

变厚度旋转圆柱壳的自由振动研究

李 涵¹, 李欣业¹, 白 斌², 钱 毅³, 桑建兵¹, 李 想¹

(1. 河北工业大学机械工程学院, 天津 300401; 2. 湖南三一工业职业技术学院工程机械学院, 湖南 长沙 410129;
3. 核工业理化工程研究院粒子输运与富集技术国防科技重点实验室, 天津 300180)

摘要: 为了提高旋转圆柱壳结构的使用性能和工作效率, 减轻其质量已成为有效方式之一, 针对这一需求, 旋转圆柱壳结构有设计为厚度沿轴向变化即变厚度的趋势。基于此, 利用 Chebyshev-Ritz 方法, 对厚度沿轴向有 3 种线性变化形式的变厚度旋转圆柱壳的自由振动进行研究。考虑科氏力与离心力的影响, 基于 Sanders 壳理论, 将圆柱壳的位移场近似展开为 Chebyshev 多项式与边界函数乘积的形式, 计算变厚度旋转圆柱壳的动能与势能, 再根据 Ritz 方法获得变厚度旋转圆柱壳的频率方程。在此基础上, 将所得结果与已有文献中的结果进行比较, 验证了建模方法的准确性, 并对计算结果进行了收敛性研究。最后比较了不同厚度变化形式下旋转圆柱壳的自由振动, 并讨论了转速、厚度变化参数、圆柱壳长径比等参数对变厚度旋转圆柱壳自由振动的影响。

关键词: 自由振动; 变厚度旋转圆柱壳; 固有频率; Chebyshev-Ritz 法

中图分类号: O327 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2023)05-1258-08

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2023.05.009

引 言

旋转圆柱壳结构在工业领域中应用广泛, 例如, 高速旋转的离心分离器、航空发动机的转子系统等。在这些工程装备中, 旋转圆柱壳结构所处的工作条件日趋严苛复杂, 此外, 为了进一步提高使用性能和工作效率, 旋转圆柱壳结构的壁厚呈现出越来越薄的趋势, 这些因素导致其结构振动问题日益凸显。此外, 由于离心力和科氏力以及初始环向张力的影响, 相对于静止的圆柱壳, 旋转圆柱壳会出现特殊的行波振动现象。因此, 对旋转圆柱壳结构振动特性的研究具有重要意义。

对旋转圆柱壳结构自由振动分析的求解方法有多种, 例如, 一些学者采用 Galerkin 法对旋转圆柱壳的自由振动特性进行分析^[1-5], 同时, 微分求积法也常用于旋转圆柱壳的自由振动研究^[6-11]。此外, 与有限元方法相比, 虽然 Ritz 法难以分析几何形状复杂的结构, 但其计算过程比较简单, 且能保持较高的精度, 因此仍被广泛应用于旋转圆柱壳的振动特性研究中。例如, 李文达等^[12]通过 Ritz 法, 采用改进的傅里叶级数位移形式, 对弹性约束边界下的旋转薄壁圆柱壳结构的自由振动进行分析; 还有研究利用

Ritz 法, 采用 Gram-Schmidt 多项式构成近似函数, 对旋转圆柱壳的自由振动进行分析^[13-14]; Lei 等^[15]运用无单元 kp-Ritz 法, 对旋转圆柱壳的自由振动进行了分析; Qin 等^[16]通过 Ritz 法, 采用 Chebyshev 多项式构成近似函数, 研究了旋转圆柱壳的自由振动。但是, 在上述研究采用 Ritz 法对旋转圆柱壳振动特性进行求解的过程中, 多采用傅里叶级数和 Gram-Schmidt 多项式构成近似函数, 较少采用 Chebyshev 多项式, 而 Chebyshev 多项式在数值运算中具有正交性、快速收敛性和稳定性的优点^[17], 比较适合构成近似函数。

此外, 上述研究都未考虑旋转圆柱壳厚度变化的影响, 然而在实际应用中, 为了进一步减轻重量, 旋转圆柱壳结构有时需要设计为变厚度的形式, 即厚度沿轴向变化。因此, 已有学者对变厚度旋转圆柱壳的行波振动特性进行了分析。Quoc 等^[2]采用 Galerkin 法对处在热环境下的变厚度旋转圆柱壳的振动特性进行了研究, 但是该研究只考虑了一种厚度变化形式。

基于上述讨论, 本文将考虑 3 种厚度变化形式, 并采用 Chebyshev-Ritz 方法, 比较不同厚度变化形式下旋转圆柱壳的自由振动, 讨论转速、厚度变化参数和圆柱壳长径比等参数对变厚度旋转圆柱壳自由振动的影响, 该研究将对旋转圆柱壳结构的轻量化

收稿日期: 2021-12-10; **修订日期:** 2022-03-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11772011, 11972145); 河北省自然科学基金资助项目(E2020202217); 粒子输运与富集技术国防科技重点实验室开放课题研究基金项目(STPTS202111)。

设计具有一定意义。

1 理论建模

为了研究变厚度旋转圆柱壳结构的行波振动特性,首先对其进行理论建模。如图 1 所示,圆柱壳结构以转速 Ω 绕其中心轴旋转,其长度为 L ,平均半径为 R , (x, θ, z) 为建立在圆柱壳中曲面上的正交坐标系, u, v, w 分别为圆柱壳上任意一点沿 x, θ, z 三个方向上的位移分量。本文假定旋转圆柱壳的厚度 $h(x)$ 沿其轴向线性变化,如图 2 所示,可分为 3 种变化形式,分别记为 V1, V2 和 V3。在这 3 种不同的厚度变化形式下,圆柱壳上、下表面在坐标轴 z 方向上的坐标会发生变化,具体表达式如下:

