

非接地负刚度动力吸振器动力学设计及优化

刘海平^{1,2}, 黄志锋¹, 王 岩¹, 边新孝¹

(1. 北京科技大学机械工程学院, 北京 100083; 2. 北京科技大学顺德研究生院, 广东 佛山 528300)

摘要: 接地负刚度动力吸振器有着良好的振动控制效果, 但是在实际工程应用中, 负刚度元件往往无法与地面直接相连。提出一种非接地负刚度动力吸振器, 根据所建理论模型, 得到系统的频响函数, 利用最大值最小化理论获得非接地负刚度动力吸振器的最优设计参数, 并与其他典型的动力吸振器模型进行对比。计算结果表明, 由于引入负刚度元件, 非接地负刚度动力吸振器的振动控制效果显著优于传统线性动力吸振器, 为负刚度动力吸振器的工程应用提供了一定理论参考。

关键词: 动力吸振器; 非接地; 负刚度; 参数优化

中图分类号: O328; TH113.1

文献标志码: A

文章编号: 1004-4523(2023)04-0973-06

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2023.04.010

引 言

动力吸振器(DVA)又称调谐质量阻尼器, 是一种附加在受激励主系统上以抑制其动态响应的控制措施。Frahm^[1]发明了第一个无阻尼 DVA, 受其窄带特性影响导致对主振系动态响应的抑制效果有限。在此基础上, 通过配置不同的线性元件(如: 阻尼单元和刚度单元)分别提出 Voigt 型含阻尼 DVA^[2] 和三要素型 DVA^[3], 其减振性能得到进一步改善。

近年, 众多学者通过在动力吸振器中引入接地非线性负刚度元件的方式探索提升其减振性能的方法和途径。文献[4-5]提出两种含有接地负刚度弹簧元件的动力吸振器, 通过固定点理论对该类动力吸振器的最优参数展开研究, 该方案不仅能显著降低主系统幅频曲线的峰值, 而且能拓宽有效减振频率范围。范舒铜等^[6]将具有黏弹性特性的 Maxwell 模型引入系统, 提出一种含惯容和接地负刚度的动力吸振器。陈杰等^[7]将惯容器和负刚度弹簧引入动力吸振器实现对梁横向振动的抑制。Zhou 等^[8]在两类典型动力吸振器模型中插入接地负刚度, 建立相应的理论模型并给出闭环最优解析解。为进一步降低接地负刚度动力吸振器在低频范围的共振峰幅值, 代晗等^[9]引入时滞反馈控制, 并完成等峰值优化。

刘刚等^[10]设计了一种变质量-接地负刚度动力吸振器, 具有较好的低频减振效果。

在工程应用领域, Huang 等^[11]以潜艇传动轴系纵向振动为抑制对象, 采用碟簧和橡胶垫构成接地负刚度动力吸振器实现对其振动的有效抑制。苏智伟等^[12]从理论角度研究了负刚度动力吸振器作为舰船大型机械设备减振抗冲击器件的可行性。Liu 等^[13]则将负刚度动力吸振器引入到轨道交通领域, 通过理论方法重点研究其对钢轨振动噪声控制的有效性。Yao 等^[14]为抑制转子系统的振动, 提出一种利用环形永磁体实现负刚度的接地负刚度动力吸振器, 通过实验证实所提方案可以实现有效抑振。Zhou 等^[15]研究一种接地负刚度动力吸振器并将其应用在浮置板轨道上, 以降低小质量比条件下的轨道振动。Chen 等^[16]分析了负刚度机构用于斜拉桥拉索振动控制时的多模态阻尼效应, 并发现负刚度机构可以改善所有拉索模态的阻尼效果。

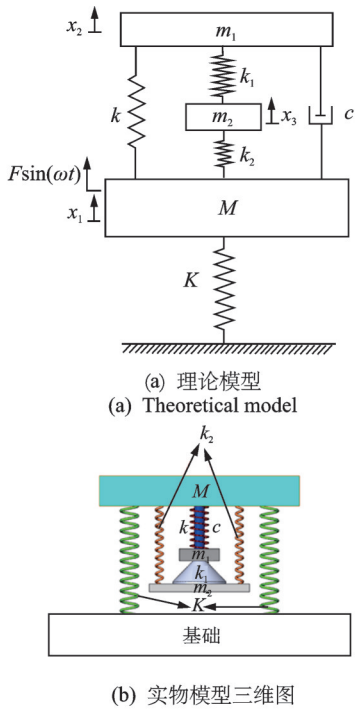
综上所述, 在已有研究中, 负刚度元件均采用接地的配置方式。但在实际工程中, 如: 输油管道、桥梁、空间展开臂等多种应用场合, 负刚度元件往往无法与地面直接相连。因此, 本文提出一种非接地负刚度动力吸振器并建立其理论模型; 利用所建模型, 推导出系统的频响函数; 进一步, 利用最大值最小化理论获得非接地负刚度动力吸振器的最优设计参数。

