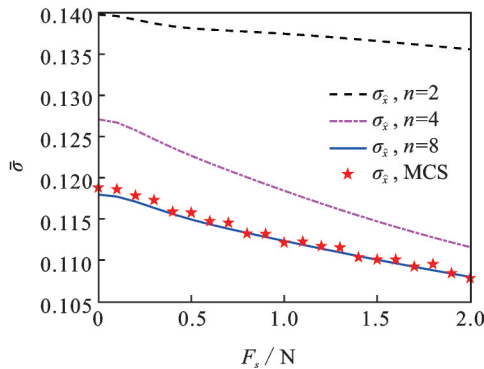


图5 谐波激励幅值对分数阶 Duffing 系统随机响应标准差时间平均的影响

Fig. 5 Influence of the harmonic excitation amplitude on the time-averaged standard deviation of the stochastic response component of the fractional-order Duffing oscillator

#### 4.1.4 确定性谐波激励频率的影响

为研究确定性激励频率对此方法适用性的影响,保持其他参数不变,确定性激励频率  $\omega_0$  取 0.1~2。采用本文建议方法与蒙特卡罗模拟得到的确定性响应分量的模的时间平均对比如图 6 所示;

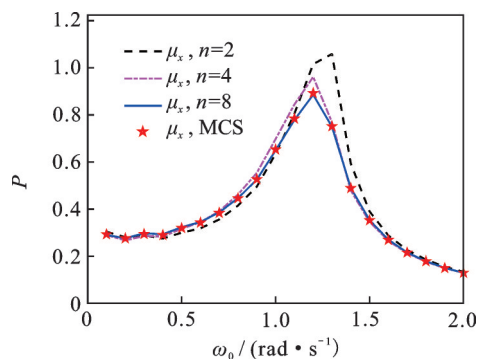


图6 谐波激励频率对分数阶 Duffing 系统确定性响应模的时间平均的影响

Fig. 6 Influence of the harmonic excitation frequency on the time-averaged modulus of the deterministic response component of the fractional-order Duffing oscillator

随机响应非平稳标准差的时间平均如图 7 所示。

由图 6,7 可见,谐波激励频率对确定性响应和随机响应均有较大影响,存在使他们达到极值的谐波激励频率。其中,使确定性响应和随机响应达到最大的谐波激励频率约为 1.2 rad/s。图 6 类似纯谐波激励下非线性振子的“幅频响应曲线”,对于本文考虑的硬化 Duffing 系统呈不对称峰值形态。拉盖尔节点数的增加会明显提高所建议方法的精度;当  $n=8$  时,在共振和非共振频率下本文建议方法与蒙特卡罗模拟所得结果均吻合较好。

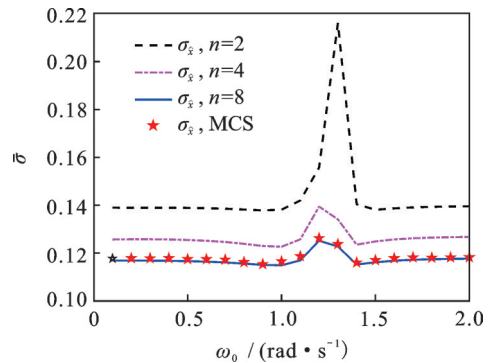


图7 谐波激励频率对分数阶 Duffing 系统随机响应标准差时间平均的影响

Fig. 7 Influence of the harmonic excitation frequency on the time-averaged standard deviation of the stochastic response component of the fractional-order Duffing oscillator

#### 4.1.5 随机激励强度的影响

为研究随机激励强度对此方法适用性的影响,保持其他参数不变,功率谱强度  $S_0$  取  $10^{-4} \sim 10^2$ 。采用本文所建议方法与蒙特卡罗模拟得到的确定性响应模的时间平均对比如图 8 所示;随机响应时变标准差的时间平均对比如图 9 所示。