V1 厚度变化形式:

$$h_1(x) = -\frac{1}{2}h_0\left(1 - k_h\frac{x}{L}\right) \quad (1a)$$

$$h_2(x) = \frac{1}{2}h_0\left(1 - k_h\frac{x}{L}\right) \quad (1b)$$

式中 $h_1(x)$ 和 $h_2(x)$ 分别表示圆柱壳上、下表面在坐标轴 z 方向上的坐标; h_0 表示圆柱壳初始厚度,即在 $x=0$ 时的厚度; k_h 表示厚度变化参数。

V2 厚度变化形式:

$$h_1(x) = -\frac{h_0}{2} \quad (2a)$$

$$h_2(x) = \frac{1}{2}h_0\left(1 - k_h\frac{x}{L}\right) \quad (2b)$$

V3 厚度变化形式:

$$h_1(x) = -\frac{1}{2}h_0\left(1 - k_h\frac{x}{L}\right) \quad (3a)$$

$$h_2(x) = \frac{h_0}{2} \quad (3b)$$

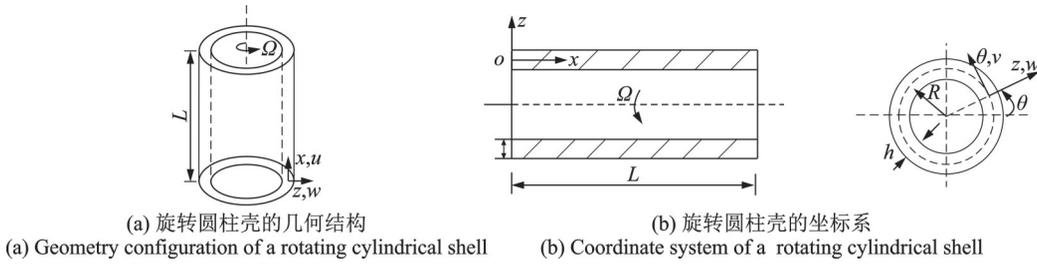


图 1 旋转圆柱壳结构示意图

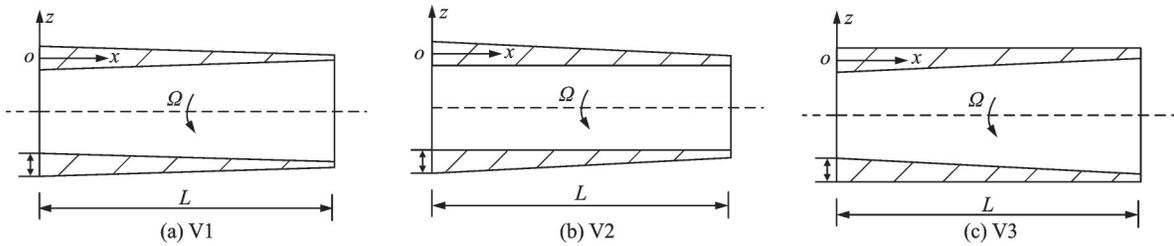


图 2 变厚度旋转圆柱壳的 3 种厚度变化形式

1.1 动能与势能求解

为了对所建模型进行固有频率的求解,本文采用 Chebyshev-Ritz 法对变厚度旋转圆柱壳结构进行研究,因此首先需给出圆柱壳的动能方程与势能方程。

旋转圆柱壳上任意一点的速度向量可以表示为:

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}} - \Omega \mathbf{i} \times (\mathbf{r} + R\mathbf{k}) \quad (4)$$

式中 \mathbf{r} 表示旋转圆柱壳在坐标系 (x, θ, z) 上的任意一点的位移向量,可以表示为 $\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$, 其中, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 分别为沿 x, θ, z 方向的单位向量; $\dot{\mathbf{r}}$ 为 \mathbf{r} 的一阶导数。

旋转圆柱壳的动能计算公式为:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) R dz dx d\theta \quad (5)$$

式中 ρ 表示密度。

然后,将公式(4)代入公式(5),得到旋转圆柱壳的动能方程为:

$$T = \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \left\{ \dot{u}^2 + [\dot{v} + \Omega(w + R)]^2 + (\dot{w} - \Omega v)^2 \right\} R dz dx d\theta \quad (6)$$

根据 Sanders 壳理论,旋转圆柱壳上任意一点的应变可以表示为:

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \epsilon_{xx}^{(0)} + z \cdot \epsilon_{xx}^{(1)} \\ \epsilon_{\theta\theta} = \epsilon_{\theta\theta}^{(0)} + z \cdot \epsilon_{\theta\theta}^{(1)} \\ \gamma_{x\theta} = \gamma_{x\theta}^{(0)} + z \cdot \gamma_{x\theta}^{(1)} \end{cases} \quad (7)$$