收稿日期: 2021-11-12; **修订日期:** 2022-02-07

基金项目: 中央高校基本科研业务费资助项目(FRF-MP-20-32); 广东省基础与应用基础研究基金资助项目(2021B1515120049)。

1 动力吸振器建模

本文提出的负刚度动力吸振器模型,如图1所示。其中, M, m_1, K, k 分别表示主系统和动力吸振器的质量和刚度; c 表示动力吸振器阻尼; k_1 为负刚度弹簧元件的刚度; m_2 为引入的支撑质量; k_2 为支撑质量与主系统的连接刚度; F 为激励力; ω 表示激励力频率; x_1, x_2, x_3 分别代表主系统和动力吸振器的位移。



(a) Theoretical model
(b) The three-dimensional graph for physical model

图1 含非接地负刚度元件的动力吸振器模型
Fig.1 Dynamic vibration absorber model with ungrounded negative stiffness

图1所示模型对应的运动微分方程为:

$$\begin{cases} M\ddot{x}_1(t) + Kx_1(t) + k[x_1(t) - x_2(t)] + \\ c[\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)] + k_2[x_1(t) - x_3(t)] = \\ F \sin(\omega t) \\ m_1\ddot{x}_2(t) + k_1[x_2(t) - x_3(t)] + \\ k[x_2(t) - x_1(t)] + c[\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)] = 0 \\ m_2\ddot{x}_3(t) + k_1[x_3(t) - x_2(t)] + \\ k_2[x_3(t) - x_1(t)] = 0 \end{cases} \quad (1)$$

引入下列参数:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= m_1/M, \mu_2 = m_2/M, \omega_1 = \sqrt{K/M}, \\ \omega_2 &= \sqrt{k/m_1}, \omega_3 = \sqrt{k_2/m_2}, \\ \xi_1 &= c/(2m_1\omega_2), \alpha_1 = k_1/k, \alpha_2 = k_1/k_2. \end{aligned}$$

式(1)可以进一步写成:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) + \omega_1^2 x_1(t) + \mu_1 \omega_2^2 [x_1(t) - x_2(t)] + \\ 2\mu_1 \omega_2 \xi_1 [\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)] + \\ \mu_2 \omega_3^2 [x_1(t) - x_3(t)] = \frac{F}{M} \sin(\omega t) \\ \ddot{x}_2(t) + \alpha_1 \omega_2^2 [x_2(t) - x_3(t)] + \omega_2^2 [x_2(t) - \\ x_1(t)] + 2\omega_2 \xi_1 [\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)] = 0 \\ \ddot{x}_3(t) + \alpha_2 \omega_3^2 [x_3(t) - x_2(t)] + \\ \omega_3^2 [x_3(t) - x_1(t)] = 0 \end{cases} \quad (2)$$

假设:

$$x_1 = H_1 e^{j\omega t}, x_2 = H_2 e^{j\omega t}, x_3 = H_3 e^{j\omega t} \quad (3)$$

令 $s = j\omega$, 将式(3)代入式(2)可得:

$$\begin{cases} B_1 H_1 - \mu_1 B_2 H_2 - \mu_2 B_3 H_3 = f \\ B_4 H_2 - B_5 H_3 - B_2 H_1 = 0 \\ B_6 H_3 - B_7 H_2 - B_3 H_1 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

式中 $B_1 = -\omega^2 + \omega_1^2 + \mu_1 \omega_2^2 + 2\mu_1 \omega_2 \xi_1 s + \mu_2 \omega_3^2$,
 $B_2 = \omega_2^2 + 2\omega_2 \xi_1 s$, $B_3 = \omega_3^2$, $B_4 = -\omega^2 + \alpha_1 \omega_2^2 + \omega_2^2 + 2\omega_2 \xi_1 s$,
 $B_5 = \alpha_1 \omega_2^2$, $B_6 = -\omega^2 + \alpha_2 \omega_3^2 + \omega_3^2$, $B_7 = \alpha_2 \omega_3^2$, $f = F/M$ 。