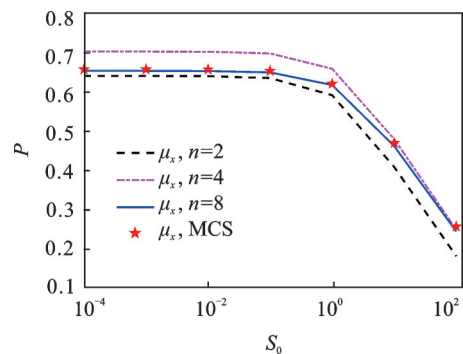


图8 随机激励功率谱强度对分数阶 Duffing 系统确定性响应模的时间平均的影响

Fig. 8 Influence of the stochastic excitation power spectral density on the time-averaged modulus of the deterministic response component of the fractional-order Duffing oscillator

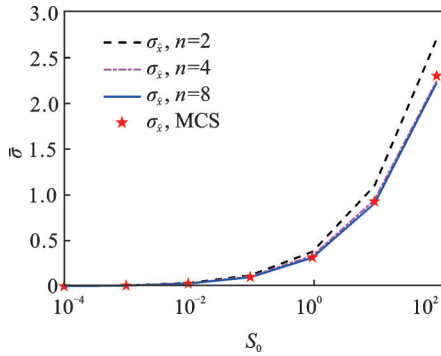


图9 随机激励功率谱强度对分数阶Duffing系统随机响应标准差时间平均的影响

Fig.9 Influence of the stochastic excitation power spectral density on the time-averaged standard deviation of the stochastic response component of the fractional-order Duffing oscillator

由图8,9可知,随机激励功率谱强度对确定性响应和随机响应均有一定影响:随机激励谱强度的增大会使确定性响应减小,并使随机响应增大。拉盖尔节点数的增加会提高所建议方法的精度;当 $n=8$ 时,所建议方法与蒙特卡罗模拟所得结果吻合较好。结合4.1.3节中得到的结果可知,确定性或随机激励幅值会分别正向影响确定性响应或随机响应,而分别反向影响随机响应或确定性响应。

综上,对于分数阶Duffing系统在确定性谐波与调制白噪声联合作用下的响应,本文所建议的方法在考察的不同参数设置情况下,均有良好的适用性。

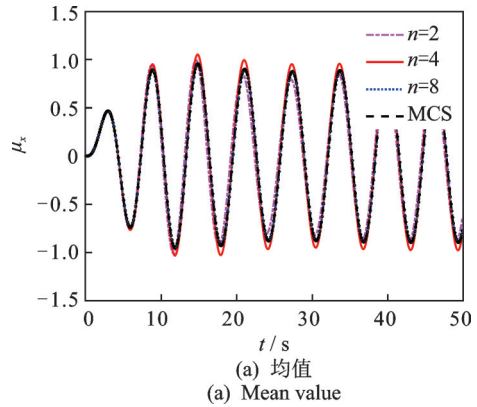
#### 4.2 $Q_s(t)$ 为色噪声

##### 4.2.1 典型参数设置的情况

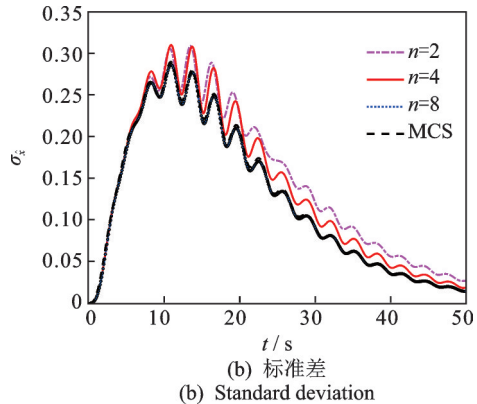
选取系统参数 $m=1, c=0.4, k=1, \epsilon=0.1, \alpha=0.5$ ;确定性激励参数 $F_s=0.4, \omega_0=1$ ;随机激励参数 $A=1, \mu_1=0.1, \mu_2=0.2, \zeta_g=0.5, \omega_g=1, S_0=0.1$ 。利用谱表现方法生成色噪声样本10000条,乘以调制函数后得到均匀调制色噪声。建议方法和蒙特卡罗模拟得到位移均值与标准差分别如图10(a)图10(b)所示。

从图10(a),(b)可见,在考虑的参数设置情况下,本文建议方法的精度随 $n$ 值的增大而提高;当 $n=8$ 时,建议方法与蒙特卡罗模拟高度吻合。在随机响应方面,所建议方法能很好地捕捉突加激励、确定性激励分量和随机激励分量调制函数导致的非平稳性。

