

# 非对称、变势能阱三稳态压电振动能量采集器 特性研究

郑友成, 朱强国, 刘周龙, 周 钰, 王光庆

(浙江工商大学信息与电子工程学院(萨塞克斯人工智能学院), 浙江 杭州 310018)

**摘要:** 为了提升压电振动能量采集器的综合输出性能, 提出了一种具有非对称、变势能阱的三稳态压电振动能量采集器, 它由一个末端带磁铁的压电悬臂梁以及一对可随弹簧拉伸和压缩而变动的外部磁铁构成。外部磁铁固定在水平弹簧自由端并与基座相连, 且能够随着弹簧压缩和拉伸发生水平移动和转动, 从而使系统产生非对称且随时间变化的势能阱。基于点磁荷法和拉格朗日函数, 建立了压电振动能量采集系统的非线性磁力模型和分布参数动力学模型; 仿真分析了磁铁间距离以及加速度和弹簧刚度等参数对系统势能及其动力学响应特性的影响规律。研究表明: 弹簧拉压是产生非对称、变势能阱的主要因素; 弹簧刚度使非对称势能阱的深度变浅, 使采集器更易进入大幅阱间振动状态; 随着弹簧刚度的增大, 采集器输出电压随之先增大后减小。在低激励振幅下, 非对称、变势能阱能量采集器比传统对称势阱采集器有更广的频带宽度和更高的采集效率。

**关键词:** 三稳态压电能量采集; 非对称、变势能阱; 非线性磁力; 动力学特性

**中图分类号:** O322; TM91; TN384 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2023)05-1280-12

**DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2023.05.012

## 引 言

压电振动能量采集器是将环境中的振动能量转换成电能的新型微机电器件, 在低功耗电子产品的自供电系统中有着较好的应用前景。它可以代替电池并解决电池供电所带来的诸多问题, 如更换不方便、污染环境、寿命有限、成本高等问题<sup>[1-2]</sup>。早期的压电振动能量采集器 (Piezoelectric Vibration Energy Harvester, PVEH) 一般是由压电双晶片或压电单晶片悬臂梁构成, 它仅在结构的固有频率点附近有较大的功率输出。为了拓宽采集器的有效工作频带, 提高其工作效率, 利用非线性结构在多个稳态解之间的非线性突跳特性实现双稳态或多稳态能量采集器是目前较为有效的解决方法之一<sup>[3-8]</sup>。孙仲生等<sup>[9]</sup>研究了双稳态悬臂梁机电模型, 并通过数值仿真和实验验证了非线性双稳态系统在随机共振下具有更高的输出电压。Zhou 等<sup>[10]</sup>通过实验验证了多稳态压电能量采集器具有良好的动力学特性。Zhou 等<sup>[11]</sup>从理论和实验两方面研究了非线性三稳态压电振动能量采集器, 研究结果显示三稳态能量采集器比双稳态采集器的工作频带更宽并且有更高的能量输出。Zhu 等<sup>[12]</sup>研究了三稳态能量采集装置在不同势能阱状态下的输出特性。Wang 等<sup>[13]</sup>考虑

了重力因素对三稳态能量采集器输出特性的影响。李魁等<sup>[14]</sup>提出了利用有弹性支撑的外部磁铁, 改变势能阱深度, 结果表明外部磁铁的弹性位移可以有效降低势能阱深度, 使系统更易进入阱间运动。Zou 等<sup>[15]</sup>提出了一种具有压缩模结构的宽带振动能量采集器, 仿真和实验表明该结构有较高能量输出。当前, 非线性三稳态压电振动能量采集器由于具有较宽和较浅的势能阱特性, 被证明具有更好的能量采集器输出性能而受到广泛的关注。然而, 典型三稳态压电振动采集器的势能阱关于中心平衡位置是对称的, 且势能阱的深度和宽度随结构定型而固定不变, 这种特性严重限制了三稳态采集器输出性能的提高, 特别是对于低激励水平下振动能量采集输出性能会大大降低, 甚至失效。近期, 人们提出非对称势能阱振动能量采集器以解决上述问题: 李海涛等<sup>[16]</sup>对带有非对称势能阱的双稳态能量采集器进行混沌动力学分析; Zhou 等<sup>[17]</sup>对具有可变势能函数的非线性柔性双稳态能量采集器进行了研究, 结果表明此结构使系统更易突破势能阱, 能够产生较大的输出功率。尽管如此, 基于非对称、变势能阱的压电振动能量采集增强机理还未得到深入的研究。为此, 本文设计了一种新型带弹簧结构的非对称、变势能阱三稳态压电振动能量采集器, 外部磁铁通过弹簧的压缩和拉伸运动, 使采集器末端磁铁间的距离

收稿日期: 2021-12-23; 修订日期: 2022-02-03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51777192); 浙江省自然科学基金资助项目(LY20E070001)。

发生改变,从而使势能阱的深度和宽度发生改变,表现出非对称、时变特性。通过建立其非线性磁力模型和机电耦合动力学模型,研究了系统参数以及非对称变势能阱对系统动力学特性以及能量采集增强机理的影响。

## 1 非对称、变势能阱多稳态压电能量采集器理论模型

图 1 为提出的新型压电能量采集器的结构模型示意图,它主要由一个压电双晶片悬臂梁和末端磁铁 A 以及可随弹簧压缩和拉伸而移动的外部磁铁 B 和 C 组成。长度为  $L_p$  且极化方向相反的两个压电片固定于悬臂梁的上、下表面,悬臂梁长度为  $L$ 。压电悬臂梁的根部固定在 U 形底座的左侧支撑板上,尖端磁铁(表示为磁铁 A)固定在悬臂梁的自由端。外部磁铁 B 和 C 对称粘贴在基板上,一对刚度为  $k$  的弹簧连接在 U 形底座的右侧支撑板上,外部磁体中心距离为  $2d_g$ ,且与磁铁 A 之间的水平距离为  $d$ 。

末端磁铁受到外部磁铁的排斥力可以利用点磁荷偶极子理论计算得来<sup>[18]</sup>,末端磁铁与外部磁铁之间的几何关系如图 2 所示。图中  $x_1, x_2$  分别为磁铁 B, C 的水平位移; $y$  为磁铁 B, C 垂直方向位移; $\theta =$

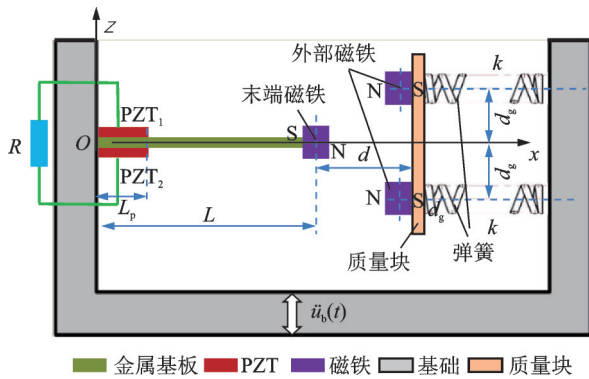


图 1 非对称变势能阱三稳态采集器结构

Fig. 1 TEH with linear compressible magnet-spring system

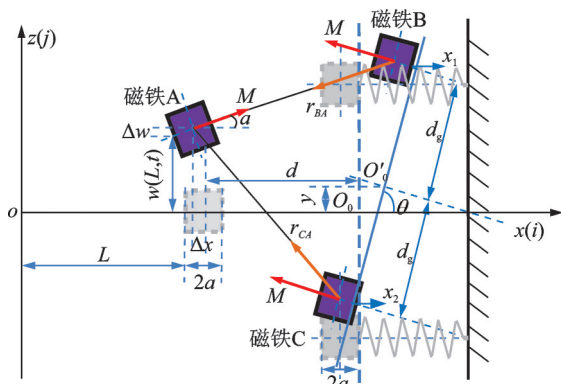


图 2 磁铁位置几何关系图

Fig. 2 Geometric relationship between the tip and two external magnets

$\arccos(x_1 - x_2)/(2d_g)$  为质量块旋转角。

系统动力学方程由拉格朗日方程得出(磁力公式及拉格朗日方程推导见附录):

$$L = \frac{1}{2} M_0 \dot{q}^2 + A \dot{q} \dot{z}_0 + \frac{1}{2} M_{eq} q \dot{z}_0^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + \frac{1}{2} m_f \left( \frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} (2m_1 + m_f) (\dot{y} + \dot{z}_0)^2 - \frac{1}{2} K_0 q^2 + B_1 q V - \frac{1}{2} k (x_1^2 + 2y^2) - U_m + \frac{1}{2} C_p V^2 + B_1 q V \quad (1)$$