求解方程(4),可以得到主振系振幅:

$$X_1 = |H_1| \quad (5)$$

对式(5)进行无量纲化处理,引入静态位移 X_J 和振幅放大系数,可得:

$$A_m = \left| \frac{X_1}{X_J} \right| = \left\{ (R^2 + G^2 \xi_1^2) / [(T + I + O + P)^2 + (J + K + L + M)^2 \xi_1^2] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

式中 $\lambda = \omega/\omega_1, \nu = \omega_2/\omega_1, X_J = F/K$, 并令 $\beta = \omega_3/\omega_1$, 其他变量表达式详见附录。

对式(6)进行分析并推导,可以证明其幅频响应曲线都将通过3个独立于阻尼比的点,这3个点称作动力吸振器主系统幅频响应曲线的固定点。为了进一步说明,图2给出不同阻尼比情况下的幅频响应曲线。图2中, $\mu_1 = 0.05, \mu_2 =$

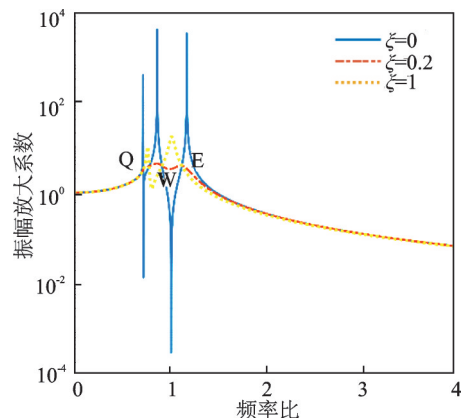


图2 不同阻尼比对应的幅频响应曲线

Fig.2 The amplitude-frequency response curves for different damping ratios

0.05, $\alpha_1 = -0.193, \alpha_2 = -0.25, \nu = 1.058$ 。从图2可以看出曲线均通过Q, W和E这3个固定点。

2 优化设计

由式(6)可以看出,采用固定点理论^[17-18]推导过程复杂,较难获得解析解。本节基于序列二次规划算法^[19-22],对主振系振幅放大因子进行优化分析,利用MATLAB优化工具箱编写优化程序。

由于主系统的幅频曲线存在2个峰值, H_∞ 优化的最终目的是实现等峰降幅,本质上是最大值最小化问题。本文所提出负刚度动力吸振器模型的优化设计思路是:使振幅放大系数 A_m 的峰值达到最小。优化目标为振幅放大系数 A_m , 优化设计变量为频率比 ν , 阻尼比 ξ_1 , 刚度比 α_1 和 α_2 。其中,频率比 ν 的取值范围为 $(0, 2]$, 阻尼比 ξ_1 的取值范围为 $(0, 1]$, 刚度比 α_1 的取值范围为 $[-1, 0)$, 刚度比 α_2 的取值范围为 $[-0.5, 0)$ 。相应负刚度动力吸振器的 H_∞ 优化数学模型可以表示为:

$$\min_{\nu, \xi_1, \alpha_1, \alpha_2} \left\{ \max_{\substack{0 < \nu \leq 2 \\ 0 < \xi_1 \leq 1 \\ -2 \leq \alpha_1 < 0 \\ -5 \leq \alpha_2 < 0}} [A_m(\nu, \xi_1, \alpha_1, \alpha_2, \mu_2)] \right\} \quad (7)$$