下面分析其他参数对建议方法适用性的影响。确定性响应模的时间平均和随机响应标准差时间平均的定义同4.1.1节。



(a) 均值  
(a) Mean value



(b) 标准差  
(b) Standard deviation

图10 分数阶Duffing系统在谐波与调制色噪声激励联合作用下的位移

Fig.10 Displacement of the fractional-order Duffing system subjected to combined harmonic and modulated colored noise

##### 4.2.2 非线性强度的影响

保持其他参数不变,非线性强度系数 $\epsilon$ 取0~1。采用建议方法与蒙特卡罗模拟计算得到的确定性响应模的时间平均对比如图11所示;标准差时间平均对比如图12所示。

由图11,12可见,在其他参数不变的情况下,确定性和随机响应均随非线性强度增加而降低。本文建议方法的精度随 $n$ 值的增大而提高;对于确定性

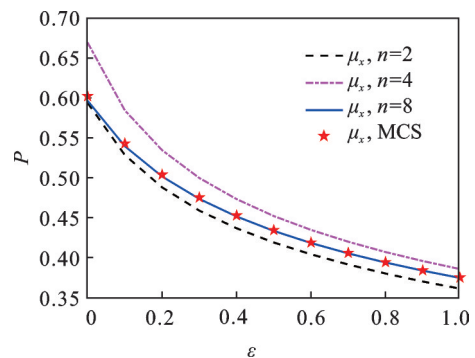


图11 非线性强度对分数阶Duffing系统确定性响应模的时间平均的影响

Fig.11 Influence of the degree-of-nonlinearity on the time-averaged modulus of the deterministic response component of the fractional-order Duffing oscillator

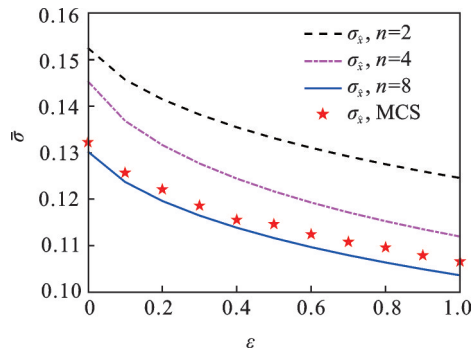


图12 非线性强度对分数阶Duffing系统随机响应标准差时间平均的影响

Fig. 12 Influence of the degree-of-nonlinearity on the time-averaged standard deviation of the stochastic response component of the fractional-order Duffing oscillator

响应,当 $n=8$ 时,所建议方法与MCS高度吻合;对于随机响应, $n=8$ 时,所建议方法具有满意的精度。以上结果表明了所建议方法在不同非线性强度下的适用性。

#### 4.2.3 激励幅值的影响

为研究确定性激励幅值对此方法适用性的影响,保持其他参数不变,确定性激励幅值 $F_s$ 取 $0\sim 2$ 。本文所建议方法与蒙特卡罗模拟计算得到的确定性响应模的时间平均对比如图13所示;时变位移标准差的时间平均值对比如图14所示。

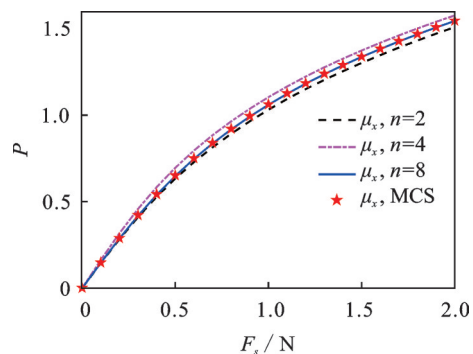


图13 谐波激励幅值对分数阶Duffing系统确定性响应模的时间平均的影响

Fig. 13 Influence of the harmonic excitation amplitude on the time-averaged modulus of the deterministic response component of the fractional-order Duffing oscillator

由图13,14可见,在其他参数不变的情况下,确定性响应随谐波激励幅值增大而增大,而位移标准差随谐波激励幅值增大而减小。后者显示了确定性分量与随机分量之间的耦合性:确定性激励大小会影响随机响应量大小。此外,拉盖尔节点数 $n$ 的增加会提升所建议方法的精度;当 $n=8$ 时,建议方法与蒙特卡罗模拟所得结果高度吻合。以上分析均反映了建议方法在不同确定性激励幅值情况下的适用性。