式中 $\epsilon_{xx}^{(0)}, \epsilon_{\theta\theta}^{(0)}$ 和 $\gamma_{x\theta}^{(0)}$ 为中曲面应变分量, $\epsilon_{xx}^{(1)}, \epsilon_{\theta\theta}^{(1)}$ 和 $\gamma_{x\theta}^{(1)}$ 为中曲面曲率分量, 可以分别表示为^[18]:

$$\begin{cases} \epsilon_{xx}^{(0)} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \\ \gamma_{x\theta}^{(0)} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases}, \begin{cases} \epsilon_{xx}^{(1)} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_{\theta\theta}^{(1)} = \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\ \gamma_{x\theta}^{(1)} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) \end{cases} \quad (8)$$

旋转圆柱壳的应力应变关系表示为:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

式中

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E}{1 - \mu^2}, \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{\mu E}{1 - \mu^2}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \mu)},$$

其中, E 为材料弹性模量, μ 为材料泊松比。

由旋转圆柱壳结构的变形引起的应变能可描述为:

$$U_s = \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \frac{1}{2} [\sigma_x \epsilon_{xx}^{(0)} + \sigma_\theta \epsilon_{\theta\theta}^{(0)} + \tau_{x\theta} \gamma_{x\theta}^{(0)} + z(\sigma_x \epsilon_{xx}^{(1)} + \sigma_\theta \epsilon_{\theta\theta}^{(1)} + \tau_{x\theta} \gamma_{x\theta}^{(1)})] R dz dx d\theta \quad (10)$$

由离心力引起的旋转圆柱壳的应变能表达式为^[19]:

$$U_{CF} = \frac{\rho}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} R^2 \Omega^2 \left\{ \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + \left[\frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \right]^2 + \left[\frac{1}{R} \left(-\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right) \right]^2 \right\} R dz dx d\theta \quad (11)$$

因此, 变截面旋转圆柱壳的总势能方程可以表示为:

$$U = U_s + U_{CF} \quad (12)$$

1.2 固有频率及模态振型求解

在上一小节得到的旋转圆柱壳动能方程与势能方程的基础上, 本小节利用 Chebyshev-Ritz 方法求解旋转圆柱壳固有频率及模态振型, 并给出求解过程。

首先, 旋转圆柱壳结构的位移场可表示为:

$$\begin{cases} u = U(x) \cos(n\theta + \omega_1 t) \\ v = V(x) \sin(n\theta + \omega_1 t) \\ w = W(x) \cos(n\theta + \omega_1 t) \end{cases} \quad (13)$$

式中 ω_1 为旋转圆柱壳的固有频率; n 为旋转圆柱

壳行波模态的环向波数; $U(x), V(x)$ 和 $W(x)$ 为模态函数, 在本文中, 这些模态函数通过 Chebyshev 多项式和其对应的边界函数的乘积近似展开, 具体公式为:

$$\begin{cases} U(\xi) = \sum_i^{n_{\max}} a_i f_u(\xi) P_i(\xi) \\ V(\xi) = \sum_j^{n_{\max}} b_j f_v(\xi) P_j(\xi) \\ W(\xi) = \sum_k^{n_{\max}} c_k f_w(\xi) P_k(\xi) \end{cases} \quad (14)$$

式中 a_i, b_j 和 c_k 为未知系数; n_{\max} 表示在计算中被截断的项数; $P_i(\xi), P_j(\xi)$ 和 $P_k(\xi)$ 为第一类 Chebyshev 表达式, 可以用三角函数的形式表示为:

$$P_l(\xi) = \cos[(l-1) \arccos(\xi)], \quad l = i, j, k \quad (15)$$

通过 Chebyshev 多项式可以以较低的计算成本实现较快的收敛速度, 并保持较高的精度, 但是它定义在区间 $[-1, 1]$ 上, 并在区间 $[-1, 1]$ 上才具有正交性, 所以需要进行坐标变换, 即 $\xi = 2x/L - 1$ 。 $f_u(\xi), f_v(\xi)$ 和 $f_w(\xi)$ 表示沿 ξ 方向的边界函数, 这些边界函数需要满足相应的旋转圆柱壳的几何边界条件, 具体表达式如表 1 所示。

表 1 不同边界条件下的边界函数

Tab. 1 The boundary function for different boundary conditions

边界条件	$f_u(\xi)$	$f_v(\xi)$	$f_w(\xi)$
F-S	1	$1 - \xi$	$1 - \xi$
S-F	1	$1 + \xi$	$1 + \xi$
S-S	1	$1 - \xi^2$	$1 - \xi^2$
F-C	$1 - \xi$	$1 - \xi$	$1 - \xi$
C-F	$1 + \xi$	$1 + \xi$	$1 + \xi$
C-C	$1 - \xi^2$	$1 - \xi^2$	$1 - \xi^2$

其次, 由公式(6)和(12)可获得变厚度旋转圆柱壳的能量表达式为:

$$\Pi = U - T \quad (16)$$

根据瑞利原理, 最可能的近似值通过使关于未知系数的能量表达式 Π 最小而被确定, 因此对能量表达式 Π 关于未知系数进行求导运算:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial b_j} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial c_k} = 0; \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n_{\max} \quad (17)$$

