

电机定子振动模态频率分裂特性分析

徐港辉, 祝长生

(浙江大学电气工程学院, 浙江 杭州 310027)

摘要: 有效抑制由电机径向电磁力激发的电机定子振动是实现电机减振降噪的一个重要途径,而对电机定子模态频率及模态振型的准确分析是抑制电机定子径向振动的基础。采用圆环的弹性力学解析模型作为电机定子振动的分析模型,对无约束状态下电机定子的模态进行分析,得到了电机定子径向振动模态频率和模态振型的解析解。以齿槽和底脚为典型附加结构,采用摄动法对电机定子模态频率的分裂现象进行分析,总结了频率分裂与否以及分裂阶次的判定准则。通过 ANSYS 有限元软件验证了理论方法和计算的有效性。结果表明,所建立的二维圆环模型可以准确、高效地应用于电机定子模态特性的分析;附加结构的分布形式对定子频率分裂特性具有重要的影响。

关键词: 电机定子; 模态频率; 模态振型; 圆环模型; 频率分裂

中图分类号: TM303.3; TB535 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2023)04-0953-10

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2023.04.008

引言

电机的振动和噪声是电机的一项重要技术指标,同时也是制约电机向高性能方向发展的一个关键因素。由电机气隙磁场产生的径向电磁力所激发的电机定子的电磁振动是电机振动噪声的重要来源,在电机减振降噪领域引起了广泛关注^[1]。为了减小电机的电磁振动,除了需要控制电磁力的幅值外,还需要避免电机定子的模态频率及其模态阶次与电磁力的频率及其阶次相等或者接近导致的定子结构的共振^[2]。因此,电机定子的模态特性分析对电机的减振降噪具有重要意义,并且在电机的设计阶段就需要进行校核和规划。

准确获得定子的模态频率和模态振型,一直是电机定子模态特性分析的重要内容。国外的研究在 20 世纪 30 年代就已开始,国内学者对该问题的研究开始于 20 世纪 80 年代^[3],目前还有学者在继续开展相关的研究。电机定子的整体框架近似为圆柱壳体结构^[4-6],但作为三维连续结构,圆柱壳体的振动特性分析相对复杂^[5-8]。为此,在以往的诸多研究中,经常采用二维圆环模型作为电机定子振动的分析模型。

邱家俊等^[9]、于慎波等^[10]分别通过解析计算和有限元仿真说明了两端无约束状态下圆柱壳体与圆环的径向模态频率十分接近,验证了采用圆环作为

电机定子分析模型的合理性。基于圆环模型的机电类比法^[4,11]具有公式简单、求解方便等优点,在电机定子模态频率计算中得到了广泛应用。李晓华等^[3]考虑了绕组和浸漆结构对定子模态频率的影响,基于圆环模型计算了含绕组定子铁心的模态频率。王宏华等^[12]考虑了定子凸极对磁轭质量和刚度的影响,采用等效圆环模型计算了开关磁阻电机的定子模态频率。邢泽智等^[13]考虑了定子齿槽结构对定子模态频率的影响,基于数据拟合法提出了一种定子铁心等效圆环尺寸计算公式,有效提升了定子径向模态频率的计算精度。然而以上研究主要围绕模态频率的准确计算开展,对模态振型的理论研究较少。并且机电类比法属于公式法,只能用于计算定子的模态频率,不能揭示定子的模态振型特性,方法的局限性较大。因此,为了深入分析定子的模态特性,需要建立相应的理论模型。

在电机定子的模态试验中,文献[14-16]均提到了“双共振峰”的现象。Girgis 等^[7]指出定子结构中的不对称是导致这一现象产生的原因。陈永校等^[14]提出了“广义齿槽”的概念来描述定子尺寸、材料、约束等方面的不均匀性,从理论上对“双共振峰”现象进行了解释。然而相关文献均没有给出“双共振峰”出现与否的判断标准。实际上,“双共振峰”是定子同一阶模态对应了两个接近但不相等的模态频率的一种现象(又称为“频率分裂”现象)。理想的对称结构往往具有重特征值(模态频率相等)的特性,此

时的系统又称为退化系统。当退化系统发生小参数变化后,原本的多重模态频率可能会分裂成多个数值不等的模态频率^[17],即所谓的频率分裂现象。在早期的研究中,胡海昌^[17]和陈塑寰^[18]分别采用变分原理和摄动法实现了小参数变化下退化系统的模态特性分析。实际上,结构参数或者约束条件的变化均可能引起频率分裂现象。Wu等^[19]采用摄动法和 Galerkin 离散法对不同形式弹性支承下圆环的动力学特性进行了研究,得到了附加刚度对圆环模态频率分裂的影响规律。Bisegna等^[20]采用线性弹性理论和摄动法分析了结构缺陷引起的圆环频率分裂现象,得到了缺陷圆环模态频率和振型的闭环解,并通过 Rayleigh-Ritz 法验证了理论计算的有效性。Wang等^[21]采用摄动法对含有附加质量和附加刚度的圆环的模态特性进行了分析,推导了圆筒形超声电机中模态频率分裂的一般规律;并研究了分组对称形式的附加单元对旋转周期结构频率分裂特性的影响规律^[22]。以上文献在分析结构的频率分裂特性时,广泛采用了摄动法的思想。

在以上文献的基础上,为了进一步完善电机定子模态特性分析的理论,并探究电机定子振动中“双共振峰”现象的发生规律,考虑到机电类比的局限性,本文首先采用圆环弹性力学解析模型对电机定子的模态特性进行分析,得到了各阶模态频率和模态振型的解析表达式。然后以齿槽和底脚为典型的附加结构,基于圆环解析模型,采用摄动法分析了这两类附加结构对定子模态频率的影响,总结了定子频率分裂与否的规律,为“双共振峰”现象提供了理论解释。最后,通过文献对比和有限元仿真对理论结果进行了验证。

1 基于圆环解析模型的定子模态特性分析

图1为电机定子的圆环模型。其中 $o-\theta z$ 为建立在圆环中性线上的极坐标系, θ 和 z 分别为圆环的切向坐标和径向坐标, r 为圆环中性线的半径, h 为圆环的厚度, v 及 w 分别为圆环中性线上某点P在切向及径向方向上的位移。

本文只考虑圆环的面内振动,圆环在面内的自由振动方程为^[23]:

$$\begin{cases} \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{(D + Kr^2)}{r^4} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{D}{r^4} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{K}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{D}{r^4} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} - \frac{K}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{D}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - \frac{K}{r^2} w \end{cases} \quad (1)$$