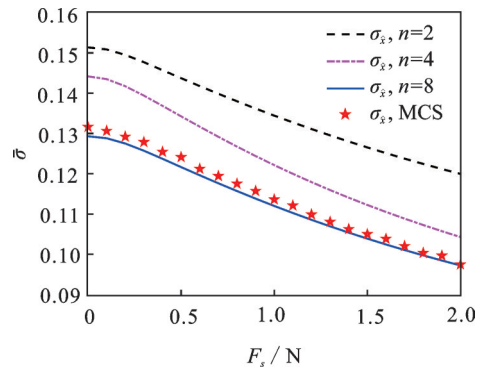


图14 谐波激励幅值对分数阶Duffing系统随机响应标准差时间平均的影响

Fig. 14 Influence of the harmonic excitation amplitude on the time-averaged standard deviation of the stochastic response component of the fractional-order Duffing oscillator

#### 4.2.4 确定性谐波激励频率的影响

为研究确定性激励频率对此方法适用性的影响,保持其他参数不变,确定性激励频率 $\omega_0$ 取 $0.1\sim 2$ 。本文所建议方法与蒙特卡罗模拟得到的确定性响应模的时间平均对比如图15所示;非平稳随机响应标准差的时间平均如图16所示。

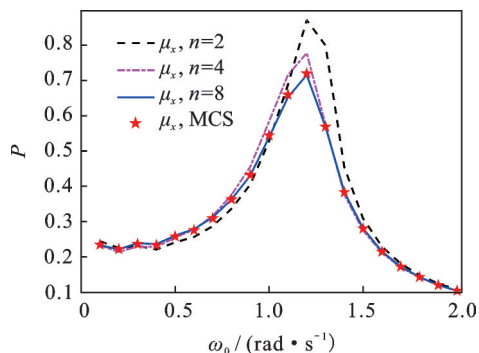


图15 谐波激励频率对分数阶Duffing系统确定性响应模的时间平均的影响

Fig. 15 Influence of the harmonic excitation frequency on the time-averaged modulus of the deterministic response component of the fractional-order Duffing oscillator

由图15,16可见,谐波激励频率对确定性和随机响应有较大影响,存在使它们达到极值的谐波激励频率。确定性响应与随机响应达到极值的频率约为 $1.2 \text{ rad/s}$ 。图15所示的曲线与非线性系统在谐波激励下的“幅频响应曲线”类似,呈现“硬特性”系统特有的峰值不对称特征。图16显示了随机响应受到确定性激励频率的影响,表明了二者之间是耦合的。拉盖尔节点数 $n$ 的增加会提升所建议方法的精度;当 $n=8$ 时,所建议方法与蒙特卡罗模拟所得结果高度吻合。以上分析均表明了建议方法在不同



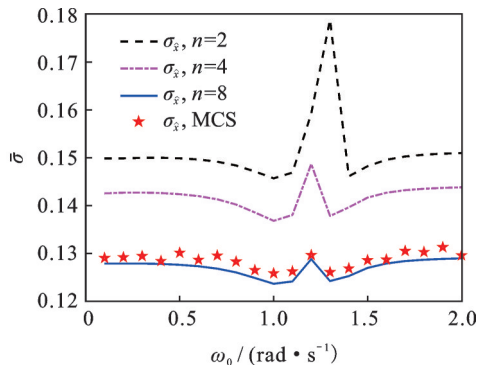


图 16 谐波激励频率对分数阶 Duffing 系统随机响应标准差时间平均的影响

Fig. 16 Influence of the harmonic excitation frequency on the time-averaged standard deviation of the stochastic response component of the fractional-order Duffing oscillator

确定性激励频率下的适用性。

#### 4.2.5 随机激励强度的影响

同样,为研究色噪声激励强度对此方法适用性的影响,保持其他参数不变,功率谱强度  $S_0$  取  $10^{-4} \sim 10^2$ 。采用本文所建议方法与蒙特卡罗模拟得到的确定性响应模的时间平均对比如图 17 所示;随机响应时变标准差的时间平均对比如图 18 所示。