然后, 公式(17)可以进一步转化为矩阵形式下的特征值问题:

$$(K - \omega_1^2 M_1 - \omega_1^2 M_2) P = 0 \quad (18)$$

式中 P 为由未知系数组成的特征向量, 即旋转圆

柱壳的振型,表达式为:

$$P = [a_1 \cdots a_i b_1 \cdots b_j c_1 \cdots c_k]^T \quad (19)$$

K 为刚度矩阵, M_1 和 M_2 为质量矩阵,具体表达式分别为:

$$K = \begin{bmatrix} KU & KUV & KUW \\ KVV & KV & KVV \\ KWW & KVV & KW \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} MU & 0 & 0 \\ 0 & MV & 0 \\ 0 & 0 & MW \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & MA \\ 0 & MB & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

其中,各矩阵的第 i 行、第 j 列元素分别为:

$$KU_{ij} = \int_{-1}^1 \frac{\pi L}{4R^3} \left[\frac{8R^4 A_{11}}{L^2} \frac{d(f_u p_i)}{d\xi} \frac{d(f_u p_j)}{d\xi} + 2n^2 R^2 A_{66} f_u^2 p_i p_j \right] + \frac{n^2 \pi L}{2R} i_0 (R^2 + d^2) \Omega^2 f_u^2 p_i p_j d\xi \quad (23)$$

$$KUV_{ij} = \frac{\pi L}{4R^3} \left[\frac{-4nR^3 A_{66}}{L} f_u p_i \frac{d(f_v p_j)}{d\xi} + \frac{4nR^3 A_{12}}{L} f_v p_j \frac{d(f_u p_i)}{d\xi} \right] d\xi \quad (24)$$

$$KUW_{ij} = \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\pi L}{4R^3} \left[\frac{4R^3 A_{12}}{L} f_w p_j \frac{d(f_u p_i)}{d\xi} \right] \right\} d\xi \quad (25)$$

$$KVV_{ij} = \frac{\pi L}{4R^3} \left[\frac{-4nR^3 A_{66}}{L} f_u p_j \frac{d(f_v p_i)}{d\xi} + \frac{4nR^3 A_{12}}{L} f_v p_i \frac{d(f_u p_j)}{d\xi} \right] d\xi \quad (26)$$

$$KVV_{ij} = \frac{\pi L}{4R^3} \left[\frac{8R^4}{L^2} (A_{66} R^2 + D_{66}) \frac{d(f_v p_i)}{d\xi} \frac{d(f_v p_j)}{d\xi} + 2n^2 R^2 (A_{11} R^2 + D_{11}) f_v^2 p_i p_j \right] - \frac{L\pi R}{2} i_0 \Omega^2 f_v^2 p_i p_j + \frac{L\pi i_0}{2R} (R^2 + d^2) (n^2 + 1) \Omega^2 f_v^2 p_i p_j d\xi \quad (27)$$

$$KVV_{ij} = \int_{-1}^1 \frac{\pi L}{4R^3} \left[\frac{-8nR^2}{L^2} D_{12} f_v p_i \frac{d^2(f_w p_j)}{d\xi^2} + \frac{-16R^2}{L^2} n^2 R^2 D_{66} \frac{d(f_w p_j)}{d\xi} \frac{d(f_v p_i)}{d\xi} + 2nf_v p_i f_w p_j (A_{11} R^2 + D_{11} n^2) \right] + \frac{n\pi L}{R} i_0 (R^2 + d^2) \Omega^2 f_v p_i f_w p_j d\xi \quad (28)$$

$$KWU_{ij} = \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\pi L}{4R^3} \left[\frac{4R^3 A_{12}}{L} f_w p_i \frac{d(f_u p_j)}{d\xi} \right] \right\} d\xi \quad (29)$$

$$KWV_{ij} = \frac{\pi L}{4R^3} \left[\frac{-8nR^2}{L^2} D_{12} f_v p_j \frac{d^2(f_w p_i)}{d\xi^2} + \frac{-16R^2}{L^2} n^2 R^2 D_{66} \frac{d(f_w p_i)}{d\xi} \frac{d(f_v p_j)}{d\xi} + 2nf_v p_j f_w p_i (A_{11} R^2 + D_{11} n^2) \right] + \frac{n\pi L}{R} i_0 (R^2 + d^2) \Omega^2 f_v p_j f_w p_i d\xi \quad (30)$$

$$KW_{ij} = \int_{-1}^1 \frac{\pi L}{4R^3} \left[\frac{32R^4 D_{11}}{L^4} \frac{d^2(f_w p_i)}{d\xi^2} \frac{d^2(f_w p_j)}{d\xi^2} + \frac{8n^2 R^2 D_{12}}{L^2} f_w p_i \frac{d^2(f_w p_j)}{d\xi^2} + \frac{8n^2 R^2 D_{12}}{L^2} f_w p_j \frac{d^2(f_w p_i)}{d\xi^2} + \frac{32n^2 R^2 D_{66}}{L^2} \frac{d(f_w p_i)}{d\xi} \frac{d(f_w p_j)}{d\xi} + 2(D_{11} n^4 + A_{11} R^2) f_w^2 p_i p_j - \frac{L\pi R i_0}{2} \Omega^2 f_w^2 p_i p_j \right] + \frac{L\pi R i_0}{2R} (R^2 + d^2) \Omega^2 (n^2 + 1) f_w^2 p_i p_j d\xi \quad (31)$$

$$MU_{ij} = \int_{-1}^1 \left[\frac{\pi LR}{2} i_0 f_u^2 p_i p_j \right] d\xi \quad (32)$$

$$MV_{ij} = \int_{-1}^1 \left[\frac{\pi LR}{2} i_0 f_v^2 p_i p_j \right] d\xi \quad (33)$$