式中 ρ 为圆环的密度, $D = Eh^3/12$, $K = Eh$, E 为

圆环的等效弹性模量。

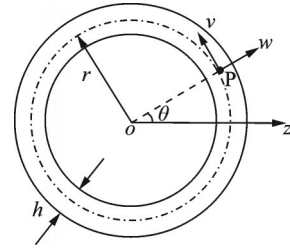


图1 电机定子的圆环模型示意图

Fig. 1 Schematic diagram of ring model of motor stator

式(1)所示的圆环模型是关于时间和位置的偏微分方程组,直接求其解析解往往是困难的,通常借助变量分离法进行求解。

圆环的振动位移 v 及 w 既是时间 t 的函数,又是角度 θ 的函数,根据变量分离法可设:

$$\begin{cases} v(\theta, t) = V(\theta)e^{i\omega t} \\ w(\theta, t) = W(\theta)e^{i\omega t} \end{cases} \quad (2)$$

式中 $V(\theta)$ 及 $W(\theta)$ 为圆环的振型函数,与时间无关,表征了圆环不同角位置的相对振幅; ω 为圆环面内振动的模态角频率。

根据圆环在圆周方向上的周期性特征,假设圆环的各阶振型为如下两种三角函数形式:

$$\text{径向为余弦振型: } \begin{cases} V(\theta) = V_n \sin(n\theta) \\ W(\theta) = W_n \cos(n\theta) \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{径向为正弦振型: } \begin{cases} V(\theta) = \bar{V}_n \cos(n\theta) \\ W(\theta) = \bar{W}_n \sin(n\theta) \end{cases} \quad (4)$$

式中 V_n 及 \bar{V}_n 分别为切向 n 阶正弦及余弦振型的振幅; W_n 及 \bar{W}_n 分别为径向 n 阶余弦及正弦振型的振幅; n 为圆环模态振型的周向阶次,表征了振型沿周向的波动特征。

将式(2)~(4)代入式(1),经过变量分离,将偏微分方程组简化为齐次常微分方程组。消去齐次方程组中相同的时间项和正余弦项,可以得到关于各阶振型振幅的方程组为:

$$\text{径向为余弦振型: } \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} V_n \\ W_n \end{Bmatrix} = 0 \quad (5)$$

$$\text{径向为正弦振型: } \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{V}_n \\ \bar{W}_n \end{Bmatrix} = 0 \quad (6)$$

式中 $P_{11} = Q_{11} = \rho h \omega^2 - (Dn^2 + Kr^2 n^2)/r^4$,

$P_{12} = P_{21} = -Q_{12} = -Q_{21} = -Dn^3/r^4 - Kn/r^2$,

$P_{22} = Q_{22} = \rho h \omega^2 - Dn^4/r^4 - K/r^2$ 。

可以证明,式(5)与式(6)中系数矩阵的行列式是相等的。为了使各阶振型振幅有非零解,式(5)和(6)中系数矩阵的行列式必等于零,从而得到圆环振

动的模态频率方程为:

$$\omega^4 - \xi_1 \omega^2 + \xi_2 = 0 \quad (7)$$

式中 $\xi_1 = (n^2 + 1)(Dn^2 + Kr^2)/(\rho hr^4)$,

$\xi_2 = [n^2(n^2 - 1)^2 DK]/(\rho^2 h^2 r^6)$ 。

由式(7)可知,标准圆环径向的 n 阶正弦、余弦振型对应于相等的模态角频率。进一步求取式(7)的解析解(记为 ω_n),有:

$$\omega_n^2 = \frac{\xi_1 \pm \sqrt{\xi_1^2 - 4\xi_2}}{2} \quad (8)$$

根据式(8)可知,每个 n 值对应于两个大小不等的模态频率,记其中较小者为 $\omega_{n,s}$,较大者为 $\omega_{n,b}$ 。

当 $n=0$ 或 1 时,由于 ξ_2 正比于 $n^2(n^2-1)^2$,均有 $\xi_2=0$,此时较小者 $\omega_{0,s}=\omega_{1,s}=0$,分别对应于圆环的两个刚体模态;较大者 $\omega_{0,b}=E/(\rho r^2)$ 及 $\omega_{1,b} \approx 2E/(\rho r^2)$ 均不为0。实际上, $\omega_{0,b}$ 对应于圆环的呼吸模态,即周向波数为0的伸缩模态,此时圆环的振动形式在任意位置 θ 都相同,因此又称为轴对称模态;而 $\omega_{1,b}$ 对应于圆环周向波数为1的伸缩模态^[23]。

当 $n \geq 2$ 时,结合 $h^2 \ll r$,对式(8)进行化简可得:

$$\omega_{n,s}^2 \approx \frac{n^2(n^2-1)^2}{n^2+1} \frac{Eh^2}{12\rho r^4} \quad (9)$$

$$\omega_{n,b}^2 \approx \frac{(n^2+1)E}{\rho r^2} \quad (10)$$

可以验证, $\omega_{n,s}$ 对应于圆环2阶及以上的弯曲模态; $\omega_{n,b}$ 对应于圆环2阶及以上的伸缩模态^[23]。进一步地,根据式(9)和(10)可得: $\omega_{n,b}/\omega_{n,s} > 12r^2/(nh)^2$,由此可以判断,伸缩模态对应的频率通常要比弯曲模态的频率高很多。

在求得定子的各阶模态频率之后,根据式(5)和(6)可以确定各阶振型的相对振幅。由式(5)和(6)的系数行列式为0可知,取其中任意一组方程均可确定各阶振幅之间的相对大小,有:

$$\frac{V_n}{W_n} = -\frac{\bar{V}_n}{\bar{W}_n} = -\frac{P_{12}}{P_{11}} = \frac{Dn^3 + Kr^2 n}{\rho h \omega_n^2 r^4 - (D + Kr^2) n^2} \quad (11)$$

联立式(11)与式(3),(4),即可确定圆环的各阶模态振型。根据式(11)可知,圆环同一阶次的正弦振型与余弦振型对应的振幅也是相等的。但是根据式(3)和(4)可知两种振型之间存在 $\pi/(2n)$ 的相位差,并不完全重合。