式中

$$M_0 = m_1' \int_0^{L_1} \phi_{11}^2(x) dx + m_2' \int_{L_1}^L \phi_{12}^2(x) dx +$$

$$m_1 \phi_{12}^2(L) A = m_1' \int_0^{L_1} \phi_{11}(x) dx +$$

$$m_2' \int_{L_1}^L \phi_{12}(x) dx + m_1 \phi_{12}^2(L),$$

$$B_1 = \frac{1}{4} e_{31} b_p (h_s + h_p) \int_0^{L_1} \phi_{11}''(x) dx,$$

$$M_{eq} = m_1 + m_2 + m_1,$$

$$K_0 = 2b_p E_p \int_0^{L_1} \phi_{11}''^2(x) dx \int_{\frac{1}{2}h_s}^{\frac{1}{2}h_s+h_p} z^2 dz +$$

$$b_s E_s \int_{-\frac{1}{2}h_s}^{\frac{1}{2}h_s} z^2 dz \left[ \int_0^{L_1} \phi_{11}''^2(x) dx + \int_{L_1}^L \phi_{12}''^2(x) dx \right],$$

$$m_1' = 2(2\rho_p b_p h_p + \rho_s b_s h_s),$$

$$C_p = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_{33}^s b_p L_1}{h_p}, m_1 = m_1' \phi_{11}(L_1),$$

$$m_2' = \rho_s b_s h_s, m_2 = m_2' \phi_{12}(L),$$

其中,“·”表示对时间  $t$  的一阶导数,“”表示对  $x$  的二阶偏微分。

式中  $q(t)$  为主悬臂梁模态坐标; $z_0(t)$  为外部激励; $\rho, E, h$  和  $b$  分别为采集器材料密度、弹性模量、厚度和宽度;下标  $s$  和  $p$  分别代表金属基板和 PZT; $m_1$  和  $m_f$  分别为磁铁和金属质量块的质量; $m_1'$  和  $m_2'$  分别为含压电片悬臂梁和不含压电片悬臂梁的等效质量; $\phi_{11}(x)$  和  $\phi_{12}(x)$  分别为含压电元件和不含压电元件悬臂梁振动模态; $V$  为采集输出电压。

将式(1)代入拉格朗日方程:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -2\xi \omega_0 \dot{q}(t) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{V}} \right) - \frac{\partial L}{\partial V} = Q \end{cases} \quad (2)$$

式中  $Q = V(t)/R$ , 化简后有:

$$\begin{cases} M_0 \ddot{q} + 2\xi\omega_0 \dot{q} + K_0 q + F_m - 2B_1 V(t) + A \ddot{z}_0 = 0 \\ (a_1 + a_2) \ddot{x}_1 + kx_1 + \frac{a_2}{a_1 - a_2} (F_{x1} - F_{x2}) + F_{x1} = 0 \\ (a_1 + a_2) \ddot{x}_2 + kx_2 - \frac{a_2}{a_1 - a_2} (F_{x1} - F_{x2}) + F_{x2} = 0 \\ (2m_t + m_f)(\ddot{y} + \ddot{z}_0) + 2ky + F_m = 0 \\ C_p \dot{V}(t) + \frac{1}{R} V(t) + 2B_1 \dot{q} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

式中  $\xi$  为系统阻尼系数,  $\omega_0$  为一阶模态频率,  $F_{x1} = \frac{\partial U_m}{\partial x_1}$ ,  $F_{x2} = \frac{\partial U_m}{\partial x_2}$ ,  $F_m = \frac{\partial U_m}{\partial q}$ ,  $a_1 = m_t + 0.25m_f$ ,  $a_2 = 0.25m_f$ 。

## 2 系统的动力学特性分析

本文所用材料和结构参数如表 1 所示。

表 1 系统材料和结构参数

Tab. 1 Material and structure parameters

参数	数值
悬臂梁长度/mm	70
悬臂梁和 PZT 宽度/mm	10
悬臂梁厚度/mm	0.15
PZT 密度/( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )	7450
悬臂梁密度/( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )	7900
PZT 弹性模量/GPa	21.45
悬臂梁弹性模量/GPa	212
PZT 长度/mm	10
PZT 厚度/mm	0.5
磁铁密度/( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )	7500
磁铁长度/mm	2.75
磁铁厚度/mm	10
磁铁宽度/mm	20
真空介电率 $\epsilon_0$ /( $\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$ )	$8.854 \times 10^{-12}$
介电常数/( $\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$ )	$1500 \times \epsilon_{ps0}$
压电应力常数/( $\text{C} \cdot \text{m}^{-1}$ )	-4.08
磁化强度/( $\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$ )	$0.96 \times 10^6$
弹簧刚度/( $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ )	900

注:  $\epsilon_{ps0}$  表示真空介电常数。

### 2.1 系统静态特性分析

系统静态特性主要表现为系统的势能特性, 其表达式为  $U = U_m + K_2 + 0.5K_0 q^2$ 。

如图 3(a) 所示是  $d_g = 8$  mm 时, 磁铁间距  $d$  分别为 20, 25, 30, 40 mm 时系统的势能曲线, 可以看出, 随着  $d$  的不断增大, 能量采集器的运动状态由双稳态变为单稳态。当  $d = 20$  mm 时, 采集器势能曲线有两个零平衡点, 表现为双稳态运动, 两个势能阱是非对称的, 左侧势阱深度明显大于右侧, 两阱中心坐标分别为 (-23.3 mm, 6.1 mJ) 和 (25.3 mm, 7.3 mJ);

随着  $d$  的不断增大, 两个势能阱深度逐渐减小且保持非对称性; 当  $d$  继续增大到 40 mm 时, 由于距离过大, 磁力太小, 势能阱变为一个, 此时系统只有一个零平衡点, 作单稳态运动。

进一步增大  $d_g$  到 13 mm, 磁铁距离  $d$  分别为 20, 25, 30, 40 mm 时, 系统势能曲线如图 3(b) 所示。当  $d = 20$  mm 时, 由于  $d_g$  变大, 此时系统能够表现出三稳态运动状态, 采集器势能曲线出现三个不对称的势能阱, 左、右势能阱呈明显的非对称分布, 它们的中心坐标分别为 (-27.7 mm, 7.2 mJ) 和 (28.5 mm, 8.1 mJ); 随着  $d$  的增大, 势能阱非对称特性逐渐减弱, 当  $d$  增大到 40 mm 时, 左右势能阱消失, 中间势能阱变大, 稳定点由三个变为一个, 系统运动状态由三稳态变为单稳态。

图 3(c) 所示是  $d = 28$  mm 时, 外部磁铁间距  $d_g$  分别为 8, 11, 14, 30 mm 时的势能曲线。可以看出随着  $d_g$  不断增大, 系统非对称势阱由两个变为三个, 最后变为一个。且势能阱的深度由深逐渐变浅。由此可以看出合适的外部磁铁间距可以使采集器更容易作三稳态大幅值振荡。

图 3(d) 给出了在  $d = 28$  mm,  $d_g = 13$  mm 时不同弹簧刚度对系统势能的影响。当弹簧刚度较小时, 磁铁排斥力将使弹簧产生较大幅度的位移, 出现明显的不对称势能阱; 而当刚度变大, 弹簧受磁铁间作用力的影响逐渐减小, 外部磁铁水平位置变化逐渐减弱, 系统势能阱非对称现象也逐渐减弱; 当弹簧刚度增大某个临界值 (如  $k = 3000$  N/m) 时, 此时由于刚度过大, 磁力对弹簧的压缩和拉伸作用消失, 外部磁铁的水平间距保持一致, 最终系统势能阱变成对称的。

### 2.2 系统动态特性分析

为了研究  $d_g$  对系统输出特性的影响, 图 4 给出了加速度  $A = 10$  m/s<sup>2</sup>, 频率  $f = 5$  Hz,  $d = 28$  mm,  $d_g = 8, 12$  和 18 mm 时的系统动态输出响应。从图 4 中可以看出, 当  $d_g$  由小变大, 系统运动状态由双稳态到三稳态, 再到单稳态的变化。如图 4(a) 所示, 当  $d_g = 8$  mm 时, 由于非对称势能阱的缘故, 采集器很容易逃脱势能阱的束缚, 作大幅值的双稳态运动, 采集器末端振动速度和位移较大, 采集电压为 2.6 V; 如图 4(b) 所示, 当  $d_g$  增大到 12 mm, 采集器由双稳态运动跳转到三稳态运动, 末端最大振动速度增大到 0.9 m/s, 最大振动位移为 0.038 m, 采集电压达到 2.5 V。如图 4(c) 所示, 继续增大  $d_g$  到 18 mm, 由于磁铁间距过大, 非线性磁力较小, 能量采集器被束缚在中心势能阱内作小幅单稳态运动, 采集器振动位移和输出电压只有 2.8 mm 和 0.2 V。