$$MW_{ij} = \int_{-1}^1 \left[\frac{\pi LR}{2} i_0 f_w^2 p_i p_j \right] d\xi \quad (34)$$

$$MA_{ij} = \int_{-1}^1 [\pi LR i_0 f_v f_w p_i p_j \Omega] d\xi \quad (35)$$

$$MB_{ij} = \int_{-1}^1 [\pi LR i_0 f_v f_w p_i p_j \Omega] d\xi \quad (36)$$

$$A_{11} = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} Q_{11} dz \quad (37)$$

$$A_{12} = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} Q_{12} dz \quad (38)$$

$$A_{66} = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} Q_{66} dz \quad (39)$$

$$D_{11} = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} z^2 Q_{11} dz \quad (40)$$

$$D_{12} = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} z^2 Q_{12} dz \quad (41)$$

$$D_{66} = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} z^2 Q_{66} dz \quad (42)$$

式中 $i_0 = d = h(x)$, $Q_{66} = G$ 。求解方程(18),即可得到与固有频率相对应的振型。

2 数值结果与讨论

本节首先将计算结果与文献[18]和[20]中的结果进行对比,并对其收敛性进行研究,以验证本文建模方法的准确性与收敛性,然后通过参数研究分析变厚度旋转圆柱壳的自由振动行波特性。在本文中,除特别提及外,旋转圆柱壳的长度 $L=1\text{ m}$,初始厚度 $h_0=0.02\text{ m}$,厚度变化参数 $k_h=0.5$,密度 $\rho=1072\text{ kg/m}^3$,弹性模量 $E=172\text{ GPa}$,剪切模量 $G=4.2\text{ GPa}$,泊松比 $\mu=0.31$,平均半径 $R=0.2$,转速 $\Omega=25\text{ r/s}$,无量纲频率参数 $w^*=wR\sqrt{\rho/E}$,无量纲转速 $\Omega^*=\Omega R\sqrt{\rho/E}$,下标“b”和“f”分别表示后行波与前行波。

2.1 比较与收敛研究

为了验证本文建模方法的准确性与收敛性,本小节进行了两个算例研究。

2.1.1 算例 1

如表 2 所示,分别给出了两端固定(C-C)边界条件下厚度均匀的旋转圆柱壳的后行波和前行波无量纲频率参数,并与文献[20]中的结果进行了对比,而且还进行了收敛性研究,列出了不同截断项数下的计算结果。在本算例中,旋转圆柱壳的长径比 $L/R=10$,厚径比 $h/R=0.05$,泊松比 $\mu=0.3$,无量纲频率参数 $w^*=wR\sqrt{\rho(1-\mu^2)/E}$,无量纲转速 $\Omega^*=\Omega R\sqrt{\rho(1-\mu^2)/E}$,这里 Ω^* 取 0.0025。

2.1.2 算例 2

如表 3 所示,算例 2 给出了两端简支(S-S)边界条件下厚度均匀的旋转圆柱壳的固有频率(Hz),并与文献[18]中的结果进行了对比。本算例中,圆柱壳长度 $L=0.256\text{ m}$,平均半径 $R=0.16\text{ m}$,厚度 $h=0.0025\text{ m}$,弹性模量 $E=110\text{ GPa}$,泊松比 $\mu=0.31$,密度 $\rho=4480\text{ kg/m}^3$,轴向半波数 $m=1$,转速 $\Omega=20000\text{ r/min}$ 。

表 2 旋转圆柱壳无量纲频率参数的比较和收敛性研究

无量纲 频率参数	n	Saito 等 ^[20]	Present					
			$n_{\max}=8$	$n_{\max}=9$	$n_{\max}=10$	$n_{\max}=11$	$n_{\max}=12$	$n_{\max}=13$
w_b^*	2	0.05993	0.05989	0.05987	0.05987	0.05986	0.05986	0.05986
	3	0.11455	0.11462	0.11461	0.11461	0.11461	0.114641	0.11461
	4	0.21313	0.21317	0.21317	0.21317	0.21316	0.21316	0.21316
w_f^*	2	0.05593	0.05589	0.05587	0.05587	0.05586	0.05586	0.05586
	3	0.11155	0.11160	0.11160	0.11160	0.11159	0.11159	0.11159
	4	0.21078	0.21080	0.21080	0.21080	0.21080	0.21080	0.21080

注: n_{\max} 表示截断项数,下标“b”和“f”分别表示后行波和前行波。

表 3 旋转圆柱壳固有频率的比较

Tab. 3 Comparisons of natural frequencies for a rotating cylindrical shell

Modes	f_b			f_f		
	FEM ^[18] / Hz	Present/ Hz	Error/ %	FEM ^[18] / Hz	Present/ Hz	Error/ %
(1,3)	1830.45	1831.08	0.03	1436.24	1437.09	0.06
(1,4)	1714.57	1713.40	0.07	1396.32	1395.50	0.06

注: f_b 和 f_f 分别表示后行波频率和前行波频率。

由表 2 可知,本文得出的结果与文献[20]中的结果基本相符,研究表明计算结果随着截断项数 n_{\max} 的增加而收敛到某一个值,当截断项数为 11 时,计算结果已经收敛到一个足够准确的数值,因此在下列计算中截断项数 n_{\max} 取 11。