2 电机定子模态的频率分裂现象

频率分裂现象指的是同一阶模态(相同波动特征)对应于两个或两个以上不同频率的现象。以本

文圆环模型为例,由式(7)可知,标准圆环径向的 n 阶正弦、余弦模态对应的模态频率是相等的,此时两种模态对应的频率是重合的。然而,当圆环上存在附加结构时,由于圆环的对称性被改变,同一阶模态对应的频率可能会出现不相等的分裂现象。本节将在文献[21]的理论基础上,对电机定子模态频率的分裂现象做进一步的理论分析。

2.1 旋转对称结构引起的定子模态频率分裂现象

在电机定子中,存在周向均布的齿槽、散热筋等旋转对称结构,这里以齿槽结构作为旋转对称结构的典型代表,分析旋转对称结构引发模态频率分裂现象的规律。图2为含齿槽结构的定子圆环模型。基于式(1)所示的标准圆环环内振动方程,不考虑圆环的伸缩模态,有 $w = -\partial v/\partial \theta$,代入式(1)并进行无量纲化处理,可以得到标准圆环环内振动的特征方程为:

$$K^{(0)} \bar{v} - \lambda_n^{(0)} M^{(0)} \bar{v} = 0 \quad (12)$$

式中 $M^{(0)}$ 及 $K^{(0)}$ 为微分算子,且有 $K^{(0)} = -(\partial^6/\partial \theta^6 + 2\partial^4/\partial \theta^4 + \partial^2/\partial \theta^2)$, $M^{(0)} = 1 - \partial^2/\partial \theta^2$; $\lambda_n^{(0)} = \omega_n^2$, ω_n 为标准圆环模态角频率; \bar{v} 为无量纲化后的位移,无量纲化方法见文献[21]。

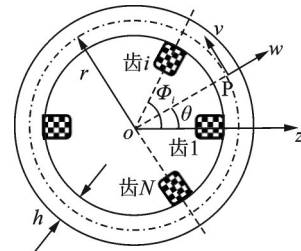


图2 含齿槽结构的定子圆环模型示意图

Fig. 2 Schematic diagram of ring model of motor stator with cogging structure

在式(12)的基础上,考虑引入齿槽结构带来的影响,根据摄动法可设微分算子的变化为:

$$\begin{cases} M^{(0)} \rightarrow M^{(0)} + \epsilon M^{(1)} + o(\epsilon^2) \\ K^{(0)} \rightarrow K^{(0)} + \epsilon K^{(1)} + o(\epsilon^2) \end{cases} \quad (13)$$

根据摄动理论,对应的特征值和特征向量的变化为:

$$\begin{cases} \lambda_n^{(0)} \rightarrow \lambda_n^{(0)} + \epsilon \lambda_n^{(1)} + o(\epsilon^2) \\ \bar{v}_n^{(0)} \rightarrow \bar{v}_n^{(0)} + \epsilon \bar{v}_n^{(1)} + o(\epsilon^2) \end{cases} \quad (14)$$

式中 ϵ 为小参数, $\epsilon=0$ 对应于无齿槽结构的标准圆环模型; $\bar{v}_n^{(0)}$ 为标准圆环在切向的 n 阶振型函数,参见式(3)和(4)。

根据齿槽结构沿圆周的分布特征,定义以下微分算子的摄动量进行表征:

$$\begin{cases} M^{(1)} = \pm \bar{m}_{i/s} \sum_{i=1}^N \delta(\theta - \phi_i) \\ K^{(1)} = \pm \bar{k}_{i/s} \sum_{i=1}^N \delta(\theta - \phi_i) \end{cases} \quad (15)$$

式中 $\bar{m}_{i/s}$ 和 $\bar{k}_{i/s}$ 为无量纲化的齿质量; δ 为 Dirac 函数; ϕ_i 为第 i 个齿或槽的方位角, $\phi_i = 2\pi(i-1)/N$, N 为总齿数或槽数; 齿槽结构可以看作是标准圆环加齿(符号取+)或开槽(符号取-)形成的。

将式(13)~(15)代入式(12)中, 忽略二阶及以上小量, 比较 ϵ 的同次幂系数, 可得:

$$\epsilon^0: K^{(0)}\bar{v}_n^{(0)} = \lambda_n^{(0)} M^{(0)}\bar{v}_n^{(0)} \quad (16)$$

$$\epsilon^1: K^{(0)}\bar{v}_n^{(1)} + K^{(1)}\bar{v}_n^{(0)} = \lambda_n^{(0)} M^{(0)}\bar{v}_n^{(1)} + \lambda_n^{(1)} M^{(1)}\bar{v}_n^{(0)} + \lambda_n^{(1)} M^{(0)}\bar{v}_n^{(0)} \quad (17)$$

将式(17)两边与 $\bar{v}_n^{(0)}$ 进行内积运算($\langle x, y \rangle = \int_0^{2\pi} x\bar{y} d\theta$), 根据 Dirac 函数的积分性质可得:

$$|\lambda_n^{(1)}| = \left| \frac{\bar{k}_{i/s} - \lambda_n^{(0)}\bar{m}_{i/s}}{2(n^2+1)\pi} \left[N \pm \cos\left(\frac{4n\pi(i-1)}{N}\right) \right] \right| \quad (18)$$

从式(18)中可以看出, 引入齿槽结构后, 圆环模态频率的摄动量可能存在两个值, 从而可能导致模态频率分裂现象。记此时模态频率分裂的判别式为:

$$\Delta = \sum_{i=1}^N \cos\left[\frac{4n\pi(i-1)}{N}\right] \quad (19)$$

当且仅当 $\Delta = 0$ 时, 齿槽引起的模态频率摄动量为单值, 否则摄动后模态频率存在两个值, 发生频率分裂现象。根据三角级数的性质可知:

$$\Delta \neq 0 \Leftrightarrow \text{频率分裂} \Leftrightarrow 2n/N \text{ 为整数} \quad (20)$$

因此, 当且仅当阶次 n 与总齿槽数 N 满足 $2n/N$ 为整数时, 含齿槽的圆环发生频率分裂。

对于任意一个参数既定的电机而言, 总齿槽数 N 是一个常数, 因此总会存在 n 使得 $2n/N$ 为整数(如 $n=N$), 所以齿槽结构必然引起电机定子的模态频率分裂, 只不过不同齿槽数下电机定子发生模态频率分裂的频率阶次有所不同。根据式(20)可知, 电机定子的齿槽数目越多, 发生模态分裂的频率阶次 n 将越大; 而对于齿槽数目较少的电机定子而言, 发生模态分裂的频率阶次 n 较低, 频率分裂对定子振动特性的影响相对较大。