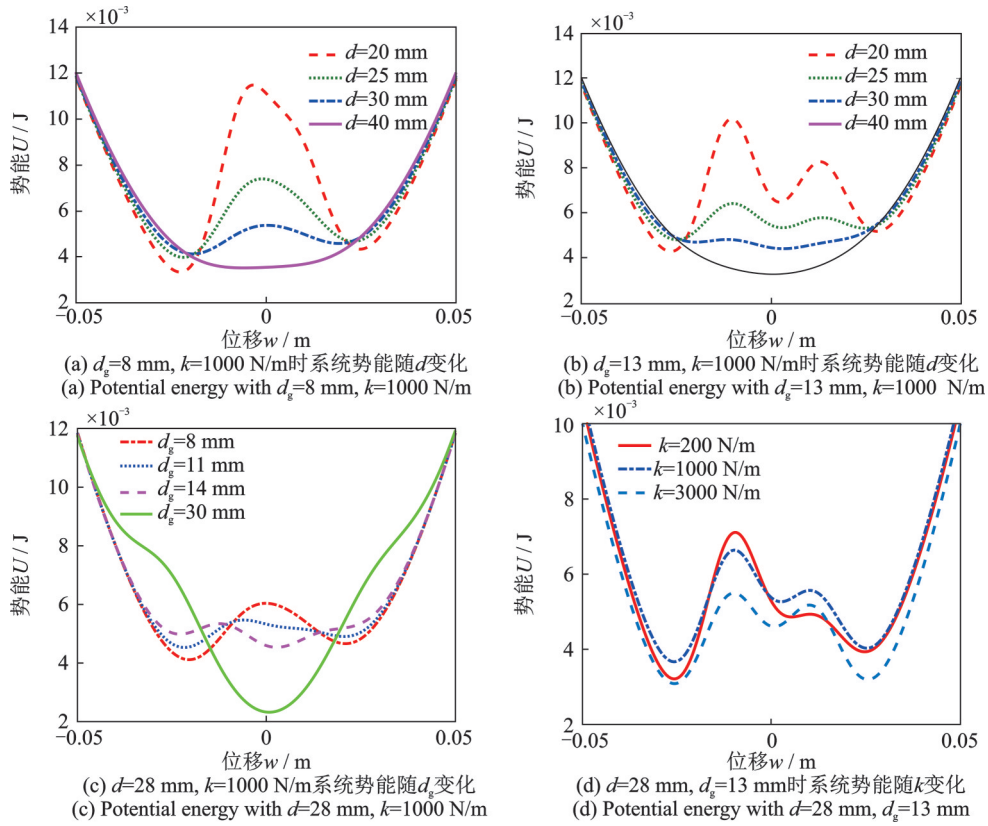


图 3 不同参数条件下采集器系统势能变化情况  
Fig. 3 Potential energy variables with different system parameters

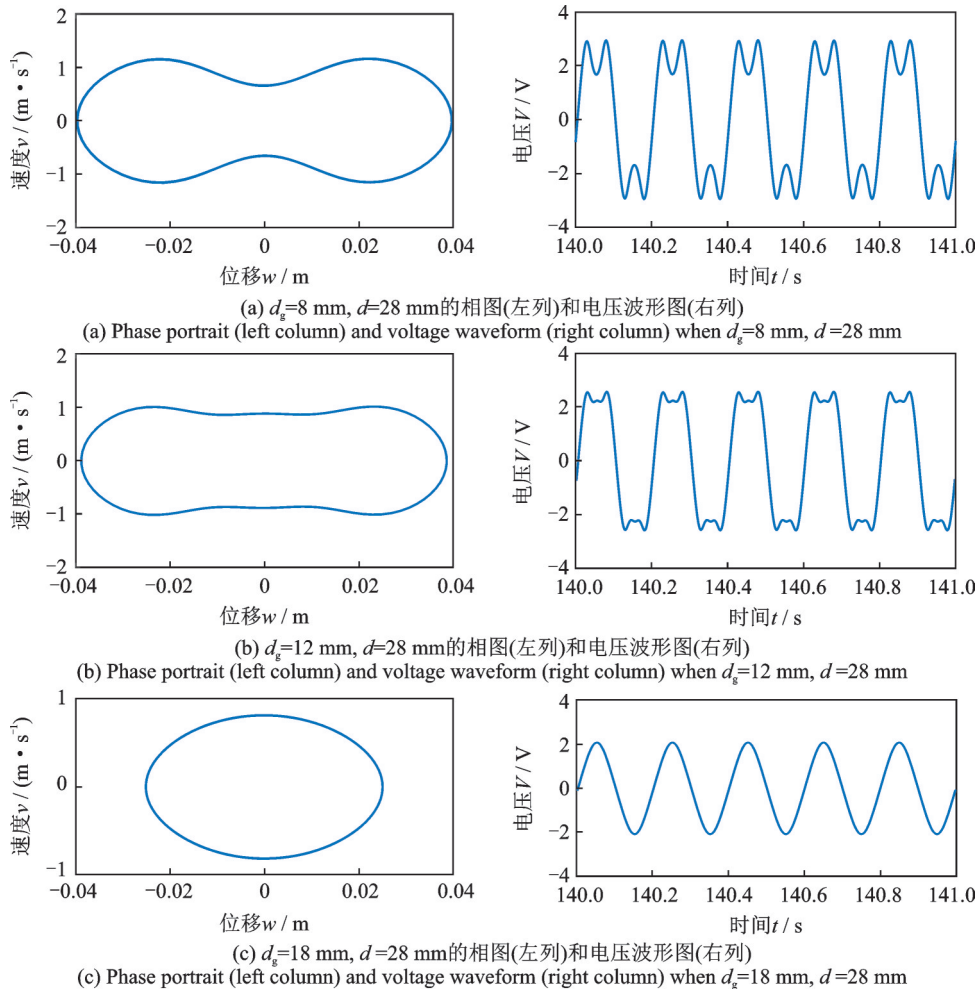


图 4  $d_g$  对采集器振动特性与电压输出波形的影响  
Fig. 4 Effects of  $d_g$  on the dynamic performance and voltage waveform of the harvester

为了研究  $d$  对系统动态特性的影响,取  $A=10 \text{ m/s}^2$ , 频率  $f=5 \text{ Hz}$ ,  $d_g=12 \text{ mm}$ ,  $d=28, 32$  和  $40 \text{ mm}$  时的系统动态输出响应。由图 5 可知,增大  $d$  采集器运动状态依次从三稳态转变为单稳态。如图 5(a) 所示,当  $d=28 \text{ mm}$  时,由于采集器末端与外部磁铁间距离较小,采集器末端振动位移和速度较大,此时两者间有较大的作用力,会使外部磁铁产生左右的位移,使系统表现出三稳态运动状态,振动位移和电压分别为  $39 \text{ mm}$  和  $2.5 \text{ V}$ ;如图 5(b) 所示,当  $d$  增大到  $32 \text{ mm}$  时,距离增大使外部磁铁与采集器末端之间的作用力减小,采集器末端振动位移减小为  $35 \text{ mm}$ ,输出电压为  $2.2 \text{ V}$ ,系统表现为双稳态运动状态。如图 5(c) 所示,继续增大  $d$  到  $40 \text{ mm}$ ,由于磁铁间距过大,作用力过小,采集器由双稳态运动变为单稳态运

动,振动位移和采集电压减小为  $25 \text{ mm}$  和  $2 \text{ V}$ 。

进一步对采集器的频率特性进行分析,图 6 所示是采集器在  $d=28 \text{ mm}$ ,  $d_g=10 \text{ mm}$ ,  $k=900 \text{ N/m}$ , 加速度  $A$  分别为  $2 \text{ m/s}^2$  和  $8 \text{ m/s}^2$  时的频率响应特性。如图 6(a) 所示,当激励加速度幅值较小 ( $A=2 \text{ m/s}^2$ ),由于加速度过小,采集器动能不足,采集器末端位移始终为负值,没有产生大幅运动,此时采集器作小幅阱内振动,对应的采集电压及功率都很小。如图 6(b) 所示,当加速度增大到  $8 \text{ m/s}^2$ ,在频率为  $4\sim 5.6 \text{ Hz}$  时,采集器进入三稳态振动,采集器末端产生较大的振动位移,对应的采集输出电压达到  $2.5 \text{ V}$ ,功率达到  $0.075 \text{ mW}$ 。从以上结果可以看出,增加激励加速度可以使能量采集系统进入大幅振荡状态,提高系统采集效率。