表 3 的结果显示,本文所用建模方法得到的结果与文献[18]中的结果基本吻合,而且最大误差保

持在 1% 以下。

总之,上述两个算例,验证了本文建模方法的正确性与收敛性。

2.2 参数研究

为了得到不同厚度变化形式下变厚度旋转圆柱壳的振动特性,本节在两端简支的边界条件下,讨论了不同的厚度变化形式、转速、厚度变化参数、圆柱壳长径比对变厚度旋转圆柱壳自由振动行波特性的影响,结果如图 3~6 所示。

图 3 表示不同厚度变化形式下变厚度旋转圆柱壳的无量纲频率参数 w_b^* 和 w_f^* 随环向波数 n 的变化情况。图中 V0 表示 k_h 为 0,即旋转圆柱壳的厚度是均匀的,在 x 轴方向上保持不变。

由图 3 可知,所有厚度变化形式下的旋转圆柱壳的无量纲频率参数 w_b^* 和 w_f^* 都随环向波数 n 的增

加而增加,并且 V0 厚度变化形式下的旋转圆柱壳无量纲频率参数值最大,V1 厚度变化形式下的无量纲频率参数值最小。当不考虑特殊的 V0 厚度变化形式时,V2 厚度变化形式下的旋转圆柱壳的无量纲频率参数值高于其他两种厚度形式下的无量纲频率参数,且比较接近 V0 厚度变化形式下的无量纲频率参数值。从图 3 中还可以明显看出,4 种厚度变化形式下的旋转圆柱壳的无量纲频率参数随着环向波数 n 的增加先由相同的初始值分散后又收敛于同一数值。

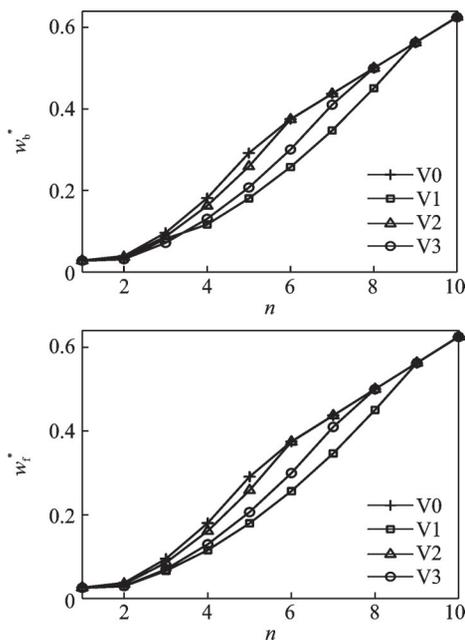


图 3 变厚度旋转圆柱壳的无量纲频率参数随环向波数 n 的变化情况

Fig. 3 Variation of the nondimensional frequency parameter for a rotating cylindrical shell with variable thickness with respect to the circumferential wave number n

图 4 研究了当转速分别为 0, 25 和 50 r/s 时,旋转圆柱壳在 3 种厚度变化形式下的无量纲频率参数 w_b^* 和 w_f^* 随厚度变化参数 k_h 的变化情况。由图 4 可以看出,不同转速以及不同厚度变化形式下的变厚度旋转圆柱壳的无量纲频率参数都随着厚度变化参数 k_h 的增大而逐渐减小,其中,V2 厚度变化形式下的无量纲频率参数的变化最小,且明显小于其他两种厚度变化形式下的无量纲频率参数的变化。此外,由图 4 还可以发现,转速对无量纲频率参数随厚度变化参数 k_h 增加而减小的变化趋势几乎无影响。

为了进一步研究转速对变厚度旋转圆柱壳自由振动的影响,图 5 给出了变厚度旋转圆柱壳的无量纲频率参数 w^* 随转速 Ω 的变化情况,图中 BW 表示后行波,FW 表示前行波。由图 5 可知,变厚度旋

转圆柱壳的后行波无量纲频率参数随转速的增加而逐渐增大,而前行波无量纲频率参数随转速的增加而逐渐减小,其中 V0 厚度变化形式下的前行波无量纲频率参数值和后行波无量纲频率参数值在不同转速下都是最大的,其次是 V2 厚度变化形式。

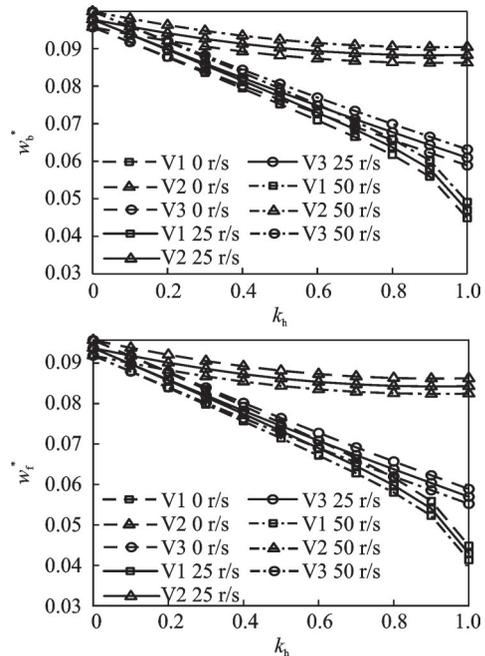


图 4 变厚度旋转圆柱壳的无量纲频率参数随厚度变化参数 k_h 的变化情况

Fig. 4 Variation of the nondimensional frequency parameter for a rotating cylindrical shell with variable thickness with respect to the thickness variation parameter k_h