2.2 轴对称结构引起的定子模态频率分裂现象

在电机定子结构上, 不仅有类似齿槽的旋转对称结构, 还存在诸如底脚、加强肋和拉环等的轴对称结构。如图3所示, 以对称分布的底脚为例, 在2.1

节的理论上, 研究附加的轴对称结构对电机定子模态频率分裂的影响规律。

底脚沿周向的分布方式与齿槽有所不同。设两个底脚与对称轴之间的夹角为 φ ($\varphi \in (0, \pi)$), 引入 Dirac 函数, 可以将底脚引起的摄动量 $M^{(1)}$ 及 $K^{(1)}$ 表示为:

$$\begin{cases} M^{(1)} = \pm \bar{m}_{i/s} [\delta(\theta - \varphi) + \delta(\theta + \varphi)] \\ K^{(1)} = \pm \bar{k}_{i/s} [\delta(\theta - \varphi) + \delta(\theta + \varphi)] \end{cases} \quad (21)$$

不失一般性, 式中采用 \pm 表示摄动量。

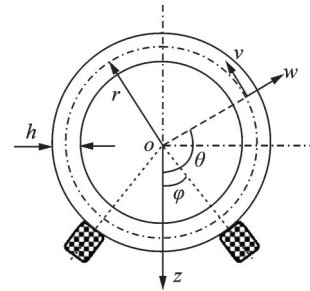


图3 含底脚结构的定子圆环模型示意图

Fig. 3 Schematic diagram of ring model of motor stator with foot structure

类似地, 结合式(21), 将式(17)两边与 $\bar{v}_n^{(0)}$ 进行内积运算, 根据 Dirac 函数的积分性质, 得到:

$$|\lambda_n^{(1)}| = C \sin^2(n\varphi) \text{ 或 } C \cos^2(n\varphi) \quad (22)$$

$$\text{式中 } C = \left| \frac{2(\bar{k}_{i/s} - \lambda_n^{(0)}\bar{m}_{i/s})}{(n^2+1)\pi} \right|.$$

从式(22)中可以看出, 底脚结构也可能引起定子的频率分裂现象。记此时频率分裂的判别式为:

$$\nabla = \cos^2(n\varphi) - \sin^2(n\varphi) = \cos(2n\varphi) \quad (23)$$

则不发生模态频率分裂的条件为 $\nabla = 0$, 进一步有:

$$\nabla = 0 \Leftrightarrow \text{频率不分裂} \Leftrightarrow \varphi = (2l+1)\pi/(4n) \quad (24)$$

式中 l 为自然数。

根据式(24)可知, 底脚结构引起的模态频率分裂主要与底脚的位置角 φ 相关。对于任意一个既定的 φ , 仅当阶次 $n = (2l+1)\pi/(4\varphi)$ 时, 模态频率才不发生分裂。与含齿槽定子结构的模态分裂条件相比, 底脚更容易引起定子结构的模态频率分裂。此外, 当 $\varphi = \pi/2$ 时, 可以发现对于任意 n 阶模态频率, 均有 $\nabla \neq 0$, 所以此时定子模态频率一定会发生分裂, 而此时相当于旋转对称结构中 $N=2$ 的情况, 对应的 $2n/N=n$ 恒为整数, 从而根据式(20)也可知此时定子各阶模态频率均发生分裂, 两种理论分析的结论是一致的。

3 理论模型与分析方法的验证

针对本文提出的分析模型及分析方法,本节将通过对比文献和有限元仿真的方式验证其有效性和适用范围。

3.1 基于圆环模型的定子模态频率对比

圆环模型因其简便、高效的优点在求解定子径向模态频率时得到了广泛应用。文献[13]采用数据

拟合的方法确定了含齿槽定子铁心的等效圆环内外径,采用机电类比法计算了圆环模型的模态频率,并通过有限元法和模态试验法验证了等效模型的有效性。其所得等效圆环的内直径为227.5 mm,外直径为260 mm,密度为7600 kg/m³,弹性模量为195 GPa。将以上参数代入本文所建模型中进行计算,并与文献[13]中的结果进行对比,如表1和图4所示。表1中的误差是以模态试验结果为基准计算得到的,图4中的误差归一化处理是以表1中最大误差(18.03%)为基准进行的。

表1 不同方法得到的定子模态频率对比

Tab. 1 Comparison of stator modal frequencies obtained by different methods

方法	n=2		n=3		n=4	
	频率/Hz	误差/%	频率/Hz	误差/%	频率/Hz	误差/%
模态试验 ^[13]	690.20	-	1799.91	-	3452.53	-
有限元法 ^[13]	689.60	-0.09	1810.10	0.57	3409.40	-1.25
等效前机电类比法 ^[13]	652.46	-5.46	1556.80	-13.51	2829.99	-18.03
等效后机电类比法 ^[13]	705.25	2.18	1887.20	4.85	3617.20	4.77
等效后本文方法	681.88	-1.12	1927.64	7.10	3695.16	7.03

表1和图4中等效前后分别表示不考虑齿槽和考虑齿槽时的情况,可以看到齿槽等效前的计算误差可达18.03%,而齿槽等效后的计算误差都在5%以内,因此齿槽结构对定子模态频率的影响不可忽略。根据等效后的圆环参数,本文圆环模型的计算结果在2阶频率处取得了极小的误差,在3阶和4阶时误差也均不超过7.1%。

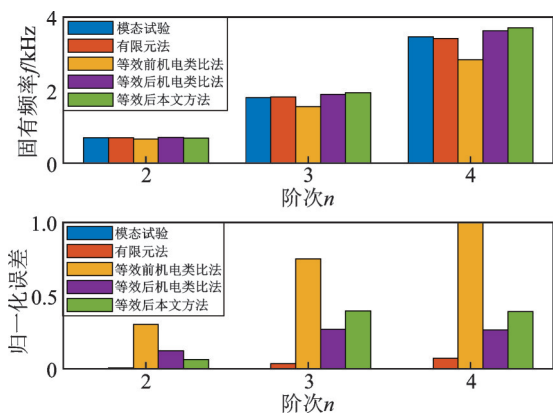


图4 不同方法得到的定子模态频率对比图

Fig. 4 Comparison diagram of stator modal frequencies obtained by different methods

进一步分析本文计算误差的形成原因可以发现,本文圆环模型是基于小厚径比的假设建立的,而根据文献[11]可知,机电类比法的计算公式中引入了一个影响系数来表征定子轭厚对定子模态频率的影响。该影响系数的取值通常小于1,且厚径比越