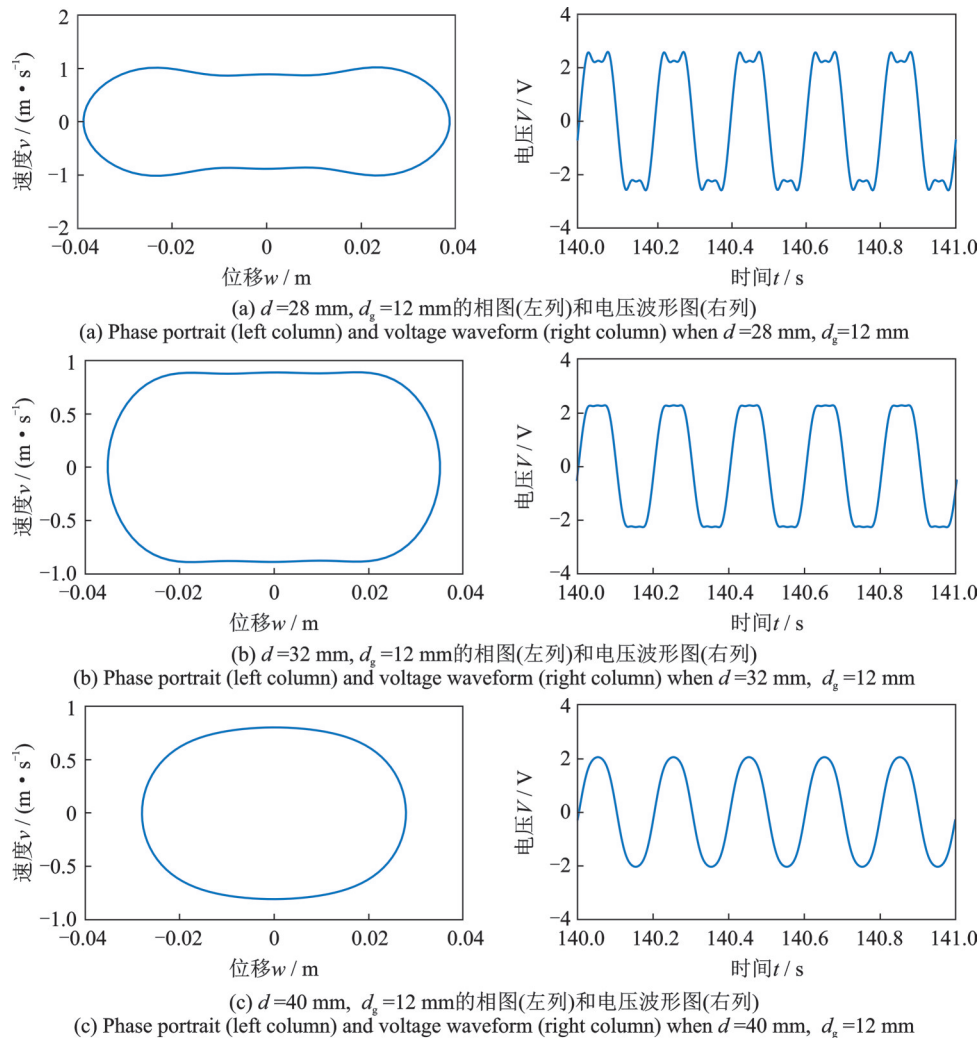
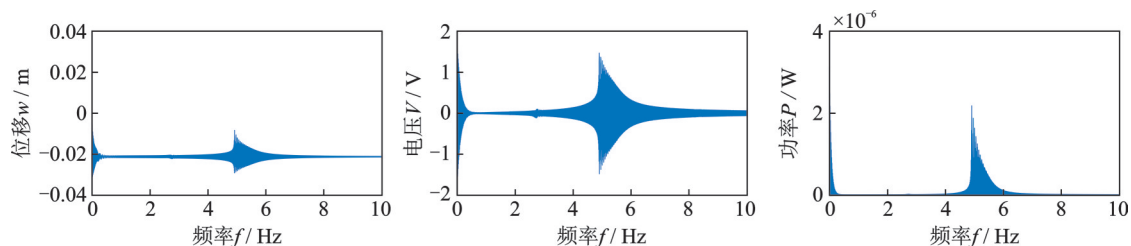


图 5  $d$  对采集器振动特性与电压输出波形的影响

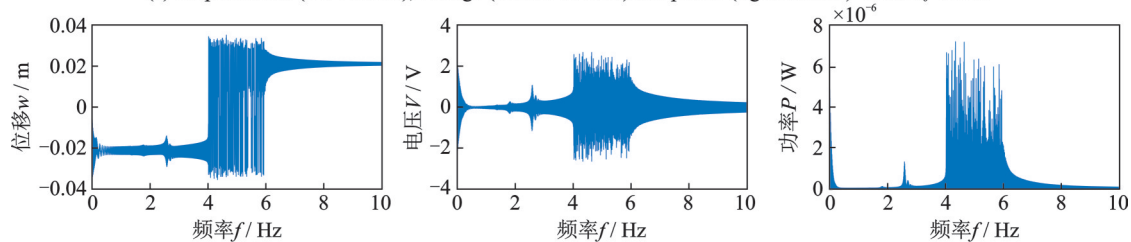
Fig. 5 Effects of  $d$  on the dynamic performance and voltage waveform of the harvester

图 7 是不同弹簧刚度下系统输出响应特性仿真结果,其中  $d_g=12 \text{ mm}$ ,  $d=28 \text{ mm}$ ,  $A=5 \text{ m/s}^2$ , 弹簧刚度  $k$  分别为  $100, 250, 1000, 5000 \text{ N/m}$ 。如图 7(a) 所示,当弹簧刚度较小时,弹簧压缩位移较大,采集器容易产生非对称势能阱,致使采集器在较大范围

内均能从低能轨道突跳进入高能轨道,产生大幅振荡。采集器大幅值阱间运动的频率范围为  $2\sim 10 \text{ Hz}$ ,对应的采集电压可以达到  $10 \text{ V}$ ;如图 7(b) 所示,当弹簧刚度增大到  $250 \text{ N/m}$  时,弹簧压缩量减小,势能阱的不对称性减小,采集器大幅值振荡的频



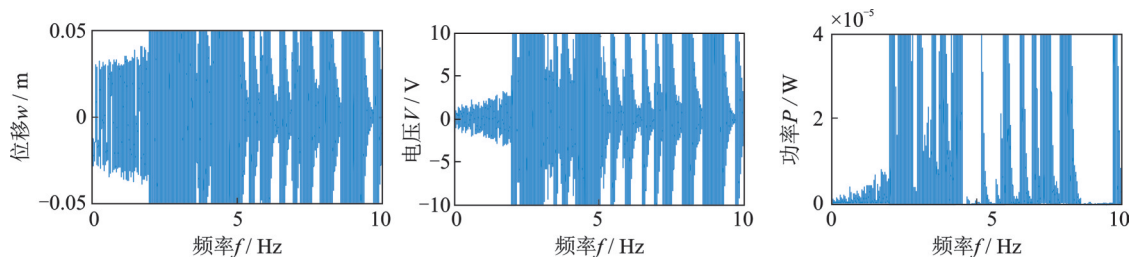
(a) 加速度 $A_0=2\text{ m/s}^2$ 时采集器位移(左列)、电压(中列)和功率(右列)频率响应特性  
 (a) Displacement (left column), voltage (middle column) and power (right column) when  $A_0=2\text{ m/s}^2$



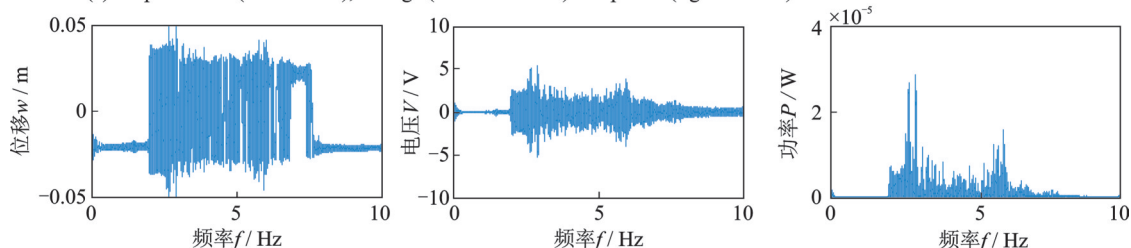
(b) 加速度 $A_0=8\text{ m/s}^2$ 时采集器位移(左列)、电压(中列)和功率(右列)频率响应特性  
 (b) Displacement (left column), voltage (middle column) and power (right column) when  $A_0=8\text{ m/s}^2$

图 6 不同加速度时采集器位移(左列)、电压(中列)和功率(右列)频率响应特性

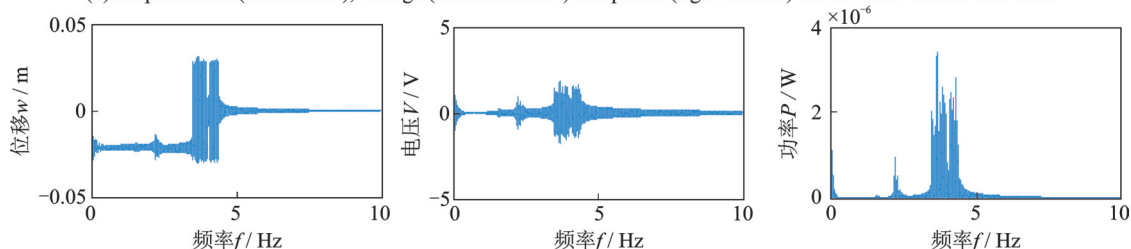
Fig. 6 Displacement (left column), voltage (middle column) and power (right column) of harvester with different  $A_0$