式中 A_m 为由频率比 ν , 阻尼比 ξ_1 , 刚度比 α_1 和 α_2 , 以及质量比 μ_2 作为自变量的目标函数。

本文采用序列二次规划算法对负刚度动力吸振器进行优化设计,具体计算流程如图3所示。

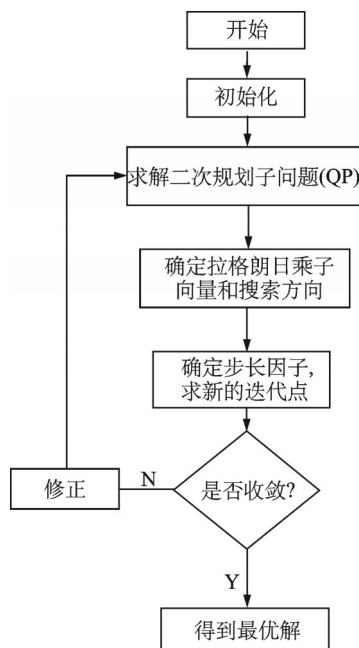


图3 序列二次规划算法流程图

Fig. 3 Sequence quadratic programming algorithm flow chart

3 计算结果分析

为了便于分析,暂定含负刚度动力吸振器动力系统的初始设计参数为: $M=1 \text{ kg}, K=1000 \text{ N/m}, \mu_1=0.05, \mu_2=0.05$ 。利用第2节提出的优化设计方法计算得到非接地负刚度动力吸振器的最优设计参数,如表1所示。

表1 非接地负刚度动力吸振器最优设计参数

Tab. 1 Optimal design parameters of dynamic vibration absorber with ungrounded negative stiffness

ν	ξ_1	α_1	α_2
1.058	0.223	-0.193	-0.25

为了评估负刚度对系统动态响应的影响,假设 k_1 为正刚度弹簧元件,利用相同的优化方法获得非接地正刚度动力吸振器最优设计参数,如表2所示。

表2 非接地正刚度动力吸振器最优设计参数

Tab. 2 Optimal design parameters of dynamic vibration absorber with ungrounded positive stiffness

ν	ξ_1	α_1	α_2
0.78	0.324	0.704	0.503

3.1 频响曲线

为了评价非接地负刚度动力吸振器的减振效果,分别将相同主系统未加吸振器、安装传统线性动力吸振器、接地负刚度动力吸振器^[19]和非接地正刚度吸振器,由最优设计参数计算得到幅频响应曲线,并进行对比,结果如图4所示。从图4中可以看出,非接地负刚度动力吸振器相比传统线性动力吸振器,能够大幅降低主振系的共振峰值,并有效拓宽减振频带;相比非接地正刚度动力吸振器未引入显著的共振峰;相比接地负刚度动力吸振器则可以保证主振系在低频范围的响应未被放大。

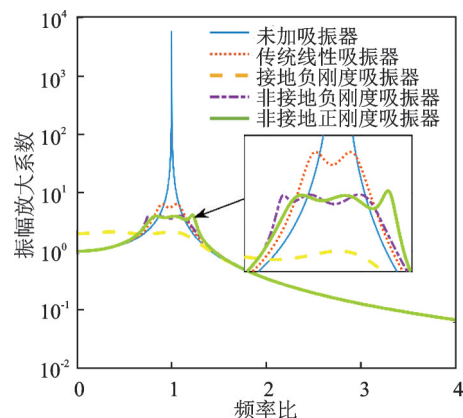


图4 不同形式动力吸振器幅频响应曲线

Fig. 4 The amplitude-frequency response curves for different dynamic vibration absorbers

3.2 时域响应

工程中,系统所受激励大多为随机激励,这里给出安装不同类型动力吸振器主系统受随机激励的动态响应。

为了便于对比分析,此处将主系统位移进行无量纲化处理:

$$X = \frac{x_1(t)}{X_j} \quad (8)$$

式中 $x_1(t)$ 为主系统位移。

构建 50 s 服从正态分布的随机力激励,均值为 0,方差为 1,可以得到未安装动力吸振器主系统的位移时程曲线,如图 5 所示。图 6 为引入不同类型动力吸振器后主系统的位移时程曲线。从图 6 可见,在系