小,该影响系数越接近于1。而当该影响系数取1时,可以验证机电类比法所得结果与本文模型结果基本一致,这一方面验证了本文模型的有效性,另一方面也证明了厚度对定子或圆环的模态频率有重要影响。当定子及其等效圆环的厚度相对较大时,本文模型的计算误差也会有所增大。

为了验证以上分析,采用有限元法、机电类比法(不含影响系数或影响系数取1)以及本文模型方法对厚径比在0.05~0.3范围内的圆环进行模态分析(各圆环中性线的直径均取260 mm,其他参数与表1所用参数一致),得到了如图5所示的圆环低阶径向模态频率与厚径比的关系曲线。

在图5中,红色点划线代表了有限元法的计算结果,亮蓝色实线代表了不含影响系数的机电类比法的计算结果,其余曲线代表了基于本文模型所得

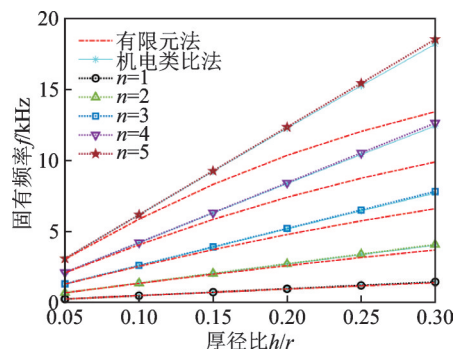


图5 基于圆环模型的模态频率与厚径比的关系

Fig. 5 Relationship between modal frequency and thickness-to-radius ratio based on ring model

的结果。结果表明,不含影响系数的机电类比法和本文模型所得的结果基本上是重合的,验证了本文模型方法和机电类比法在数学上基本上是等价的。然而有限元法的结果仅在低厚径比或低阶次时与两种解析方法接近,其余情况下两种解析方法的计算结果均大于有限元法的结果,并且越靠近坐标系的右上方,解析结果与有限元结果之间的差距越大。

以上结果表明:在低厚径比和低阶模态频率的情况下,本文模型方法和机电类比法(不含影响系数)的计算结果与有限元法的计算结果基本一致;但随着厚径比的增大以及阶次的升高,两种解析方法的结果逐渐高于有限元法的计算结果,即相比于有限元法的计算误差越来越大。此时为了保持解析方法的有效性,需要引入小于1的影响系数,且厚径比越大,该影响系数越小。

表 2 基于圆环解析模型和圆柱壳体有限元仿真所得的模态频率对比

Tab. 2 Comparison of modal frequencies obtained by analytical model of circular ring and finite element simulation of cylindrical shell

模型	2阶频率/Hz	3阶频率/Hz	4阶频率/Hz	5阶频率/Hz	0阶频率/Hz	1阶频率/Hz
解析模型	681.9	1927.6	3695.2	5974.9	6614.8	9361.7
$l=20$ mm	677.8	1891.3	3560.3	5629.6	6624.4	9328.5
$l=100$ mm	685.9	1918.1	3617.0	5726.3	6610.3	9286.3
$l=200$ mm	694.7	1938.6	3649.7	5771.4	6548.0	-
$l=300$ mm	697.6	1945.5	3661.3	5787.7	6334.4	-
$l=400$ mm	699.0	1949.1	3667.4	5796.1	-	-

从表2中可以看出:基于圆环解析模型计算得到的各阶模态频率与有限元法的计算结果都是比较接近的,包括呼吸模态($n=0$)和伸缩模态($n=1$)等非弯曲模态;且 $n=0$ 和 $n=1$ 阶模态对应的模态频率是显著高于低阶弯曲模态($n=2,3,4,\dots$)的。当轴向长度逐渐增大时, $n=2,3,4,\dots$ 阶模态频率基本保持不变,但 $n=0$ 阶模态频率出现了明显的减小。通过对比振型特征可以发现,当轴向长度较大时,圆柱壳体的呼吸模态振型沿轴向出现了波动,此时采用圆环模型不能完全表征圆柱壳体的呼吸模态($n=0$)。因而采用圆环模型得到的呼吸模态频率与圆柱壳体的呼吸模态频率之间出现了较大差别。此时如果要求解圆柱壳体的呼吸模态频率,需要采用三维圆柱壳体模型。此外,当 $l \geq 200$ mm时,圆柱壳体模型中出现了大量轴向模态与周向模态耦合的情况,对应的频率分布非常密集,导致 $n=0$ 或 $n=1$ 阶模态的求解难度加大,因此表2中没有给出有关频率。

从图6~8中可以看出,基于圆环解析模型与基于圆柱壳体有限元计算得到的定子各阶周向振型也

3.2 基于圆环模型的定子模态振型分析

在诸多的定子振动特性分析研究中,以模态频率的准确计算为主要内容,然而模态振型的确定对于频率阶次的判定,以及相关振动试验中测试点的布置均具有重要意义。本节将基于圆环解析模型和不同长度的圆柱壳体模型(有限元仿真)对定子的模态振型进行研究。

本节有限元仿真中涉及的圆柱壳体与圆环解析模型具有相同的周向参数,具体为:内直径227.5 mm,外直径260 mm,密度7600 kg/m³,弹性模量195 GPa;轴向长度 l 分别为20,100,200,300,400 mm。不同模型计算得到的定子模态频率值如表2所示,对应的各阶模态振型如图6~8所示(有限元结果以 $l=20$ mm和 $l=100$ mm时的仿真为代表)。

是基本一致的。其中各振型中蓝色区域对应于振幅较小的位置(节点或节线),红色或黄色区域对应于振幅较大的位置(反节点或反节线)。周向模态的阶次等于(反)节点(线)数的一半。由于节点(线)附近振动较小,所以在模态试验中,应避免激振点和传感器位置布置在各节点(线)附近。