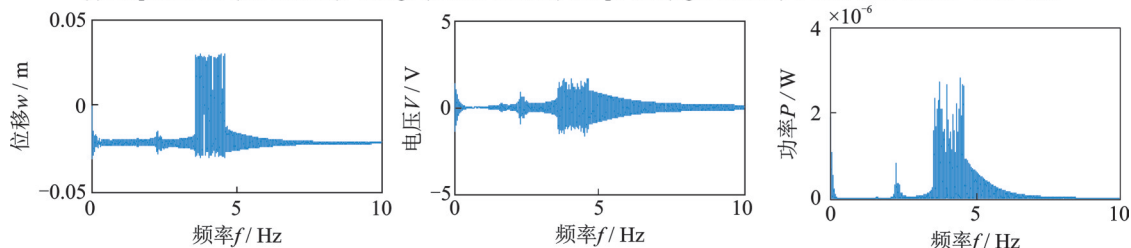
(a)  $k=100\text{ N/m}$ 时采集器位移(左列)、电压(中列)和功率(右列)频率响应特性  
 (a) Displacement (left column), voltage (middle column) and power (right column) of harvester when  $k=100\text{ N/m}$



(b)  $k=250\text{ N/m}$ 时采集器位移(左列)、电压(中列)和功率(右列)频率响应特性  
 (b) Displacement (left column), voltage (middle column) and power (right column) of harvester when  $k=250\text{ N/m}$



(c)  $k=1000\text{ N/m}$ 时采集器位移(左列)、电压(中列)和功率(右列)频率响应特性  
 (c) Displacement (left column), voltage (middle column) and power (right column) of harvester when  $k=1000\text{ N/m}$



(d)  $k=5000\text{ N/m}$ 时采集器位移(左列)、电压(中列)和功率(右列)频率响应特性  
 (d) Displacement (left column), voltage (middle column) and power (right column) of harvester when  $k=5000\text{ N/m}$

图 7 弹簧刚度  $k$  对采集器动态特性的影响

Fig. 7 Effects of  $k$  on the dynamic performance of the harvester



率范围逐渐减小,采集器大幅值振荡的频率范围为 2.1~6.7 Hz;采集器输出电压减小为 5 V;进一步增大弹簧刚度至 1000 N/m,如图 7(c)所示,弹簧压缩继续减小,且采集器的频带范围变窄,仅为 3.5~4.3 Hz。如图 7(d)所示,当  $k=5000$  N/m 时,由于弹簧压缩量达到极限值,其输出特性和图 7(c)所示结果基本一致,采集器大幅值阱间振动频率为 3.5~4.2 Hz,采集器输出电压和功率分别为 1 V 和 0.003 mW。由此可见,弹簧的刚度会影响能量采集系统的输出性能,弹簧刚度过大,非线性磁力对系统影响较小,弹簧压缩位移较小,采集器动态特性降低;当弹簧刚度达到某个临界值时,采集器动态特性保持不变;相反,小的弹簧刚度有利于产生非对称势能阱,从而提高采集器的综合输出性能。但是,太小的弹簧刚度加工制造比较困难。经过试验和仿真论证,本文选用弹簧刚度  $k=900$  N/m。

### 2.3 与 TPEH 性能对比

为了进一步揭示非对称、变势能阱三稳态系统的优越性,比较了非对称势能阱系统(TPEH-K)与传统三稳态能量采集器(TPEH)的动态输出响应。取  $d_g=13$  mm,  $d=28$  mm,  $f=5$  Hz, 弹簧刚度  $k=900$  N/m 条件下,其势能曲线、相图及输出电压图如图 8~10 所示。

图 8 为势能曲线对比结果,对于 TPEH 来说,其势能阱具有对称性,其势阱深度为 7.342 mJ。而对于外部接入弹簧的三稳态系统,当悬臂梁末端发生运动时,外部弹簧受到的非线性磁力发生改变,使外部磁铁的位置随弹簧的运动发生实时改变,从而发生可变势阱,此时左侧势阱较深,右侧较浅,出现不对称的情况,其势能阱深度分别为 4.796 mJ 和 2.686 mJ,更浅的势阱使系统更易跃过势垒。

为了比较 TPEH-K 和 TPEH 两种采集器在不同激励情况下的频域输出特性,图 9 给出了加速度  $A_0$  分别为 2.5, 4 和 8  $\text{m/s}^2$  时两种采集器的位移和电压频率响应特性。从图 9(a)中可以看出,当  $A_0=2.5$   $\text{m/s}^2$  时,激励加速度较小, TPEH-K 和 TPEH 系统在大部分频域内均作小幅值的阱内振动, TPEH-K 仅在较小频率范围 3~3.1 Hz 内作大幅振动。增大加速度至  $A_0=4$   $\text{m/s}^2$ , 如图 9(b)所示, TPEH-K 大幅值阱间振动的频率范围增大至 2.87~3.47 Hz, 而 TPEH 仅在 3.08~3.13 Hz 作大幅值阱间振动;两种采集器阱内间振动时输出电压到达 1.5 V。继续增大加速度至  $A_0=8$   $\text{m/s}^2$ , 如图 9(c)所示, 此结果表明,在低激励条件下, TPEH-K 的阱间振动频率范围扩大至 0~4.5 Hz, 而 TPEH 的阱间振动

频率范围为 2.5~3.5 Hz。此外, TPEH-K 的振动位移和输出电压也都大于 TPEH。可见,由于非对称势能阱的加入, TPEH-K 系统可以在更低加速度和更宽的频率范围内产生更大的输出。

图 10 给出了 TPEH-K 和 TPEH 采集器随激励加速度的跳转特性。由图 10 可知,对于非对称势阱系统 TPEH-K,在加速度为 8  $\text{m/s}^2$  时产生突跳,从低能轨道进入高能轨道运动,此时,采集器开始出现大幅振动位移,输出功率会急剧增大。而 TPEH 则在加速度 10  $\text{m/s}^2$  激励作用下产生突跳进入高能轨道运动。这说明非对称势阱系统能量采集器更容易在较低激励水平作用下产生更大的能量采集器输出。

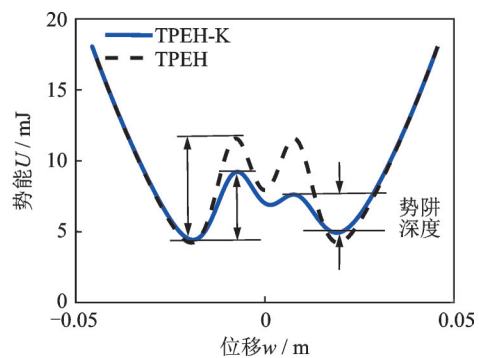


图 8 TPEH-K 和 TPEH 势能对比结果

Fig. 8 Potential energy of TPEH-K and TPEH

## 3 实验研究与结果分析

图 11 为研制的非对称势能阱压电振动能量采集器样机,实验样机的悬臂梁 ( $70$  mm  $\times$   $10$  mm  $\times$   $0.15$  mm) 由不锈钢片制作,两个压电片(PZT-5A,  $10$  mm  $\times$   $10$  mm  $\times$   $0.5$  mm) 粘贴在其根部上下表面,左侧固定在基座上,右端通过高强度胶粘贴一磁铁 A,外部磁铁 B 和 C 粘贴在基板上,基板通过弹簧固定在可调节基板上。

图 12 为搭建的实验测试平台。信号发生器产生正弦信号用来模拟环境中的振动,经过功率放大器放大后传输到激励器,以激励采集器产生振动;由安装在基座上的加速度传感器测得其基础加速度;激光位移传感器位于悬臂梁上方检测能量采集器振动位移信号,后进入动态信号分析系统处理;由示波器获取采集电压,将所得信号通过动态信号分析仪分析后输出;直流电源为测试系统提供电能。

首先,对采集器的动态输出特性进行实验测试。图 13 为激励加速度  $A=9$   $\text{m/s}^2$ , 激励频率  $f=5$  Hz, 水平距离  $d=28$  mm, 不同外部磁铁间距下的采集器动态输出性能的实验结果。从图 13 中可以看出,