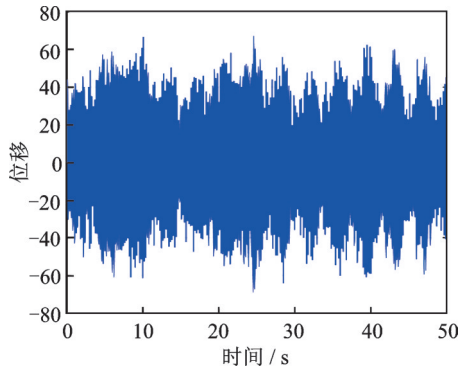
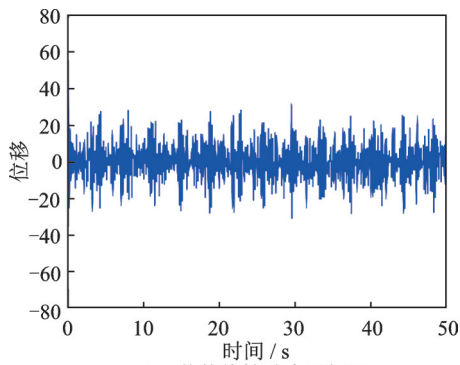
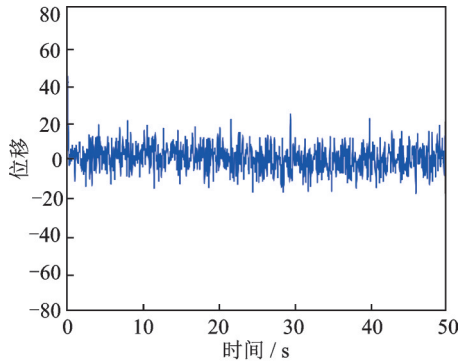


图5 未安装动力吸振器主系统位移时程曲线

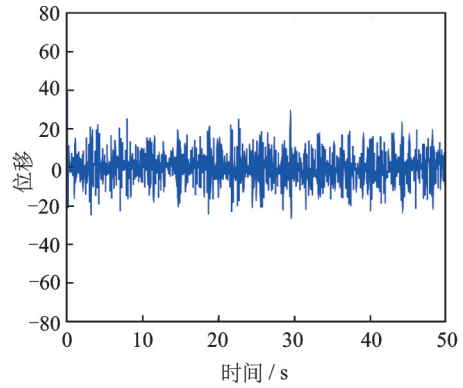
Fig. 5 The displacement time history curve of main system without dynamic vibration absorber



(a) 传统线性动力吸振器
(a) The traditional linear dynamic vibration absorber

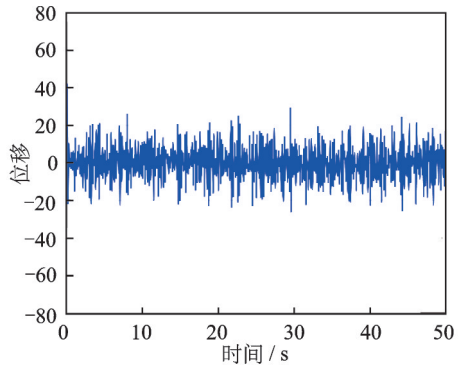


(b) 接地负刚度动力吸振器
(b) The dynamic vibration absorber with grounded negative stiffness



(c) 非接地负刚度动力吸振器

(c) The dynamic vibration absorber with ungrounded negative stiffness



(d) 非接地正刚度动力吸振器

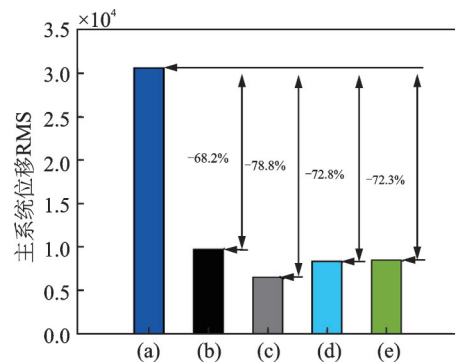
(d) The dynamic vibration absorber with ungrounded positive stiffness

图6 含不同形式动力吸振器主系统时程位移曲线

Fig. 6 The displacement time history curves for different dynamic vibration absorbers

统中引入负刚度元件减振效果较好。通过比较可以发现接地负刚度动力吸振器的振动控制效果最好。

为了更直观地分析,采用主振系位移响应均方根值作为评价指标,对比不同类型动力吸振器的减振效果,如图 7 所示。由图 7 可见,非接地负刚度动力吸振器和非接地正刚度动力吸振器可以分别使



(a) 未安装动力吸振器;(b) 安装传统线性吸振器;(c) 安装接地负刚度动力吸振器;(d) 安装非接地负刚度动力吸振器;(e) 安装非接地正刚度动力吸振器

图7 含不同形式动力吸振器主系统位移响应均方根值

Fig. 7 Mean square root values of displacement responses of the main system with different dynamic vibration absorbers