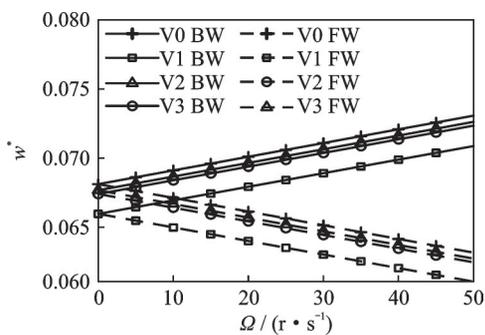


图 5 变厚度旋转圆柱壳的无量纲频率参数随转速 Ω 的变化情况 ($k_h=0.5$)

Fig. 5 Variation of the nondimensional frequency parameter for a rotating cylindrical shell with variable thickness with respect to the rotational velocity Ω ($k_h=0.5$)

最后,研究了几何参数对变厚度旋转圆柱壳的无量纲频率参数的影响。图 6 给出了变厚度旋转圆柱壳的无量纲频率参数随长径比 L/R 的变化情况。

由图 6 可以看出,变厚度旋转圆柱壳的无量纲频率参数随长径比 L/R 的增大而逐渐减小,具体而

言,当长径比小于3时,无量纲频率参数随长径比 L/R 的增大而迅速减小,当长径比大于3时,无量纲频率参数随长径比 L/R 的增大而缓慢减小。而且,V0厚度变化形式下的无量纲频率参数值在不同长径比下仍然是最大的,其次是V2厚度变化形式,V1厚度变化形式下的无量纲频率参数值最小,且与V3厚度变化形式下相近。

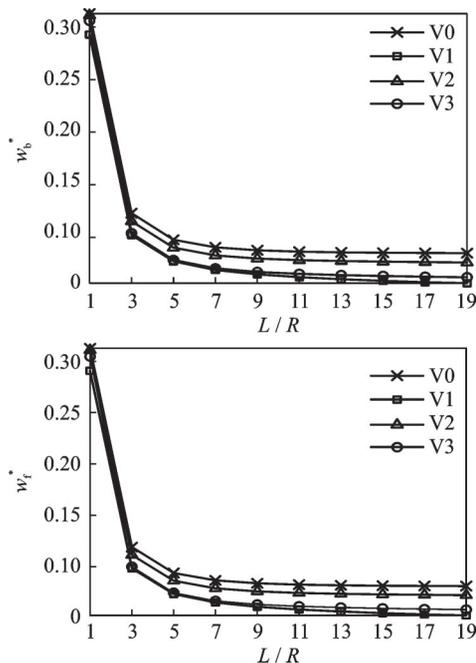


图6 变厚度旋转圆柱壳的无量纲频率参数随长径比 L/R 的变化情况

Fig. 6 Variation of the nondimensional frequency parameter for a rotating cylindrical shell with variable thickness with respect to length-to-radius ratio L/R

3 结 论

(1) 通过比较与收敛研究,验证了建模方法的正确性与收敛性,证明了本文模型可以有效的预测变厚度旋转圆柱壳结构的自由振动行为。

(2) 在3种厚度变化形式下旋转圆柱壳的行波频率都随环向波数 n 的增加而增加,当不考虑均匀厚度时,V2厚度变化形式下的旋转圆柱壳行波频率高于其他两种厚度形式下的行波频率。此外,4种厚度变化形式下的旋转圆柱壳行波频率随环向波数 n 的增加先由相同的初始值离散后又收敛于同一数值。

(3) 不同转速以及不同厚度变化形式下的变厚度旋转圆柱壳的行波频率随厚度变化参数 k_b 的增大而逐渐减小,其中,V2厚度变化形式下的行波频率变化程度最小,且明显小于其他两种厚度变化形式下行波频率的变化,此外,变厚度旋转圆柱壳的行波

频率随长径比 L/R 的增大而逐渐减小。

参考文献:

- [1] Li X, Li Y H, Xie T F. Vibration characteristics of a rotating composite laminated cylindrical shell in subsonic air flow and hygrothermal environment [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2019, 150: 356-368.
- [2] Quoc T H, Huan D T, Phuong H T. Vibration characteristics of rotating functionally graded circular cylindrical shell with variable thickness under thermal environment [J]. International Journal of Pressure Vessels and Piping, 2021, 193: 104452.
- [3] Chen Y, Zhao H B, Shen Z P, et al. Vibrations of high speed rotating shells with calculations for cylindrical shells [J]. Journal of Sound and Vibration, 1993, 160(1): 137-160.
- [4] 郭丹, 褚福磊, 郑兆昌. 旋转厚圆柱壳振动特性分析 [J]. 清华大学学报(自然科学版), 2001, 41(2): 56-59. Guo Dan, Chu Fulei, Zheng Zhaochang. Vibration of thick rotating cylindrical shells [J]. Journal of Tsinghua University (Science and Technology), 2001, 41(2): 56-59.
- [5] Guo D, Zheng Z C, Chu F L. Vibration analysis of spinning cylindrical shells by finite element method [J]. International Journal of Solids and Structures, 2002, 39(3): 725-739.
- [6] SafarPour H, Mohammadi K, Ghadiri M, et al. Influence of various temperature distributions on critical speed and vibrational characteristics of rotating cylindrical microshells with modified lengthscale parameter [J]. The European Physical Journal Plus, 2017, 132: 281.
- [7] SafarPour H, Ghanbari B, Ghadiri M. Buckling and free vibration analysis of high speed rotating carbon nanotube reinforced cylindrical piezoelectric shell [J]. Applied Mathematical Modelling, 2019, 65: 428-442.
- [8] Rostami R, Mohammadimehr M. Vibration control of rotating sandwich cylindrical shell-reinforced nanocomposite face sheet and porous core integrated with functionally graded magneto-electro-elastic layers [J]. Engineering with Computers, 2022, 38: 87-100.
- [9] Heydarpour Y, Aghdam M M, Malekzadeh P. Free vibration analysis of rotating functionally graded carbon nanotube-reinforced composite truncated conical shells [J]. Composite Structures, 2014, 117: 187-200.
- [10] Malekzadeh P, Heydarpour Y. Free vibration analysis of rotating functionally graded cylindrical shells in thermal environment [J]. Composite Structures, 2012, 94(9): 2971-2981.
- [11] Hua L, Lam K Y. Frequency characteristics of a thin ro-