需要指出的是,有限元计算结果表明,圆柱壳体

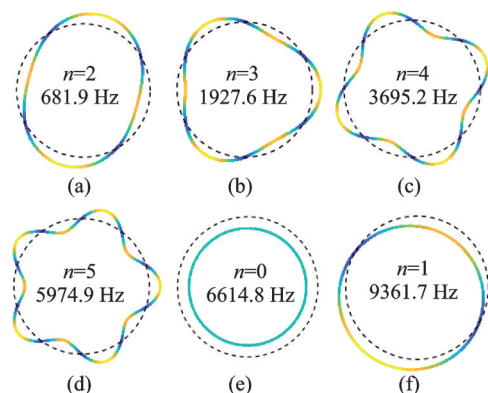


图 6 基于圆环解析模型得到的模态频率与振型

Fig. 6 Modal frequencies and modal shapes based on analytical model of ring

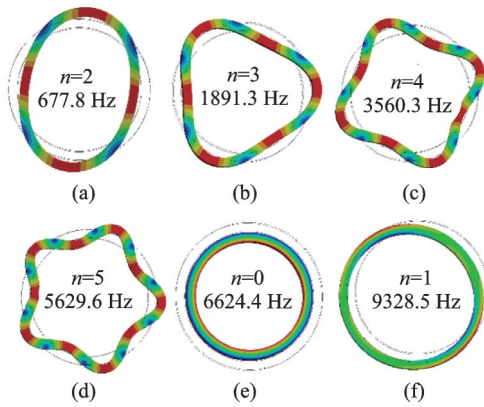


图7 基于有限元法得到的模态频率与振型 ($l=20$ mm)
Fig.7 Modal frequencies and modal shapes based on finite element method ($l=20$ mm)

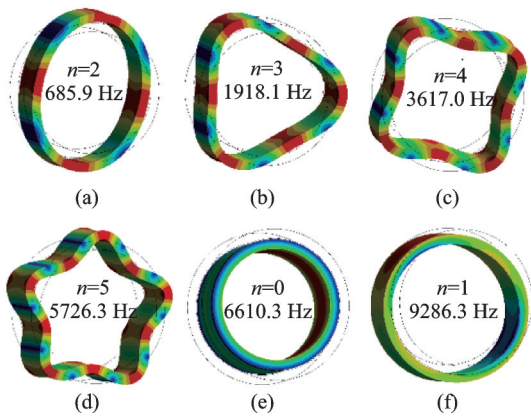


图8 基于有限元法得到的模态频率与振型 ($l=100$ mm)
Fig.8 Modal frequencies and modal shapes based on finite element method ($l=100$ mm)

模型的低阶模态中不仅存在如图8所示的纯周向振型,也存在如图9所示的轴向振型与周向振型耦合的振型。图9为1阶轴向振型与2~4阶周向振型耦合时的振型(图中展示的是 $l=200$ mm的圆柱壳体有限元仿真结果, $n=2,3,4$)。

图9中从左往右各模态对应的模态频率依次为995.9,2440.4和4229.7 Hz,由于 $(1, n)$ 阶模态对应

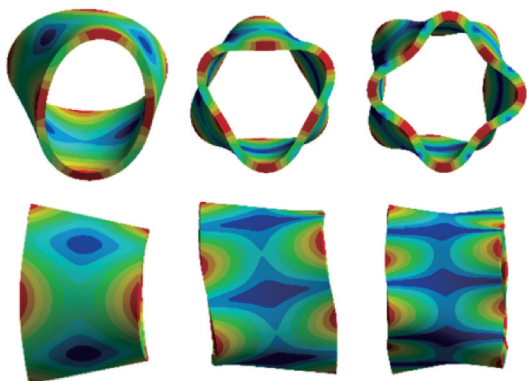


图9 无约束状态下圆柱壳体的 $(1, n)$ 阶模态 ($l=200$ mm)
Fig.9 The $(1, n)$ order modal shapes of cylindrical shell under unconstrained state ($l=200$ mm)

的模态频率相对较低,且交错在低阶周向模态频率中间,引起了一些学者的关注^[3,8],但有关研究均没有交代 $(1, n)$ 阶模态与低阶周向模态在响应方面的区别。

基于此,本文以表2中轴向长度200 mm的圆柱壳体为例,用有限元法对不同方向激振下壳体的谐波响应进行了分析,结果如图10所示。

结果表明,当激振力的方向为径向时,频率响应谱图中激起的频率以 $(0, n)$ 阶纯周向模态为主;当激振力的方向为轴向时,轴向阶次为1的耦合模态被激起。而电机中的激振力以径向为主,因此在电机的电磁振动中主要关注轴向阶次为0的纯周向模态即可,这与文献[11]中提及的观点是一致的,这也是圆环模型可以作为定子振动分析模型的重要原因之一。

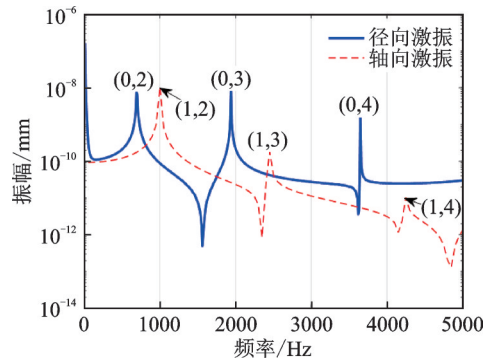


图10 不同方向激振力下圆柱壳体谐波响应分析

Fig.10 Harmonic response analysis of cylindrical shell under different directional excitation forces

3.3 电机定子模态频率分裂现象及其规律验证

3.3.1 旋转对称附加结构引起的定子模态频率分裂规律验证

以齿槽作为旋转对称结构的代表,用有限元法对含齿槽圆环模型与标准圆环模型进行对比分析。有限元仿真模型的材料参数与前文一致,结构参数为:内直径227.5 mm,外直径260 mm;含齿模型中沿圆环内圆正交均布了4个齿结构(用长方体模拟),齿高33.75 mm,齿宽30 mm。通过有限元法对模型进行模态分析和谐波响应分析,结果分别如表3和图11所示。

从表3中可以看出,标准圆环的各阶模态频率都只对应了一个值;而含齿圆环的一部分模态频率对应了一个值,另一部分模态频率则对应了两个值。根据式(20)可知,对于齿数为4的含齿圆环,有 $N=4$,当 $n=2,4$ 时, $2n/N$ 均为整数,对应的频率发生分裂;而当 $n=3,5$ 时, $2n/N$ 不为整数,对应的频率重合,不发生分裂。理论预测的频率分裂规律与有限

元仿真结果是一致的。

表 3 含齿圆环与标准圆环的模态频率对比

Tab. 3 Comparison of modal frequencies between rings with and without cogging structure

模型	2阶频率/ Hz	3阶频率/ Hz	4阶频率/ Hz	5阶频率/ Hz
标准圆环	667.7	1891.3	3560.3	5629.6
含齿圆环	584.2 608.6	1612.3	2795.3 3108.2	4622.8