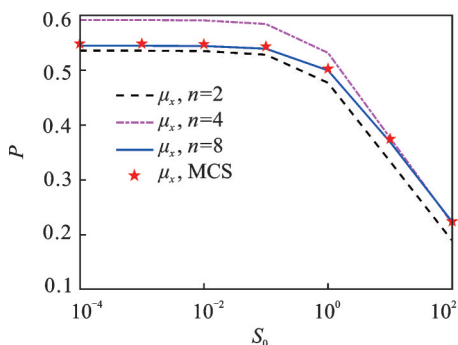


图 17 随机激励功率谱强度对分数阶 Duffing 系统确定性响应模的时间平均的影响

Fig. 17 Influence of the stochastic excitation power spectral density on the time-averaged modulus of the deterministic response component of the fractional-order Duffing oscillator

由图 17, 18 可见,随机激励功率谱强度对确定性和随机响应均有一定影响:随着随机激励功率谱强度的增大,确定性响应逐渐减小,而随机响应逐渐增大。结合 4.2.3 节中的结果可知,确定性或随机激励幅值会分别正向影响确定性或随机响应幅值,反向影响随机或确定性响应幅值;因此,确定性和随机分量之间是相互耦合的。此外,建议方法的精度随着  $n$  值的增大而提高;对于确定性响应而言,  $n = 8$

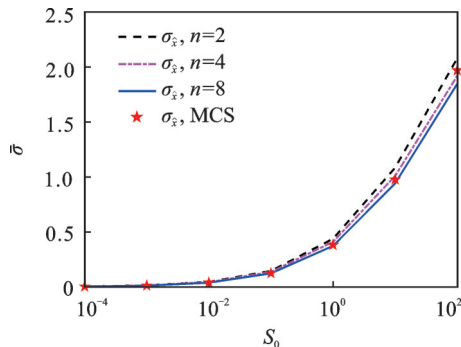


图 18 随机激励功率谱强度对分数阶 Duffing 系统随机响应标准差时间平均的影响

Fig. 18 Influence of the stochastic excitation power spectral density on the time-averaged standard deviation of the stochastic response component of the fractional-order Duffing oscillator

时,建议方法与蒙特卡罗模拟所得结果高度吻合。以上分析均反映了所建议方法在不同随机激励强度下的适用性。

综上所述,对于分数阶 Duffing 系统在确定性谐波与随机激励(白噪声或色噪声)联合作用下的响应,本文所建议方法在不同参数设置的情况下,均有良好的适用性。所建议方法的计算效率较蒙特卡罗模拟有显著优势。以调制白噪声与确定性激励联合作用下的响应计算为例,使用所建议方法计算拉盖尔节点数  $n = 8$  时用时仅需 0.39 s,而 10000 个样本的蒙特卡罗模拟需要 39.24 s。由此可见,所建议方法在保证较高精确性的前提下,计算效率上也显著提高。

## 5 结论与展望

对单自由度分数阶 Duffing 振子在周期和非平稳随机激励联合作用下的响应进行了研究,得到的结论如下:

(1) 基于无记忆化方法提出了一种求解周期和非平稳随机激励联合作用下单自由度分数阶 Duffing 振子非平稳响应的统计线性化方法,并利用蒙特卡罗法验证了该方法的适用性与精度;

(2) 算例表明,所提方法在考虑的参数设置范围内具有较好的精度,同时其计算精度随拉盖尔节点数的增加而增加;

(3) 在多数情况下,当拉盖尔节点数为 8 时,即可获得较为理想的结果,甚至在共振频率下也具有较为理想的精度;