- tating cylindrical shell using the generalized differential quadrature method[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1998, 40(5): 443-459.
- [12] 李文达, 杜敬涛, 杨铁军, 等. 边界条件对旋转薄壁圆柱壳结构自由振动行波特性的影响分析[J]. *振动工程学报*, 2016, 29(3): 452-464.
- Li Wenda, Du Jingtao, Yang Tiejun, et al. Influence of boundary conditions on traveling wave characteristics of thin rotating cylindrical shell structure for free vibration [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2016, 29(3): 452-464.
- [13] Sun S P, Cao D Q, Han Q K. Vibration studies of rotating cylindrical shells with arbitrary edges using characteristic orthogonal polynomials in the Rayleigh-Ritz method[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2013, 68: 180-189.
- [14] Song X Y, Zhai J Y, Chen Y G, et al. Traveling wave analysis of rotating cross-ply laminated cylindrical shells with arbitrary boundaries conditions via Rayleigh-Ritz method [J]. *Composite Structures*, 2015, 133: 1101-1115.
- [15] Lei Z X, Zhang L W, Liew K M. Vibration analysis of CNT-reinforced functionally graded rotating cylindrical panels using the element-free kp-Ritz method[J]. *Composites Part B: Engineering*, 2015, 77: 291-303.
- [16] Qin Z Y, Pang X J, Safaei B, et al. Free vibration analysis of rotating functionally graded CNT reinforced composite cylindrical shells with arbitrary boundary conditions[J]. *Composite Structures*, 2019, 220: 847-860.
- [17] Zhou D, Cheung Y K, Lo S H, et al. 3D vibration analysis of solid and hollow circular cylinders via Chebyshev-Ritz method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2003, 192(13-14): 1575-1589.
- [18] Wu Z H, Yao G, Zhang Y M. Vibration analysis of a thin eccentric rotating circular cylindrical shell[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2019, 233(5): 1588-1600.
- [19] Li X. Parametric resonances of rotating composite laminated nonlinear cylindrical shells under periodic axial loads and hygrothermal environment[J]. *Composite Structures*, 2021, 255: 112887.
- [20] Saito T, Endo M. Vibration of finite length, rotating cylindrical shells [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1986, 107(1): 17-28.

Free vibration of rotating cylindrical shells with variable thickness

LI Han¹, LI Xin-ye¹, BAI Bin², QIAN Yi³, SANG Jian-bing¹, LI Xiang¹

(1.College of Mechanical Engineering, Hebei University of Technology, Tianjin 300401, China;

2.School of Engineering Machinery, Hunan Sany Polytechnic College, Changsha 410129, China;

3.Key Laboratory of Particle Transport and Enrichment Technology for National Defense Science and Technology, Institute of Physical and Chemical Engineering of Nuclear Industry, Tianjin 300180, China)

Abstract: In order to improve the performance and efficiency of the rotating cylindrical shell structure, reducing its mass has become one of the effective ways. In response to this demand, the rotating cylindrical shell structure has a tendency to be designed to vary the thickness along the axial direction, i.e., variable thickness. The vibration traveling wave characteristics are investigated by using the Chebyshev-Ritz method. The displacement field of the cylindrical shell is expanded in the form of the product of the Chebyshev polynomial and the boundary function. The kinetic and potential energies of the rotating cylindrical shell with variable thickness are calculated based on the Sanders shell theory considering the effects of Coriolis forces and centrifugal forces. Then, the frequency equation of the rotating cylindrical shell with variable thickness is obtained according to the Ritz method. The accuracy of the modeling method is verified by comparing the present results with those in literature, and the convergence of the calculated results is studied. Finally, the free-vibration traveling wave characteristics of the rotating cylindrical shell in different forms of thickness variation are compared, and the effects of parameters such as rotational speed, thickness variation parameters and cylindrical shell aspect ratio on the free-vibration traveling wave characteristics of the rotating cylindrical shell with variable thickness are discussed.

Key words: free vibration; rotating cylindrical shells with variable thickness; natural frequency; Chebyshev-Ritz method

作者简介: 李 涵(1997—),男,硕士。电话: 18822135136; E-mail: 17853464629@163.com。

通讯作者: 李欣业(1966—),男,博士,教授。E-mail: xyliebut@163.com。