主系统响应衰减 72.8% 和 72.3%, 减振效果比接地负刚度动力吸振器差, 但优于传统线性动力吸振器。

4 结 论

考虑在工程实际中负刚度元件无法直接接地的难题, 本文提出一种非接地负刚度动力吸振器模型并进行优化设计与分析。通过与已有动力吸振器方案对比发现, 非接地负刚度动力吸振器的减振控制效果较接地方案差, 但优于传统线性动力吸振器。相关研究可为负刚度动力吸振器的工程应用提供一定理论参考。

参考文献:

- [1] Frahm H. Device for damping vibrations of bodies: U.S. Patent 089958[P]. 1909-10-30.
- [2] Ormondroyd J, Den Hartog J P. The theory of the dynamic vibration absorber[J]. Journal of Applied Mechanics, 1928, 50: 9-22.
- [3] Asami T, Nishihara O. Analytical and experimental evaluation of an air damped dynamic vibration absorber: design optimizations of the three-element type model[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 1999, 121(3): 334-342.
- [4] 彭海波, 申永军, 杨绍普. 一种含负刚度元件的新型动力吸振器的参数优化[J]. 力学学报, 2015, 47(2): 320-327.
PENG Haibo, SHEN Yongjun, YANG Shaopu. Parameters optimization of a new type of dynamic vibration absorber with negative stiffness[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2015, 47(2): 320-327.
- [5] Shen Yongjun, Peng Haibo, Li Xianghong, et al. Analytically optimal parameters of dynamic vibration absorber with negative stiffness[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2017, 85: 193-203.
- [6] 范舒桐, 申永军. 含惯容和接地刚度的黏弹性动力吸振器的参数优化[J]. 振动工程学报, 2022, 35(4): 814-825.
FAN Shutong, SHEN Yongjun. Parameter optimization of viscoelastic dynamic vibration absorber with inerter and grounded stiffness[J]. Journal of Vibration Engineering, 2022, 35(4): 814-825.
- [7] 陈杰, 孙维光, 吴杨俊, 等. 基于惯容负刚度动力吸振器的梁响应最小化[J]. 振动与冲击, 2020, 39(8): 15-22.
CHEN Jie, SUN Weiguang, WU Yangjun, et al. Minimization of beam response using inerter-based dynamic vibration absorber with negative stiffness[J]. Journal of Vibration and Shock, 2020, 39(8): 15-22.
- [8] Zhou Shaoyi, Jean-Mistral Claire, Chesne Simon. Closed-form solutions to optimal parameters of dynamic vibration absorbers with negative stiffness under harmonic and transient excitation[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2019, 157-158: 528-541.
- [9] 代哈, 赵艳影. 负刚度时滞反馈控制动力吸振器的等峰优化[J]. 力学学报, 2021, 53(6): 1720-1732.
Dai Han, Zhao Yanying. Equal-peak optimization of dynamic vibration absorber with negative stiffness and delay feedback control[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2021, 53(6): 1720-1732.
- [10] 刘刚, 郑大胜, 丁志雨, 等. 变质量负刚度动力吸振器试验研究[J]. 中国机械工程, 2018, 29(5): 538-543.
LIU Gang, ZHENG Dasheng, DING Zhiyu, et al. Experimental study on variable mass-negative stiffness dynamic absorber[J]. China Mechanical Engineering, 2018, 29(5): 538-543.
- [11] Huang Xiuchang, Su Zhiwei, Hua Hongxing. Application of a dynamic vibration absorber with negative stiffness for control of a marine shafting system[J]. Ocean Engineering, 2018, 155: 131-143.
- [12] 苏智伟, 黄修长, 吴静波, 等. 含负刚度动力吸振的混合隔振系统振动冲击响应特性分析[J]. 中国舰船研究, 2019, 14(1): 59-65.
SU Zhiwei, HUANG Xiuchang, WU Jingbo, et al. Analysis on vibration and shock response of a hybrid isolation system using dynamic vibration absorber with negative stiffness[J]. Chinese Journal of Ship Research, 2019, 14(1): 59-65.
- [13] Liu Haiping, Zhu Dongmei. Controlling the vibration and noise of a ballasted track using a dynamic vibration absorber with negative stiffness[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F, Journal of Rail and Rapid Transit, 2020, 234(10): 1265-1274.
- [14] Yao Hongliang, Chen Zidong, Wen Bangchun. Dynamic vibration absorber with negative stiffness for rotor system[J]. Shock and Vibration, 2016, 2016: 1-13.
- [15] Zhou Li, Zhang Tianqi, Luo Yanyun. Parametric study of dynamic vibration absorber with negative stiffness applied to floating slab track[J]. KSCE Journal of Civil Engineering, 2021, 25(9): 3369-3375.
- [16] Chen Lin, Nagarajaiah Satish, Sun Limin. A unified analysis of negative stiffness dampers and inerter-based absorbers for multimode cable vibration control[J]. Journal of Sound and Vibration, 2021, 494: 115814.
- [17] Den Hartog J P. Mechanical Vibrations[M]. 3rd ed. New York: McGraw-Hall Book Company, 1947: 112-132.
- [18] 倪振华. 振动力学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1989.