(4) 所提方法在保证较高精度的前提下,计算效率相较于蒙特卡罗法得到了显著的提升。

## 参考文献:

- [1] Cai M, Li C. Numerical approaches to fractional integrals and derivatives: a review[J]. *Mathematics*, 2020, 8(1): 43.
- [2] Di Paola M, Pirrotta A, Valenza A. Visco-elastic behavior through fractional calculus: an easier method for best fitting experimental results[J]. *Mechanics of Materials*, 2011, 43(12): 799-806.
- [3] Koh C G, Kelly J M. Application of fractional derivatives to seismic analysis of base-isolated models[J]. *Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1990, 19(2): 229-241.
- [4] Makris N, Constantinou M C. Fractional-derivative Maxwell model for viscous dampers[J]. *Journal of Structural Engineering*, 1991, 117(9): 2708-2724.
- [5] Zhao X, Wang S, Du D, et al. Optimal design of visco-elastic dampers in frame structures considering soil-structure interaction effect[J]. *Shock and Vibration*, 2017, 2017: 9629083.
- [6] Lewandowski R, Pawlak Z. Dynamic analysis of frames with viscoelastic dampers modelled by rheological models with fractional derivatives[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2011, 330(5): 923-936.
- [7] 孔凡, 侯召旭, 徐军, 等. 基于多谐波平衡法的滞回分数阶系统稳态动力响应[J]. *振动工程学报*, 2021, 34(3): 552-558.
- Kong F, Hou Z, Xu J, et al. Steady-state response determination of a hysteretic system endowed with fractional elements via a multi-harmonic balance method [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2021, 34(3): 552-558.
- [8] Di Paola M, Pinnola F P, Spanos P D. Analysis of multi-degree-of-freedom systems with fractional derivative elements of rational order[C]. *ICFDA'14 International Conference on Fractional Differentiation and Its Applications 2014*, IEEE, 2014:1-6.
- [9] Zeldin B A, Spanos P D. Random vibration of systems with frequency-dependent parameters or fractional derivatives[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1997, 123(3): 290-292.
- [10] Agrawal O P. Stochastic analysis of dynamic systems containing fractional derivatives[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 247(5): 927-938.
- [11] Spanos P D, Evangelatos G I. Response of a non-linear system with restoring forces governed by fractional derivatives—time domain simulation and statistical linearization solution[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2010, 30(9): 811-821.
- [12] Chen L, Wang W, Li Z, et al. Stationary response of Duffing oscillator with hardening stiffness and fractional derivative[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2013, 48: 44-50.
- [13] 孙春艳, 徐伟. 含分数阶导数项的随机 Duffing 振子的稳态响应分析[J]. *振动工程学报*, 2015, 28(3): 374-380.
- Sun C Y, Xu W. Stationary response analysis for a stochastic Duffing oscillator comprising fractional derivative element[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2015, 28(3): 374-380.
- [14] Matteo A D, Kougioumtzoglou I A, Pirrotta A, et al. Stochastic response determination of nonlinear oscillators with fractional derivatives elements via the Wiener path integral[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2014, 38: 127-135.
- [15] Kong F, Spanos P D. Response spectral density determination for nonlinear systems endowed with fractional derivatives and subject to colored noise[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2020, 59: 103023.
- [16] Kong F, Zhang Y, Zhang Y. Non-stationary response power spectrum determination of linear/non-linear systems endowed with fractional derivative elements via harmonic wavelet[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2022, 162(168): 108024.
- [17] Suarez L E, Shokooh A. An eigenvector expansion method for the solution of motion containing fractional derivatives[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1997, 64(3): 629-635.
- [18] Agrawal O P. Stochastic analysis of a 1-D system with fractional damping of order 1/2[J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2002, 124(3): 454-460.
- [19] Yuan L, Agrawal O P. A numerical scheme for dynamic systems containing fraction derivatives[J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2002, 124(2): 321-324.
- [20] Schmidt A, Gaul L. On a critique of a numerical scheme for the calculation of fractionally damped dynamical systems[J]. *Mechanics Research Communications*, 2006, 33(1): 99-107.
- [21] Agrawal O P. A numerical scheme for initial compliance and creep response of a system[J]. *Mechanics Research Communications*, 2009, 36(4): 444-451.
- [22] Agrawal O P. A modified memory-free scheme and its Simulink implementation for FDEs[J]. *Physica Scripta*, 2009, 2009: 014031.
- [23] Liu Q X, Chen Y M, Liu J K. An improved Yuan-Agrawal method with rapid convergence rate for fractional differential equations[J]. *Computational Mechanics*, 2019, 63(4): 713-723.
- [24] Di Paola M, Failla G, Pirrotta A. Stationary and non-