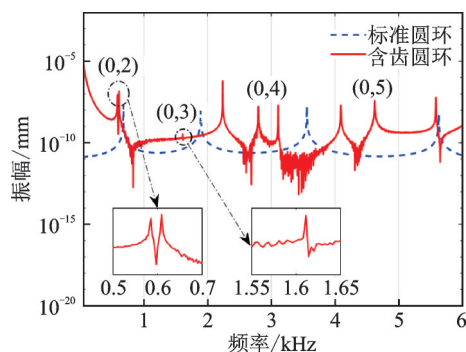


图 11 含齿圆环与标准圆环的谐响应分析结果对比

Fig. 11 Comparison of harmonic response analysis results between rings with and without cogging structure

图 11 为标准圆环和含齿圆环的谐响应分析结果。从图 11 中可以看到,对于含齿圆环而言,第 2 阶和第 4 阶模态频率处形成了“双共振峰”,这正是由频率分裂现象导致的;而第 3 阶和第 5 阶模态频率处均只有单个共振峰,与理论分析一致。此外,标准圆环的模态频率成分简单、相对分散,而含齿圆环的模态频率成分复杂、分布密集,出现共振的可能性显著增加。

本文的理论分析和仿真结果为文献[11]中发现的 4 磁极定子结构的第 3 阶“齿”对称模态与“齿”反对称模态相同、频率重合的现象提供了理论支撑。

3.3.2 轴对称附加结构引起的定子模态频率分裂规律验证

以底脚作为轴对称结构的代表,用有限元仿真对含底脚圆环模型与标准圆环模型进行对比分析。圆环的结构参数和材料参数均同前,以长方体作为底脚模型,两个底脚沿圆环外圆轴对称分布,各底脚与对称轴之间的夹角为 $\pi/4$,底脚高 16 mm,宽 10 mm。基于有限元的模态分析和谐响应分析结果分别如表 4 和图 12 所示。

从表 4 中可以看出,含底脚圆环也出现了模态频率分裂现象,第 2 阶和第 4 阶模态频率出现分裂,第 3 阶和第 5 阶模态频率没出现分裂。根据本文 2.2 节的式(24)可知,当 $n=(2l+1)\pi/(4\varphi)$ 时(其中 l 为自然数),对应的模态频率不发生分裂,其余情况

表 4 含底脚圆环与标准圆环的模态频率对比

Tab. 4 Comparison of modal frequencies between rings with and without foot structure

模型	2阶频率/ Hz	3阶频率/ Hz	4阶频率/ Hz	5阶频率/ Hz
标准圆环	667.7	1891.3	3560.3	5629.6
含底脚圆环	638.76 648.65	1798.1	3355.7 3416.8	5352.7

下均发生分裂;表 4 模型中, $\varphi = \pi/4$, 因此当 $n = 2l + 1$ (即奇数)时,模态频率重合不分裂,反之当 n 为偶数时,模态频率发生分裂;对比表 4 中的数据可知,理论预测的模态频率分裂规律与有限元计算结果十分吻合。

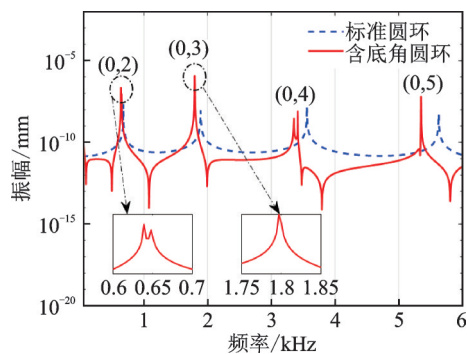


图 12 含底脚圆环与标准圆环的谐响应分析结果对比

Fig. 12 Comparison of harmonic response analysis results between rings with and without foot structure

从图 12 中可以看到,对于含底脚圆环而言,第 2 阶和第 4 阶模态频率处形成了“双共振峰”,第 3 阶和第 5 阶模态频率处均只有单个共振峰,仿真结果与理论分析是一致的。此外,还可以看出,相比于含齿圆环,底脚的引入主要引起了频率分裂现象和频率大小的变化,并没有导致频率成分发生明显变化,但频率分裂现象导致的“双共振峰”仍然增加了共振频率范围。需要指出的是,在实际的电机中,定子的底脚通常尺寸较大、形状复杂,并且受到基座的约束,因而会对定子的模态产生更复杂的影响,有待进一步研究。

4 结 论

本文采用圆环解析模型作为电机定子振动特性的分析模型,分析了电机定子径向振动的模态频率和振型。然后,以齿槽和底脚作为定子中典型的附加结构,采用摄动法对定子振动中的模态频率分裂现象进行了理论分析和规律总结。最后,通过有限元仿真验证了理论计算结果的有效性。得到的主要

结论如下:

(1)考虑定子的无约束状态,用二维圆环模型代替三维圆柱壳体模型,可以准确、高效地计算出电机定子的低阶径向模态频率($n=0,1,2,3,4$)。此外,圆环模型的求解精度与定子等效圆环的厚径比密切相关,当等效圆环的厚径比大于0.2时,求解高阶径向模态频率($n \geq 5$)时需要引入与厚径比相关的影响系数。

(2)考虑定子的无约束状态,电机定子的模态振动主要表现为纯周向振型,对应的轴向振型阶次为0,周向振型阶次等于定子周向振型中节点数的一半。此时,虽然也存在轴向阶次不为0的振型,但是仅当激振力方向为轴向时这些模态才被激起,因此在电机的电磁振动分析中,可以不予关注。

(3)附加结构的存在可能会引起电机定子的模态频率分裂,导致“双共振峰”的现象;附加结构的分布形式对定子频率分裂特性具有重要影响。对于旋转对称结构(如齿槽),定子模态频率分裂的阶次与结构的数量相关(如齿槽数 N ,当阶次 n 满足 $2n/N$ 为整数时频率分裂);对于轴对称结构(如底脚),定子模态频率分裂的阶次与结构的位置角相关(如底脚间夹角 2φ ,仅当阶次 $n=(2l+1)\pi/(4\varphi)$ 时频率才不发生分裂)。

参考文献:

[1] 王玎,祝长生,符嘉靖. 基于有限元的异步电机电磁振动分析[J]. 振动与冲击,2012,31(2):140-144.
Wang Ding, Zhu Changsheng, Fu Jiaping. Electromagnetically excited vibration analysis for an asynchronous electrical machine with finite element method[J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(2):140-144.

[2] 陈世坤. 电机设计[M]. 北京:高等教育出版社,1982.