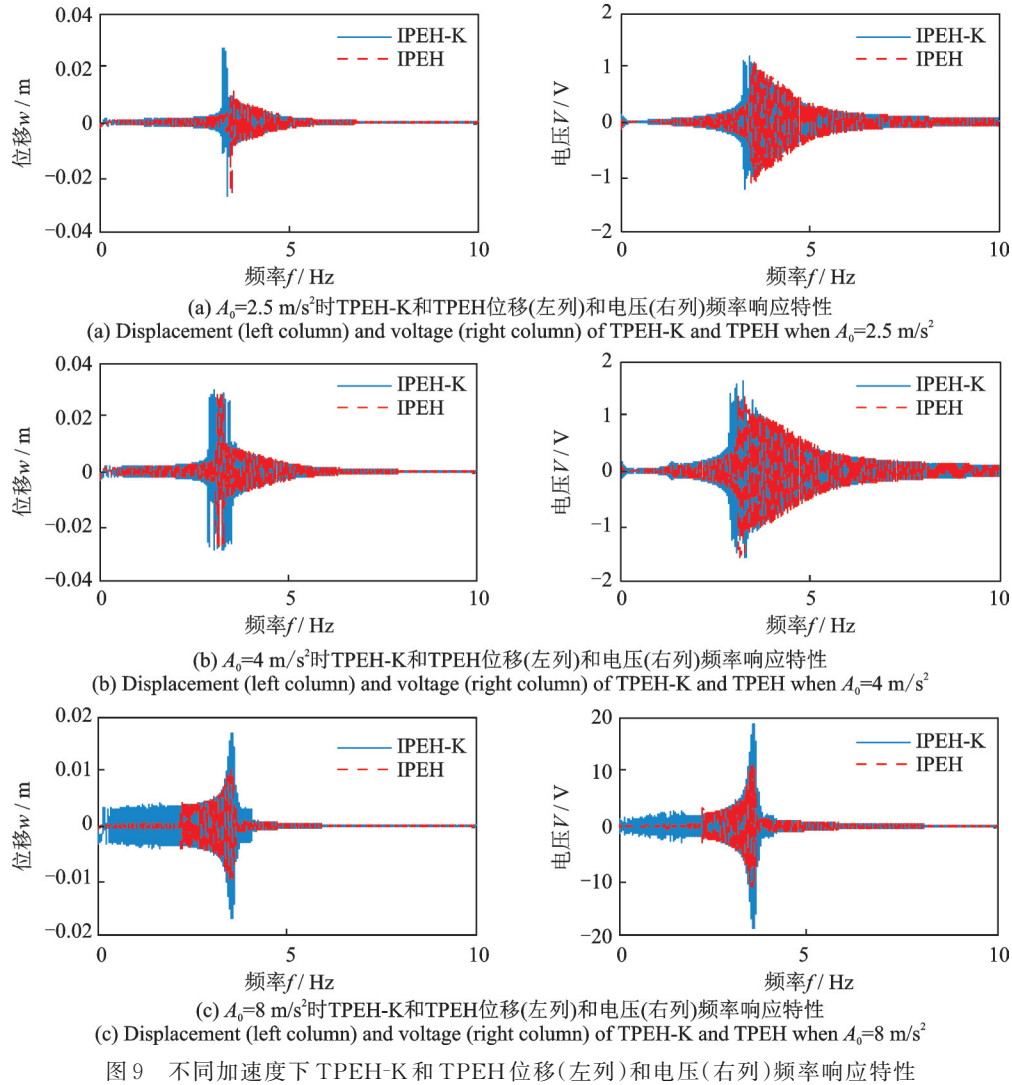


Fig. 9 Displacement (left column) and voltage (right column) of TPEH-K and TPEH with different  $A_0$

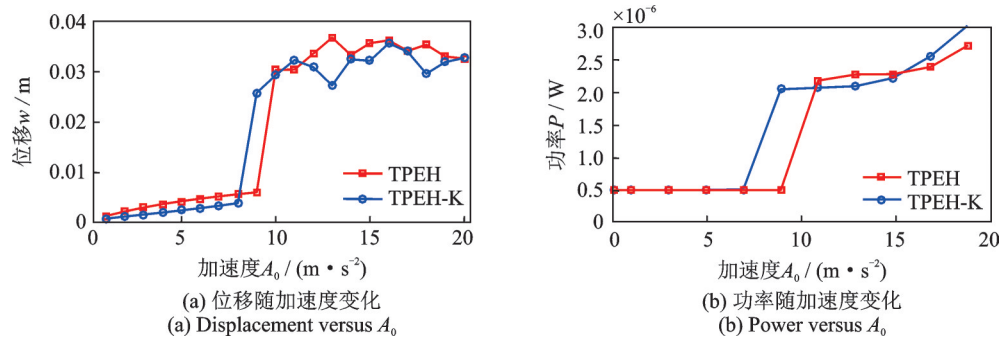


图 10 TPEH-K 和 TPEH 跳转特性

Fig. 10 The snap-through behaviors of TPEH-K and TPEH

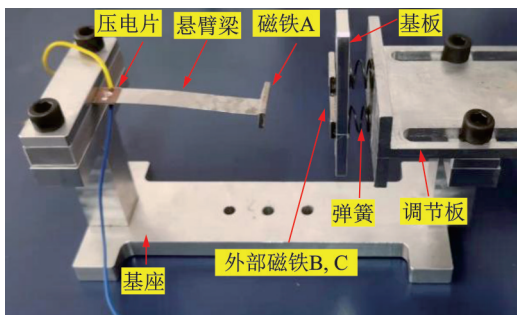


图 11 实验样机

Fig. 11 Experimental prototype

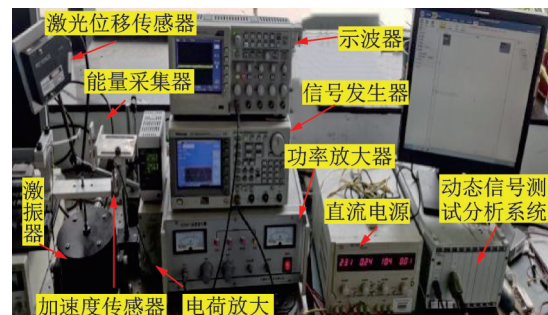


图 12 能量采集器实验测试系统

Fig. 12 Experimental test system of energy harvester



实验结果与仿真结果基本吻合。由图13(a)得到 $d_g=8\text{ mm}$ 时的实验结果可知,采集器表现出双稳态运动特征,悬臂梁末端最大振动位移和速度分别为 $0.04\text{ m}$ 和 $0.5\text{ m/s}^2$ ,最大输出电压为 $1\text{ V}$ ;调整采集

器外部磁铁间距 $d_g=18\text{ mm}$ ,从图13(b)的实验结果可知,采集器系统表现为单稳态运动,悬臂梁末端最大振动位移和速度分别为 $0.01\text{ m}$ 和 $0.05\text{ m/s}^2$ ,最大输出电压为 $0.1\text{ V}$ 。

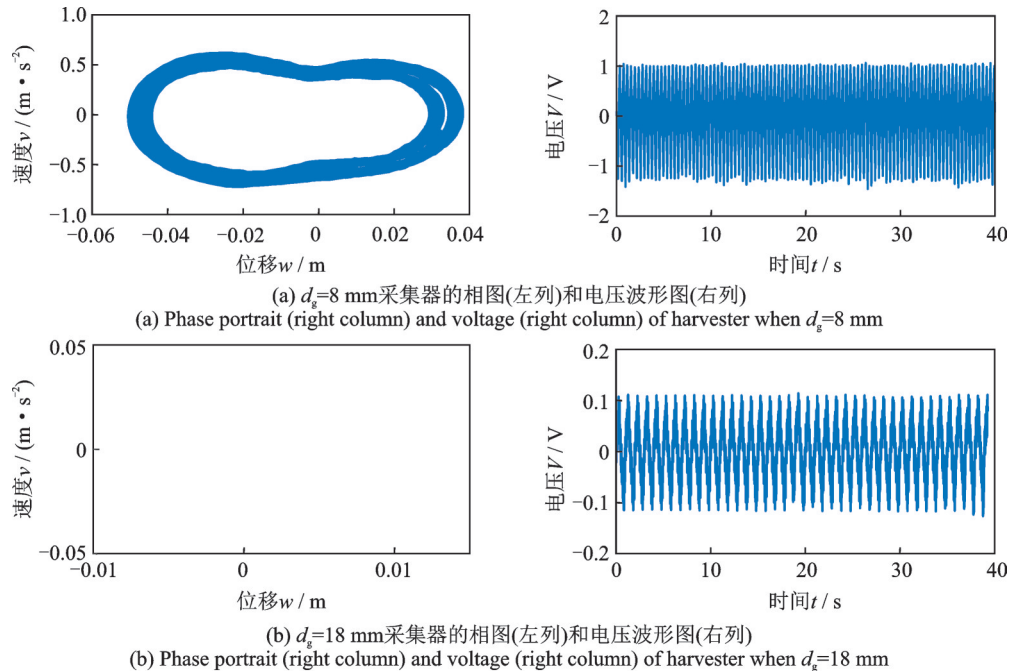


图13 采集器输出性能实验结果

Fig. 13 Experimental results of harvester output performance

图14所示为TPEH-K和TPEH采集器突跳特性的实验与理论仿真结果,其中图14(a)为可变非对称势阱TPEH-K系统,图14(b)为固定势阱三稳态TPEH系统。由图14可以看出,实验和理论仿真结果基本吻合,证明本文模型是正确的。此外还可以看到,随着激励加速度的增大,TPEH采集器在