- stationary stochastic response of linear fractional visco-elastic systems[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2012, 28: 85-90.
- [25] Failla G, Pirrotta A. On the stochastic response of a fractionally-damped Duffing oscillator[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012, 17(12): 5131-5142.
- [26] Chen L C, Zhu W Q. Stochastic averaging of strongly nonlinear oscillators with small fractional derivative damping under combined harmonic and white noise excitations[J]. Nonlinear Dynamics, 2009, 56(3): 231-241.
- [27] Chen L C, Zhu W Q. Stochastic stability of Duffing oscillator with fractional derivative damping under combined harmonic and white noise parametric excitations [J]. Acta Mechanica, 2009, 207(1): 109-120.
- [28] Spanos P D, Zhang Y, Kong F. Formulation of statistical linearization for MDOF systems subject to combined periodic and stochastic excitations[J]. Journal of Applied Mechanics, 2019, 86(10): 101003.
- [29] 孔凡, 晁盼盼, 徐军, 等. 随机与谐和联合激励下分数阶非线性系统的统计线性化方法[J]. 振动工程学报, 2021, 34(4): 756-764.
- Kong F, Chao P P, Xu J, et al. Statistical linearization method for nonlinear Duffing oscillator under combined random and harmonic excitations[J]. Journal of Vibration Engineering, 2021, 34(4): 756-764.
- [30] Spanos P D, Malara G. Nonlinear vibrations of beams and plates with fractional derivative elements subject to combined harmonic and random excitations[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2020, 59: 103043.
- [31] Kong F, Spanos P D. Stochastic response of hysteresis system under combined periodic and stochastic excitation via the statistical linearization method[J]. Journal of Applied Mechanics, 2021, 88(5): 051008.
- [32] 孔凡, 韩仁杰, 张远进, 等. 色噪声与确定性谐波联合激励下 Bouc-Wen 动力系统响应的统计线性化方法[J]. 振动工程学报, 2022, 35(1): 82-92.
- Kong F, Han R J, Zhang Y J, et al. Stochastic response of a hysteresis system subjected to combined periodic and colored noise excitation via the statistical linearization method[J]. Journal of Vibration Engineering, 2022, 35(1): 82-92.
- [33] 孔凡, 韩仁杰, 张远进. 确定性周期与随机激励联合作用下非线性系统非平稳响应的统计线性化方法[J]. 振动工程学报, 2022, 35(3): 625-634.
- Kong F, Han R J, Zhang Y J. Non-stationary response of non-linear systems subjected to combined periodic and non-stationary stochastic excitation via the statistical linearization method[J]. Journal of Vibration Engineering, 2022, 35(3): 625-634.
- [34] Roberts J B, Spanos P D. Random Vibration and Statistical Linearization[M]. Dover Publications, 2003.

## A memory-free method for fractional-order Duffing systems subjected to combined periodic and colored excitation

LI Shu-jin<sup>1</sup>, ZHANG Zhi-cong<sup>1</sup>, KONG Fan<sup>2</sup>, HAN Ren-jie<sup>1</sup>

(1. School of Civil Engineering & Architecture, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China;

2. College of Civil Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

**Abstract:** A statistical linearization-based memory-free method is proposed for determining the non-stationary response of single-degree-of-freedom Duffing systems endowed with fractional elements and subjected to excitation combined with periodic and colored noise. Specifically, by decomposing the system response as a combination of a periodic and of a zero-mean stochastic component, the original nonlinear motion equation can be equivalently transformed into two coupled fractional-order differential sub-equations, governing the deterministic and the stochastic component, respectively. Relying on a memory-free method, these fractional-order stochastic/deterministic differential equations are transformed into a set of ordinary differential equations without fractional derivatives. The Lyapunov differential equation governing the second moment of the stochastic response component is obtained by resorting to the statistical linearization method for the derived stochastic ordinary differential equations. The Lyapunov differential equation and the deterministic ordinary differential equations are solved simultaneously using standard numerical algorithms. Pertinent Monte Carlo simulations demonstrate the applicability and accuracy of the proposed method.

**Key words:** non-stationary response; fraction-order systems; memory-free method; statistical linearization; combined excitation

**作者简介:** 李书进(1967—),男,博士,教授。电话:(027)87651786; E-mail: sjli@whut.edu.cn。

**通讯作者:** 孔凡(1984—),男,博士,教授。电话:18062688526; E-mail: kongfan@hfut.edu.cn。