[3] 李晓华,黄苏融,张琪. 电动汽车用永磁同步电机定子结构固有频率分析[J]. 中国电机工程学报,2017,37(8):2383-2391.
Li Xiaohua, Huang Surong, Zhang Qi. Analysis of natural frequencies of stator structure of permanent magnet synchronous motors for electric vehicles [J]. Proceedings of the CSEE, 2017, 37(8):2383-2391.

[4] Gieras J F, Wang C, Lai J C. Noise of Polyphase Electric Motors[M]. Boca Raton: CRC Press, 2005.

[5] McCloskey A, Arrasate X, Hernández X, et al. Analytical calculation of vibrations of electromagnetic origin in electrical machines[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2018, 98:557-569.

[6] Hu S L, Zuo S G, Wu H, et al. An analytical method for calculating the natural frequencies of a motor considering orthotropic material parameters[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2018, 66(10):7520-7528.

[7] Girgis R S, Verma S P. Method for accurate determination of resonant frequencies and vibration behaviour of stators of electrical machines[C]. IEE Proceedings B: Electric Power Applications, 1981, 128(1): 1-11.

[8] Xing Z Z, Wang X H, Zhao W L, et al. Calculation method for natural frequencies of stator of permanent magnet synchronous motors based on three-dimensional elastic theory[C]. 2021 13th International Symposium on Linear Drives for Industry Applications. Wuhan, 2021.

[9] 邱家俊,李文兰. 边界约束对水轮发电机定子系统固有频率的影响[J]. 大电机技术,1998(2):1-5.
Qiu Jiajun, Li Wenlan. The influence of various boundary constraints on the natural frequencies of hydrogenerator stator system[J]. Large Electric Machine and Hydraulic Turbine, 1998(2):1-5.

[10] 于慎波,王辉. 电机定子圆柱壳体周向模态频率计算[J]. 电机与控制学报,2014,18(6):102-107.
Yu Shenbo, Wang Hui. Investigation of circumferential mode frequencies of circular cylindrical shells of stator in electric motor[J]. Electric Machines and Control, 2014, 18(6):102-107.

[11] 陈永校,诸自强,应善成. 电机噪声的分析与控制[M]. 杭州:浙江大学出版社,1987.

[12] 王宏华,王治平,江泉. 开关型磁阻电动机固有频率解析计算[J]. 中国电机工程学报,2005,25(12):133-137.
Wang Honghua, Wang Zhiping, Jiang Quan. Analytical calculating of natural frequencies of stators of switched reluctance motor based on electromechanical analogy method[J]. Proceedings of the CSEE, 2005, 25(12):133-137.

[13] 邢泽智,王秀和,赵文良,等. 表贴式永磁同步电机电磁激振力波计算与定子振动特性分析[J]. 中国电机工程学报,2021,41(14):5004-5013.
Xing Zezhi, Wang Xiuhe, Zhao Wenliang, et al. Calculation of electromagnetic force waves and analysis of stator vibration characteristics of surface mount permanent magnet synchronous motor[J]. Proceedings of the CSEE, 2021, 41(14):5004-5013.

[14] 陈永校,诸自强. 电机定子的固有频率及其模态的实验研究[J]. 大电机技术,1986(2):16-21.
Chen Yongxiao, Zhu Ziqiang. Experimental research on the natural frequency and mode of motor stator [J]. Large Electric Machine and Hydraulic Turbine, 1986

- (2):16-21.
- [15] Singal R K, Williams K, Verma S P. Vibration behaviour of stators of electrical machines, part II: experimental study[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1987, 115(1):13-23.
- [16] 祝长生, 陈永校. 三相异步电机结构的模态特性[J]. *电工电能新技术*, 1997(1):1-5.
Zhu Changsheng, Chen Yongxiao. The structural dynamic behaviours of a three phase induction motor [J]. *Advanced Technology of Electrical Engineering and Energy*, 1997(1):1-5.
- [17] 胡海昌. 参数小变化对本征值的影响[J]. *力学与实践*, 1981(2):29-30.
- [18] 陈塑寰. 退化系统振动分析的矩阵摄动法[J]. *吉林工业大学学报*, 1981(4):11-18.
- [19] Wu X H, Parker R G. Vibration of rings on a general elastic foundation[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 295(1-2):194-213.
- [20] Bisegna P, Caruso G. Frequency split and vibration localization in imperfect rings[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 306(3-5):691-711.
- [21] Wang S Y, Xiu J, Gu J, et al. Prediction and suppression of inconsistent natural frequency and mode coupling of a cylindrical ultrasonic stator[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2010, 224(9):1853-1862.
- [22] 王世宇, 陈东亮, 刘建平, 等. 分组对称旋转周期结构固有频率分裂解析分析[J]. *天津大学学报*, 2012, 45(5):393-399.
Wang Shiyu, Chen Dongliang, Liu Jianping, et al. Analytical analysis on natural frequency splitting of rotationally periodic structure with grouped features[J]. *Journal of Tianjin University*, 2012, 45(5):393-399.
- [23] 贾启芬, 刘习军. *机械与结构振动*[M]. 天津:天津大学出版社, 2007:158-161.

Analysis of modal frequency splitting characteristics of motor stator vibration

XU Gang-hui, ZHU Chang-sheng

(College of Electrical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: A key way to reduce vibration and noise of motor is to effectively suppress the vibration of the motor stator excited by the radial electromagnetic force in the motor, whereas the accurate calculation of modal frequencies and modal shapes is the basis for suppressing the radial vibration of the motor stator. The elasticity analytical model of the circular ring is used as the vibration analysis model of the motor stator, based on which the modal analysis of the motor stator under the unconstrained state is carried out, and the analytical solutions of the modal frequencies and modal shapes of the stator's radial vibration are obtained. Taking cogging and footing as typical additional structures, the perturbation method is introduced to analyze the frequency splitting phenomenon in the motor stator, and the criteria for determining whether the frequency is split or not and the order of the splitting are summarized. The validity of the theoretical methods and calculations in this paper is verified by finite element software ANSYS. The results show that the established two-dimensional ring model can be accurately and efficiently applied to the analysis of the modal characteristics of the motor stator, and the distribution form of the additional structure has an important influence on the frequency splitting characteristics of the stator.

Key words: motor stator; modal frequencies; modal shapes; ring model; frequency splitting

作者简介: 徐港辉(1995—),男,博士研究生。电话:18702100769; E-mail: gh_xu@zju.edu.cn。

通讯作者: 祝长生(1963—),男,教授。电话:13857172647; E-mail: zhu_zhang@zju.edu.cn。