$A=9.7\text{ m/s}^2$ 时发生跳变,从小幅值阱内振动跳转到大幅值阱间振荡,输出较大电压;而TPEH-K采集器在 $A=8\text{ m/s}^2$ 时就发生跳跃,进入大幅值阱间运动,产生较大电压。实验结果与仿真分析相符,由此可见,非对称、变势能阱的加入能够降低采集器做大幅阱间振动所需的激励加速度,提高能量采集效率。

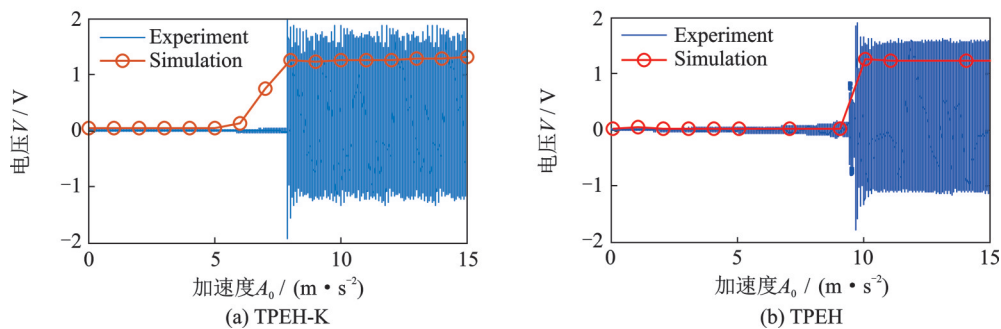


图14 TPEH-K与TPEH跳转特性实验与理论对比结果

Fig. 14 Experimental and theoretical results of snap-through of TPEH-K and TPEH

为了进一步验证激励加速度对两种能量采集器动力学特性的影响,取水平距离 $d=28\text{ mm}$ ,外部磁铁间距 $d_g=13\text{ mm}$ ,激励加速度为 $A=8.5\text{ m/s}^2$ ,激励频率 $f=5\text{ Hz}$ 。从图15的实验结果可知,相同激励加速度条件下,非对称变势能阱TPEH-K系统表现为三稳态大幅振动,采集器最大振动位移为 $0.05\text{ m}$ ,

最大输出电压为 $1.8\text{ V}$ ;而固定势阱采集器TPEH做阱内小幅振动,最大振动位移为 $0.01\text{ m}$ ,最大输出电压为 $0.12\text{ V}$ 。

为了验证弹簧刚度对能量采集器输出性能的影响,图16为采集器在弹簧刚度分别为 $300, 900, 3000\text{ N/m}$ 时正向扫频得出的输出电压幅值的实验

结果。从实验结果可知,当 $k=900\text{ N/m}$ ,在 $2.1\sim 5.4\text{ Hz}$ 时采集器有较大的输出电压,最大输出电压

达到 $6.8\text{ V}$ ,与固定势阱的三稳态能量采集器相比有更高的输出电压和更宽的工作频带。

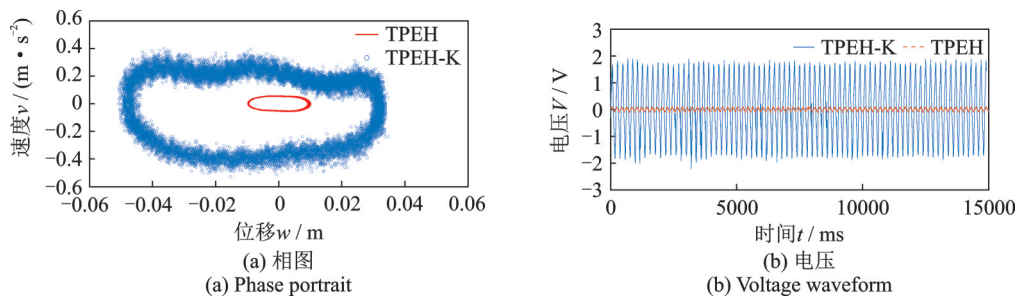


图15 TPEH-K和TPEH动态特性实验结果比较

Fig. 15 Experimental comparison of the dynamic performances between TPEH-K and TPEH

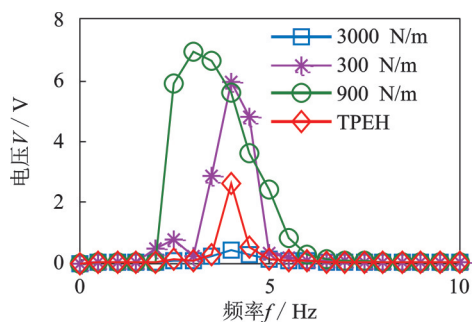


图16 不同刚度下采集器电压频率响应实验结果

Fig. 16 Experimental voltage responses of TPEH-K and TPEH with different stiffness  $k$

## 4 结论

设计建立非对称、变势能阱能量采集器的非线性磁力模型和机电耦合动力学模型。利用龙格-库塔算法进行仿真分析,研究了能量采集器的动态特性,以及弹簧刚度对系统能量采集性能的影响。得到以下结论:

(1) 外部磁铁在水平方向的振动使非对称势能阱深度降低,大幅值振荡运动更容易产生,有利于提升能量采集效率。

(2) 磁体间距会对系统运动状态产生影响,随着距离的增大,采集器会经历双稳态、三稳态、单稳态的运动状态。增大加速度幅值可以有效提高能量采集器的输出性能,拓宽其有效工作频带。

(3) 弹簧刚度是影响能量采集器输出性能的关键因素,选择适当的弹簧刚度,可以得到最大的输出电压及较宽的有效工作频带。

(4)  $k=900\text{ N/m}$ 时,TPEH-K采集器大幅值阱间运动的频率范围为 $2.1\sim 5.4\text{ Hz}$ ,最大输出电压达到 $6.8\text{ V}$ ,结果均优于TPEH。

## 参考文献:

- [1] Wang G Q, Liao W H, Yang B Q, et al. Dynamic and energetic characteristics of a bistable piezoelectric vibration energy harvester with an elastic magnifier[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2018, 105: 427-446.
- [2] Erturk A, Hoffmann J, Inman D J. A piezomagneto-elastic structure for broadband vibration energy harvesting[J]. Applied Physics Letters, 2009, 94(25): 254102.
- [3] 赵泽翔,王光庆,王学保,等.三稳态压电能量采集器的动态特性与实验[J].振动.测试与诊断,2020,40(4): 668-672.  
Zhao Zexiang, Wang Guangqing, Wang Xuebao, et al. Dynamic characteristics and experimental analysis of tri-stable piezoelectric energy harvester[J]. Journal of Vibration, Measurement and Diagnosis, 2020,40(4): 668-672.
- [4] Wang H Y, Tang L H. Modeling and experiment of bistable two-degree-of-freedom energy harvester with magnetic coupling[J]. Mechanical Systems and Signal Process, 2017, 86(Part A): 29-39.
- [5] Erturk A, Inman D J. Broadband piezoelectric power generation on high-energy orbits of the bistable Duffing oscillator with electromechanical coupling[J]. Journal of Sound Vibration, 2011, 330: 2339-2353.
- [6] 唐伟,王小璞,曹景军.非线性磁式压电振动能量采集系统建模与分析[J].物理学报,2014, 63(24): 72-85.  
Tang Wei, Wang Xiaopu, Cao Jingjun. Modeling and analysis of piezoelectric vibration energy harvesting system using permanent magnetics[J]. Acta Physica Sinica, 2014, 63(24): 72-85.
- [7] 谭江平,王光庆,鞠洋,等.多稳态压电振动能量采集器的非线性动力学特性及其实验研究[J].振动工程学报,2021,34(4): 765-774.  
Tan Jiangping, Wang Guangqing, Ju Yang, et al. Nonlinear dynamic characteristics and experimental validation of a multi-stable piezoelectric vibration energy harvester [J]. Journal of Vibration Engineering, 2021, 34 (4) : 765-774.