- [19] 李三群, 刘海平, 郑智刚, 等. 火炮射击稳定性的序列二次规划算法与虚拟样机融合优化[J]. 兵工自动化, 2005, 24(3):1-2.
LI Sanqun, LIU Haiping, ZHENG Zhigang, et al. Optimization of firing stability for gun system based on combination of SQP and virtual prototyping [J]. Ordnance Industry Automation, 2005, 24(3):1-2.
- [20] Dai Lu, Xiao Rui. Optimal design and analysis of deployable antenna truss structure based on dynamic characteristics restraints [J]. Aerospace Science and Technology, 2020, 106:106086.
- [21] Schittkowski K, Yuan Y X. Sequential Quadratic Programming Methods [M]. John Wiley & Sons, Inc., 2011.
- [22] 邢昭阳, 申永军, 邢海军. 一种负刚度动力吸振器的数值参数优化[J]. 石家庄铁道大学学报(自然科学版), 2020, 33(4):36-43.
XING Zhaoyang, SHNE Yongjun, XING Haijun. Numerical parameter optimization of a dynamic vibration absorber with negative stiffness [J]. Journal of Shijiazhuang Tiedao University (Natural Science Edition), 2020, 33(4):36-43.

Dynamic design and optimization of dynamic vibration absorber with ungrounded negative stiffness

LIU Hai-ping^{1,2}, HUANG Zhi-feng¹, WANG Yan¹, BIAN Xin-xiao¹

(1.School of Mechanical Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China;

2.Shunde Graduate School, University of Science and Technology Beijing, Foshan 528300, China)

Abstract: The dynamic vibration absorber with grounded negative stiffness has good vibration control effect, but in practical engineering, the negative stiffness components are unable to be directly connected to the ground for a variety of applications. Therefore, a type of the dynamic vibration absorber with ungrounded negative stiffness is proposed in this paper. According to the established theoretical model, the frequency response function of the system is obtained, and the maximum value minimization theory is used to get the optimal design parameters of the dynamic vibration absorber with ungrounded negative stiffness, which is compared with other existing dynamic vibration absorber models. The calculation results show that due to the introduction of negative stiffness components, the vibration control effect of the dynamic vibration absorber with ungrounded negative stiffness is significantly better than that of traditional linear dynamic vibration absorber. The related research provides a theoretical reference for the engineering application of dynamic vibration absorber with negative stiffness.

Key words: dynamic vibration absorber; ungrounded; negative stiffness; parameter optimization

作者简介: 刘海平(1982—), 男, 博士, 教授。电话:(010)62334845; E-mail: liuhaiping@ustb.edu.cn。

附 录

式(6)中相关变量表达式:

$$R = -4\alpha_2\xi_1^2\mu_1\nu^2\beta^2\lambda^2 - 4\xi_1^2\mu_1\nu^2\beta^2\lambda^2 + 4\xi_1^2\mu_1\nu^2\lambda^4 + \alpha_1\mu_1\nu^4\beta^2 - \alpha_1\mu_1\nu^4\lambda^2 + \alpha_2\mu_1\nu^4\beta^2 - \alpha_2\mu_1\nu^2\beta^2\lambda^2 + \mu_1\nu^4\beta^2 - \mu_1\nu^4\lambda^2 - \mu_1\nu^2\beta^2\lambda^2 + \mu_1\nu^2\lambda^4,$$

$$G = 2\alpha_1\mu_1\nu^3\beta^2\lambda - 2\alpha_1\mu_1\nu^3\lambda^3 + 4\alpha_2\mu_1\nu^3\beta^2\lambda - 2\alpha_2\mu_1\nu\beta^2\lambda^3 + 4\mu_1\nu^3\beta^2\lambda - 4\mu_1\nu^3\lambda^3 - 2\mu_1\nu\beta^2\lambda^3 + 2\mu_1\nu\lambda^5,$$

$$T = 4\alpha_1\xi_1^2\mu_1^2\nu^4\lambda^4 + 4\alpha_2\xi_1^2\mu_1^2\nu^2\beta^2\lambda^4 - 4\alpha_2\xi_1^2\mu_1\nu^2\beta^2\lambda^2 + 4\alpha_2\xi_1^2\mu_1\nu^2\beta^2\lambda^4 + 4\xi_1^2\mu_1^2\nu^2\beta^2\lambda^4 - 4\xi_1^2\mu_1^2\nu^2\lambda^6 + 4\xi_1^2\mu_1\mu_2\nu^2\beta^2\lambda^4,$$

$$I = -\alpha_1\mu_1^2\nu^6\lambda^2 - \alpha_1\mu_1\mu_2\nu^4\beta^2\lambda^2 - \alpha_2\mu_1^2\nu^4\beta^2\lambda^2 - \alpha_2\mu_1\mu_2\nu^2\beta^4\lambda^2 - 4\xi_1^2\mu_1\nu^2\beta^2\lambda^2 + 4\xi_1^2\mu_1\nu^2\lambda^4 + 4\xi_1^2\mu_1\nu^2\beta^2\lambda^4 - 4\xi_1^2\mu_1\nu^2\lambda^6,$$

$$O = \alpha_1\mu_1\nu^4\beta^2 - \alpha_1\mu_1\nu^4\lambda^2 - \alpha_1\mu_1\nu^4\beta^2\lambda^2 + \alpha_1\mu_1\nu^4\lambda^4 + \alpha_2\mu_1\nu^4\beta^2 - \alpha_2\mu_1\nu^2\beta^2\lambda^2 - \alpha_2\mu_1\nu^4\beta^2\lambda^2 + \alpha_2\mu_1\nu^2\beta^2\lambda^4,$$

$$P = -\mu_1^2\nu^4\beta^2\lambda^2 + \mu_1^2\nu^4\lambda^4 - \mu_1\mu_2\nu^4\beta^2\lambda^2 + \mu_1\mu_2\nu^2\beta^2\lambda^4 + \mu_1\nu^4\beta^2 - \mu_1\nu^4\lambda^2 - \mu_1\nu^2\beta^2\lambda^2 + \mu_1\nu^2\lambda^4 - \mu_1\nu^4\beta^2\lambda^2 + \mu_1\nu^4\lambda^4 + \mu_1\nu^2\beta^2\lambda^4 - \mu_1\nu^2\lambda^6,$$

$$J = -4\alpha_1\mu_1^2\nu^5\lambda^3 - 2\alpha_1\mu_1\mu_2\nu^3\beta^2\lambda^3 - 4\alpha_2\mu_1^2\nu^3\beta^2\lambda^3 - 2\alpha_2\mu_1\mu_2\nu\beta^4\lambda^3 + 2\alpha_1\mu_1\nu^3\beta^2\lambda,$$

$$K = -2\alpha_1\mu_1\nu^3\lambda^3 - 2\alpha_1\mu_1\nu^3\beta^2\lambda^3 + 2\alpha_1\mu_1\nu^3\lambda^5 + 4\alpha_2\mu_1\nu^3\beta^2\lambda - 2\alpha_2\mu_1\nu\beta^2\lambda^3,$$

$$L = -4\alpha_2\mu_1\nu^3\beta^2\lambda^3 + 2\alpha_2\mu_1\nu\beta^2\lambda^5 - 4\mu_1^2\nu^3\beta^2\lambda^3 + 4\mu_1^2\nu^3\lambda^5 - 4\mu_1\mu_2\nu^3\beta^2\lambda^3 + 2\mu_1\mu_2\nu\beta^2\lambda^5,$$

$$M = 4\mu_1\nu^3\beta^2\lambda - 4\mu_1\nu^3\lambda^3 - 2\mu_1\nu\beta^2\lambda^3 + 2\mu_1\nu\lambda^5 - 4\mu_1\nu^3\beta^2\lambda^3 + 4\mu_1\nu^3\lambda^5 + 2\mu_1\nu\beta^2\lambda^5 - 2\mu_1\nu\lambda^7.$$