- [8] 张旭辉,赖正鹏,吴中华,等.新型双稳态压电振动俘能系统的理论建模与实验研究[J].振动工程学报,2019,32(1):87-96.  
Zhang Xuhui, Lai Zhengpeng, Wu Zhonghua, et al. Theoretical modeling and experimental study of a new bistable piezoelectric vibration energy harvesting system [J]. Journal of Vibration Engineering, 2019, 32(1): 87-96.
- [9] 孙仲生,杨拥民.悬臂梁压电阵子宽带低频振动能量俘获的随机共振机理的研究[J].物理学报,2011,60(7):430-436.  
Sun Zhongsheng, Yang Yongmin. Stochastic resonance mechanism for wideband and low frequency vibration energy harvesting based on piezoelectric cantilever beams [J]. Acta Physica Sinica, 2011, 60(7): 430-436.
- [10] Zhou Z Y, Qin W Y, Zhu P. Energy harvesting in a quad-stable harvester subjected to random excitation [J]. AIP Advances, 2016, 6(2): 785-791.
- [11] Zhou S, Cao J, Inman D J, et al. Broadband tristable energy harvester: modeling and experiment verification [J]. Applied Energy, 2014, 133: 33-39.
- [12] Zhu P, Ren X M, Qin W Y, et al. Theoretical and experimental studies on the characteristics of a tri-stable piezoelectric harvester [J]. Archive of Applied Mechanics, 2017, 87(9): 1541-1554.
- [13] Wang G Q, Zhao Z X, Liao W H, et al. Characteristics of a tri-stable piezoelectric vibration energy harvester by considering geometric nonlinearity and gravitation effects [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2020, 138: 106571.
- [14] 李魁,杨智春,谷迎松,等.变势能阱双稳态气动弹性能量收集的性能增强研究[J].航空学报,2020,41(9):131-142.  
Li Kui, Yang Zhichun, Gu Yingsong, et al. Performance enhancement of variable-potential-well bi-stable aeroelasticity energy harvesting [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2020, 41(9): 131-142.
- [15] Zou H X, Zhang W M, Wei K X, et al. A compressive-mode wideband vibration energy harvester using a combination of bistable and flextensional mechanisms [J]. Journal of Applied Mechanics, 2016, 83(12): 121005.
- [16] 李海涛,丁虎,陈立群.带有非对称势能阱特性的双稳态能量采集系统混沌动力学分析[J].振动与冲击,2020,39(18):54-59.  
Li Haitao, Ding Hu, Chen Liqun. Chaotic dynamics of a bi-stable energy harvesting system with asymmetric potential well characteristics [J]. Journal of Vibration and Shock, 2020, 39(18): 54-59.
- [17] Zhou Z Y, Qin W Y, Du W F, et al. Improving energy harvesting from random excitation by nonlinear flexible bi-stable energy harvester with a variable potential energy function [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 115: 162-172.
- [18] Leng Y G, Tan D, Liu J J, et al. Magnetic force analysis and performance of a tri-stable piezoelectric energy harvester under random excitation [J]. Journal of Sound and Vibration, 2017, 406(1): 146-160.

## Research on tri-stable piezoelectric vibration energy harvester with asymmetric and time-varying potential wells

ZHENG You-cheng, ZHU Qiang-guo, LIU Zhou-long, ZHOU Shuo, WANG Guang-qing

(School of Information and Electronic Engineering (Sussex Artificial Intelligence Institute),

Zhejiang Gongshang University, Hangzhou 310018, China)

**Abstract:** A tri-stable piezoelectric vibration energy harvester with asymmetric and time-varying potential wells is proposed to enhance the energy harvesting performances. It is composed of a piezoelectric cantilever beam with a tip magnet and a pair of external magnets which is fixed to a spring. The spring is fixed at the base and can be compressed and stretched when it is repulsed and attracted by the magnetic force. Based on the magnetic charge method and Lagrange function, the nonlinear magnetic model and distributed parameter dynamic model of piezoelectric vibration energy harvesting system are established. The effects of the distance between magnets, acceleration and spring stiffness on the potential energy and dynamic response characteristics of the system are simulated and analyzed. The results show that the spring stiffness makes the depth of the asymmetric potential well shallower, making it easier for the collector to enter the large vibration state. With the increase of the stiffness, the output performance of the collector first increases and then decreases. Under low excitation amplitude, the asymmetric and variable potential well energy collector has wider frequency band width and higher acquisition efficiency than the traditional symmetric potential well collector.

**Key words:** tri-stable piezoelectric energy harvester; asymmetric and time-varying potential wells; nonlinear magnetic force; dynamic characteristics

作者简介: 郑友成(1997—),男,硕士研究生。E-mail: 1409977980@qq.com。

通讯作者: 王光庆(1975—),男,博士,教授。电话:(0571)28877771; E-mail: kele76@163.com。



## 附录:磁力及拉格朗日方程推导

磁铁  $i$  ( $i=B$  or  $C$ ) 在  $A$  处的磁通密度为:

$$B_{iA} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \frac{\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{r}_{iA}}{|\mathbf{r}_{iA}|^3} \quad (\text{A1})$$

式中  $\mu_0$  为真空磁导率,  $\nabla$  为向量梯度,  $\mathbf{m}_i$  为磁偶极子  $i$  的磁矩, 且  $\mathbf{m}_i = M_i V_i$ ,  $M_i$  为磁铁  $i$  的磁化强度,  $V_i$  为磁铁  $i$  的体积,  $\mathbf{r}_{iA}$  为磁铁  $i$  到磁铁  $A$  的方向向量。

末端磁铁  $A$  与外部磁铁  $B$  之间的磁势能为:

$$U_{mBA} = -\mathbf{B}_{BA} \cdot \mathbf{m}_A \quad (\text{A2})$$

由图2中磁铁间的几何关系可知:

$$\begin{cases} \mathbf{m}_A = M_A \cos \alpha \cdot \mathbf{i} + M_A \sin \alpha \cdot \mathbf{j} \\ \mathbf{m}_B = -M_B V_B \sin \theta \cdot \mathbf{i} + M_B V_B \cos \theta \cdot \mathbf{j} \\ \mathbf{m}_C = -M_C V_C \sin \theta \cdot \mathbf{i} + M_C V_C \cos \theta \cdot \mathbf{j} \\ \mathbf{r}_{BA} = -(x_1 + d) \cdot \mathbf{i} + (\varpi_1(L, t) - d_g + y) \cdot \mathbf{j} \\ \mathbf{r}_{CA} = -(x_2 + d) \cdot \mathbf{i} + (\varpi(L, t) + d_g + y) \cdot \mathbf{j} \end{cases} \quad (\text{A3})$$

式中  $\mathbf{i}$  和  $\mathbf{j}$  分别代表水平方向和垂直方向的单位向量, 将式(A1)和(A3)代入式(A2)可得  $U_{mBA}$ , 同理可得  $U_{mCA}$ 。所以磁场势能为:

$$U_m = U_{mBA} + U_{mCA} \quad (\text{A4})$$

系统动力学方程可由拉格朗日方程得出:

$$U_{mBA} = \frac{\mu_0 M_A M_B V_A V_B}{4\pi} \left\{ \frac{(x_1 - x_2) \varpi' - \sqrt{4d_g^2 - (x_1 - x_2)^2}}{2d_g \sqrt{\varpi'^2 + 1} [(x_1 + d)^2 + (\varpi - d_g - y)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{[3(x_1 + d) \sqrt{4d_g^2 - (x_1 - x_2)^2} + (\varpi - d_g - y)(x_1 - x_2)] [(x_1 + d) + (\varpi - d_g - y) \varpi']}{2d_g \sqrt{\varpi'^2 + 1} [(x_1 + d)^2 + (\varpi - d_g - y)^2]^{\frac{5}{2}}} \right\} \quad (\text{A5})$$

$$U_{mCA} = \frac{\mu_0 M_A M_C V_A V_C}{4\pi} \left\{ \frac{(x_1 - x_2) \varpi' - \sqrt{4d_g^2 - (x_1 - x_2)^2}}{2d_g \sqrt{\varpi'^2 + 1} [(x_2 + d)^2 + (\varpi + d_g - y)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{[3(x_2 + d) \sqrt{4d_g^2 - (x_1 - x_2)^2} + (\varpi + d_g - y)(x_1 - x_2)] [(\varpi + d_g - y) \varpi' - (x_2 + d)]}{2d_g \sqrt{\varpi'^2 + 1} [(x_2 + d)^2 + (\varpi + d_g - y)^2]^{\frac{5}{2}}} \right\} \quad (\text{A6})$$

$$L = T_1 + T_2 - K_1 - K_2 - U_m + W_e \quad (\text{A7})$$

式中

$$T_1 = \frac{1}{2} (2\rho_p b_p h_p + \rho_s b_s h_s) \int_0^{L_1} [\phi_{11}(x) \dot{q}(t) + \dot{z}(t)]^2 dx + \frac{1}{2} \rho_s b_s h_s \int_0^{L_2} [\phi_{12}(x) \dot{q}(t) + \dot{z}(t)]^2 dx + \frac{1}{2} m_t [\phi_{12}(L_2) \dot{q}(t) + \dot{z}(t)]^2 \quad (\text{A8})$$

$$T_2 = \frac{1}{2} (2m_t + m_t) \left( \frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} (2m_t + m_t) [\dot{y} + \dot{z}(t)]^2 \quad (\text{A9})$$

$$K_1 = \frac{1}{2} K_0 q^2 - B_1 q V \quad (\text{A10})$$

$$K_2 = \frac{1}{2} k(x_1^2 + y^2) + \frac{1}{2} k(x_2^2 + y^2) \quad (\text{A11})$$

$$W_e = \frac{1}{2} C_p V^2 + B_1 q V \quad (\text{A12})$$

将式(A4), (A8)~(A12)代入式(A7)可得拉格朗日方程式(1)。